Métodos Matemáticos 1
Tarea 1
Vectores Cartesianos 1
Fecha de entrega 28 Septiembre 2007

1. Si necesidad de utilizar sistemas coordenados demuestre
   a) El Teorema del Coseno a partir de $(\vec{a})^2 = \left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2$
   b) que dado cuatro vectores coplanares $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, entonces $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) \neq 0$

2. La inducción magnética, $\vec{B}$, viene definida a través de la Fuerza de Lorentz como $\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ Encuentre las expresiones para la inducción magnética , $\vec{B}$, consistentes con las siguientes medidas experimentales:
$$\vec{v} = \hat{\imath}, \quad \frac{\vec{F}}{q} = -3\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{\mathbf{k}}; \qquad \vec{v} = \hat{\jmath}, \quad \frac{\vec{F}}{q} = 3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\mathbf{k}}; \qquad \text{y} \qquad \vec{v} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \frac{\vec{F}}{q} = 3\,\hat{\jmath} - 2\,\hat{\imath};$$

3. Considere los siguientes puntos en el espacio $(1,0,0); (2,-1,0); (0,-1,1); (-1,0,1)$.
   a) Considere los tres primeros puntos. ¿ Estos tres puntos son coplanares ? ¿ por qué ? De ser coplanares, encuentre el área del triángulo que tiene por vértices esos tres puntos
   b) Considere los cuatro puntos¿ Estos cuatro puntos son coplanares ? ¿ por qué ?

4. Un vector genérico $\vec{a}$ puede ser expresado como $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\perp$ donde $\vec{a}_r$ es un vector radial, $\vec{a}_\perp$ y un vector tangencial. Considerando $\hat{u}_r$ el vector unitario en la dirección radial, muestre que:
   a) $\vec{a}_r = (\vec{a} \cdot \hat{u}_r)\,\hat{u}_r$
   b) $\vec{a}_\perp = -\hat{u}_r \times (\hat{u}_r \times \vec{a})$

5. Como lo hemos visto con los vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ podemos construir un sistema oblicuo de coordenadas al colocarlos con un mismo origen. Esto es
$$\vec{a} = \bar{a}^1\vec{w}_1 + \bar{a}^2\vec{w}_2 + \bar{a}^3\vec{w}_3$$
donde las cantidades $\left\{\bar{a}^1, \bar{a}^2, \bar{a}^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\vec{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.
   a) Muestre que las componentes de un vector genérico en esta base cumplen con
$$\bar{a}^1 = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}{\vec{w}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}; \qquad \bar{a}^2 = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{w}_3 \times \vec{w}_1)}{\vec{w}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}; \qquad \bar{a}^3 = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{w}_1 \times \vec{w}_2)}{\vec{w}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}$$
   b) Considere los siguientes vectores
$$\vec{t}_1 = \frac{(\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}{\vec{w}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}; \qquad \vec{t}_2 = \frac{(\vec{w}_3 \times \vec{w}_1)}{\vec{w}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}; \qquad \vec{t}_3 = \frac{(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2)}{\vec{w}_1 \cdot (\vec{w}_2 \times \vec{w}_3)}$$
   Suponiendo que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ son vectores base, muestre que $\left\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\right\}$ forman una base para el espacio tridimensional.

c) Muestre que

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{t}_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{t}_2 = \vec{w}_3 \cdot \vec{t}_3 = 1; \qquad \text{y} \qquad \vec{w}_1 \cdot \vec{t}_2 = \vec{w}_2 \cdot \vec{t}_1 = \vec{w}_3 \cdot \vec{t}_2 = \vec{w}_2 \cdot \vec{t}_3 = \vec{w}_3 \cdot \vec{t}_1 = \vec{w}_1 \cdot \vec{t}_3 = 0$$

d) Del mismo modo muestre que

$$\vec{w}_1 = \frac{\left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}{\vec{t}_1 \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}; \qquad \vec{w}_2 = \frac{\left(\vec{t}_3 \times \vec{t}_1\right)}{\vec{t}_1 \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}; \qquad \vec{w}_3 = \frac{\left(\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\right)}{\vec{t}_1 \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}$$

y equivalentemente

$$\tilde{a}^1 = \frac{\vec{a} \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}{\vec{t}_1 \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}; \qquad \tilde{a}^2 = \frac{\vec{a} \cdot \left(\vec{t}_3 \times \vec{t}_1\right)}{\vec{t}_1 \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}; \qquad \tilde{a}^3 = \frac{\vec{a} \cdot \left(\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\right)}{\vec{t}_1 \cdot \left(\vec{t}_2 \times \vec{t}_3\right)}$$

donde

$$\vec{a} = \tilde{a}^1 \vec{t}_1 + \tilde{a}^2 \vec{t}_2 + \tilde{a}^3 \vec{t}_3$$

más aún muestre que

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{w}_1)\, \vec{t}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{w}_2)\, \vec{t}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{w}_3)\, \vec{t}_3 = \vec{a} = \left(\vec{a} \cdot \vec{t}_1\right) \vec{w}_1 + \left(\vec{a} \cdot \vec{t}_2\right) \vec{w}_2 + \left(\vec{a} \cdot \vec{t}_3\right) \vec{w}_3$$

Las bases $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ y $\left\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\right\}$ se consideran una la recíproca de la otra y tienen una importante aplicación en cristalografía. Con ellos podremos definir la estructura cristalina

e) Considere el siguiente vector

$$\vec{a} = 5\ \hat{\imath} - 3\ \hat{\jmath} + 8\ \hat{\mathbf{k}} \qquad \text{con } \vec{w}_1 = 3\ \hat{\imath} - 4\ \hat{\jmath}; \quad \vec{w}_2 = 3\ \hat{\jmath} + 4\ \hat{\mathbf{k}}; \quad \vec{w}_3 = -\ \hat{\imath} +\ \hat{\jmath} + 2\ \hat{\mathbf{k}}$$

1) Compruebe que efectivamente $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ forman base.
2) Exprese el vector $\vec{a}$ en términos de la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$
3) Construya la base recíproca $\left\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\right\}$ y vuelva a expresar el vector $\vec{a}$ como una combinación lineal de los vectores de esa base rec'iproca.

Tradicionalmente, los núcleos atómicos en una red cristalina vienen descritos por un radio vector posición

$$\vec{r} = n_a\ \vec{a} + n_b\ \vec{b} + n_c\ \vec{c}$$

con n_a, n_b, n_c números enteros, además los módulos de los vectores $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$ y $|\vec{c}|$ están relacionados con las distancias interatómicas de la red (los parámetros de la red). Tal y como se muestra en la Figura **??** tomada del libro de *Introduction to Solid State Physics* de Charles Kittel (Wiley; 7th edition), los vectores no necesariamente son ortogonales y los ángulos que formen entre ellos son determinantes del tipo de estructura cristalina que se describe. Si asociamos la base $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ con la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, podremos construir la base recíproca $\left\{\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{t}_3\right\} \equiv \left\{\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'\right\}$ la cual se denomina base del espacio de Fourier. Esta base y este espacio son muy útiles a la hora de representar patrones de difracción de ondas (rayos X) dispersados por los distintos planos cristalinos. Para más detalles puede consultar los dos primeros capítulos del libro de C. Kittel arriba mencionado o algunos de los muchos enlaces en INTERNET, como por ejemplo:

- `http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/xray-diffraction/reciprocal1.php`

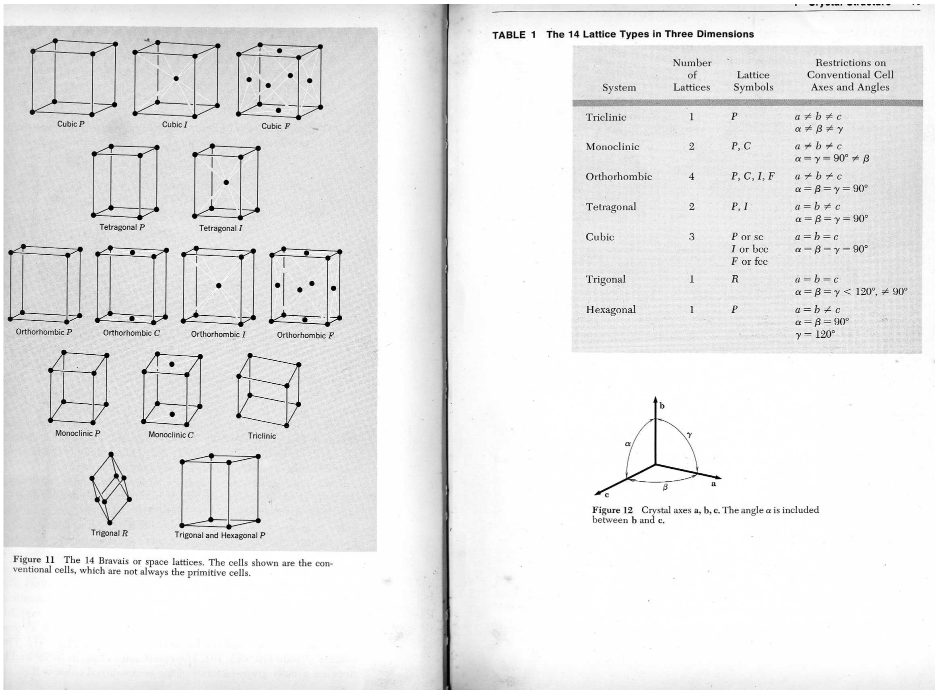

Figure 11 The 14 Bravais or space lattices. The cells shown are the conventional cells, which are not always the primitive cells.

TABLE 1 The 14 Lattice Types in Three Dimensions

System	Number of Lattices	Lattice Symbols	Restrictions on Conventional Cell Axes and Angles
Triclinic	1	P	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$
Monoclinic	2	P, C	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$
Orthorhombic	4	P, C, I, F	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
Tetragonal	2	P, I	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
Cubic	3	P or sc I or bcc F or fcc	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$
Trigonal	1	R	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma < 120°, \neq 90°$
Hexagonal	1	P	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$

Figure 12 Crystal axes **a**, **b**, **c**. The angle α is included between **b** and **c**.

Figura 1: Redes cristalinas y parámetros de la red

- `http://www.cem.msu.edu/~cem924sg/Reciprocal.html`
- `http://www-structure.llnl.gov/Xray/tutorial/spcdiff.htm`

6. Una carga eléctrica, q_1, que se mueve con una velocidad v_1 produce en un punto P de coordenadas $(x, y, z) \longleftrightarrow \vec{r}\,(P) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ una inducción magnética medida en unidades MKS de la forma

$$\vec{B} = q_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}_1 \times \hat{u}_r}{r^2} \qquad \text{donde } \hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{y} \quad |\vec{r}|^2 = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

   a) Muestre la inducción magnética producida por la carga q_1 genera una Fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$, sobre una carga, q_2, que se mueve con velocidad $\vec{v}_2$ la cual puede ser expresada como

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \hat{u}_r)$$

   b) Construya la expresión para la fuerza $\vec{F}_{21}$. Es decir la Fuerza de Lorentz que la carga 2 produce sobre la carga1.

   c) Compárelas. ¿ se cumple la tercera Ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$? ¿ Por qué ? ¿ Existen casos (trayectorias) para los cuales si se cumple ? ¿ cuáles ?