Isometrías:

Definición 1 (Hiperplano) *Sea $Q \in \mathbb{R}^n$ y sea S un subespacio de dimensión $n-1$ de $\mathbb{R}^n$, el conjunto*

$$H = \{s + Q : s \in S\}$$

*se llama **hiperplano** de $\mathbb{R}^n$*

Ejercicios:

1. Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Entonces A es una transformación lineal.

2. Prueba que La inversa de una reflexión es ella misma.

3. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, si $H = \{s+Q : s \in S\}$ y $Q' \in H$, entonces $H = \{s+Q : s \in S\}$.

4. Sea $Q, v \in \mathbb{R}^n$, con $v \neq 0$. Muestre que el conjunto

   $$H = \{P \in \mathbb{R}^n : \langle P - Q, v\rangle = 0\}$$

   es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$.

5. Muestre que si H es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ y $R \in H$ entonces existe $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$ tal que

   $$H = \{P \in \mathbb{R}^n : \langle P - Q, v\rangle = 0\}$$

6. Sean $P, P' \in \mathbb{R}^n$ con $P \neq P'$. Muestre que

   $$H = \{Q : ||Q - P|| = ||Q - P'||\}$$

   es un hiperplano.

7. Sean $P, P' \in \mathbb{R}^n$ con $P \neq P'$. Considere el hiperplano

   $$H = \{Q : ||Q - P|| = ||Q - P'||\}$$

   Pruebe que $R_H(P) = P'$, $R_H(P') = P$.

8. Sea $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\{P_i - P_0\}_{i=0}^{i=n}$ son l.i. Si se cumple que $||a - P_i|| = ||a' - P_i||$ para todo $i = 0, ..., n$. Entonces $a = a'$.

9. Sea $\{P_i\}_{i=0}^{k}$ un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\{P_i - P_0\}_{i=0}^{i=n}$ son l.i. Si

$$Q \notin \{\lambda_1(P_1 - P_0) + \cdots + \lambda_k(P_k - P_0) + P_0 : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

entonces el conjunto $\{Q - P_0\} \cup \{P_i - P_0\}_{i=0}^{i=n}$ es linealmente independiente.

10. Sea $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\{P_i - P_0\}_{i=0}^{i=n}$ son l.i. Entonces no existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ tal que $P_i \in H$, para todo $i = 0, ...n$.

11. Sea $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\{P_i - P_0\}_{i=0}^{i=n}$ son l.i. Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría tal que $A(P_i) = P_i$, entonces A es la identidad.

12. Sea $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una isometría. Muestra que es el producto de a los sumo 4 reflexiones.