

## Integrales dobles

Prof. Marco García

### Teorema de Fubini:

- Si  $f(x, y)$  es continua en un rectángulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , entonces

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

- Si  $f(x, y)$  es continua en una región  $R$  horizontal (o de tipo 1), es decir  $R = \{(x, y) : a < x < b \text{ y } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ , donde  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son continuas en  $[a, b]$ , entonces

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

- Si  $f(x, y)$  es continua en una región  $R$  vertical (o de tipo 2), es decir  $R = \{(x, y) : c < y < d \text{ y } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ , donde  $h_1(y)$  y  $h_2(y)$  son continuas en  $[c, d]$ , entonces

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

### Algunas funciones sin primitiva elemental

$P(x)$  es un polinomio de grado mayor o igual a 2

$$\begin{array}{ccc} e^{P(x)} & \frac{e^x}{x} & \frac{\sin(x)}{x} \\ \operatorname{sen}(P(x)) & \operatorname{cos}(P(x)) & \operatorname{Ln}(\operatorname{ln}(x)) \\ e^x \operatorname{ln}(x) & \sqrt{x^3 - 1} & \\ & \frac{\operatorname{cos}(x)}{x} & \frac{1}{\operatorname{ln}(x)} \end{array}$$

### Ejercicios:

1. Encuentra el volumen del sólido  $S$  en el primer octante que contiene al origen y está limitado por las superficies  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $x + 2y = 3$ , y  $3x + 4y + 2z = 12$ .

2. Encuentra el volumen del sólido  $S$  limitado por las superficies  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  y  $z = 0$ .

3. Calcula la integral  $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (2x + 3y)^2 dx dy$

4. Calcula la integral  $\int \int_D y^2 \sqrt{x} dA$ , donde  $D$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  tales que  $x \geq 0$ ,  $y \geq x^2$  y  $y \leq 10 - x^2$

5. Calcula la integral  $\int \int_R e^{x^2+y^2} dA$ , donde  $R$  es la región acotada por el eje  $x$  y la curva  $y = \sqrt{1 - x^2}$

6. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x^2 + z^2 = 1$

7. Calcula la integral  $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y} dy dx$

8. **Libro:Pita Ruiz**

Página Problemas

589 26,27,29,30