Tarea 2 Vectores Cartesianos 1
Fecha de entrega 5 octubre 2007

1. Recordamos que podemos representar un vector genérico de $\Re^3$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = a^i\hat{I}_i = a^1\hat{I}_1 + a^2\hat{I}_2 + a^3\hat{I}_3 \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \hat{I}_1 = \hat{\imath}, \quad \hat{I}_2 = \hat{\jmath} \quad \hat{I}_3 = \hat{k} \\ \\ a^1 = a_x \quad a^2 = a_y \quad a^3 = a_z \end{array} \right.$$

y el operador nabla $\vec{\nabla}$ será un "vector"

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} = \hat{I}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{I}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{I}_3\frac{\partial}{\partial x^3} = \hat{I}^i\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{con} \qquad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$$

donde el 'índice $i = 1, 2, 3$.
Entonces, dados los vectores en $\Re^3$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d}$ y si denotamos el producto mixto $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ por $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, demuestre las siguientes igualdades vectoriales

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left\{\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times (\vec{c} \times \vec{a})\right\} = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^2$

b) $\left\{\vec{d} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right\} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

c) $\vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{a})\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a}$

d) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$

e) $\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{c} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right) - \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \cdot \vec{\nabla}\right)\right)\vec{a}$

2. Dado $\vec{r} = \vec{r}(t)$ el radio vector posición de una partícula de carga q y masa m Su ecuación de movimiento será

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\left(\vec{E} + \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}\right)$$

cuando la partícula está inmersa en una región con donde opera un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$. Considere el caso en el cual los campos eléctricos y magnéticos son constantes y vienen representados por

$$\vec{E} = E_0\;\hat{\imath} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = B_0\;\hat{\jmath}$$

y suponga que la partícula parte con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\;\hat{k}$. Entonces, muestre que

a) Si $v_0 = \dfrac{E_0}{B_0}$ la partícula continua con un movimiento rectilíneo uniforme;

b) Si $v_0 = 0$, la partícula tendrá

$$\vec{r} = \frac{mE_0}{qB_0^2}\left(1 - \cos\theta(t)\right)\;\hat{\imath} + \left(\theta(t) - \operatorname{sen}\theta(t)\right)\;\hat{k}$$

como radiovector posición. ¿ Puede relacionar $\theta = \theta(t)$?

c) la distancia total recorrida por la partícula en un tiempo t es

$$dist = \frac{E_0}{B_0}\int_0^t \mathrm{d}\tau\;\left(\operatorname{sen}\left(\frac{qB_0}{2m}\tau\right)\right)$$

3. Las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo en el vacío (en ausencia de cargas eléctricas, corrientes, medios dieléctricos o magnéticos) se escriben como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

Considere una función escalar ϕ y una vectorial $\vec{A}$ de tal forma que estén relacionadas con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de la forma $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \text{y} \qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

a) Exprese, de la manera más simple posible las ecuaciones de Maxwell en término de los potenciales escalares ϕ y vectoriales $\vec{A}$

b) Considere el llamado calibre de Lorentz. Es decir, que los potenciales escalares ϕ y vectoriales $\vec{A}$ cumplen, adicionalmente con la ecuación

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

y muestre que ambos potenciales (escalar y vectorial) cumplen la ecuación de onda. Esto es

$$\vec{\nabla}^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$$
$$\backslash$$
$$\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

c) Suponga ahora el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{array}{llll}
F^{00}=0 & F^{01}=E^1\equiv E_x & F^{02}=E^2\equiv E_y & F^{03}=E^3\equiv E_z \\
F^{10}=-E^1\equiv -E_x & F^{11}=0 & F^{12}=B^3\equiv B_z & F^{13}=-B^2\equiv -B_y \\
F^{20}=-E^2\equiv -E_y & F^{21}=-B^3\equiv -B_z & F^{22}=0 & F^{23}=0 \\
F^{30}=-E^3\equiv -E_z & F^{31}=B^2\equiv B_y & F^{32}=-B^1\equiv -B_x & F^{33}=0
\end{array}$$

Compruebe que las ecuaciones de Maxwell para el vacío pueden ser escritas como

$$F^{\mu\nu}_{,\upsilon}\equiv\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \qquad \text{con } \nu,\mu=0,1,2,3 \qquad \text{y} \qquad x^0=t,\quad x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z,$$

4. Mediante el álgebra vectorial

a) Hallar los ángulos que forma la recta que une a los puntos $P_1 \longleftrightarrow (-2,-2,1)$ y $P_2 \longleftrightarrow (3,-3,4)$ con cada uno de los ejes coordenados

b) Hallar la distancia del punto $P \longleftrightarrow (-1,2,1)$ al plano $x-5y+2z=1$

c) Hallar el ángulo entre los siguientes planos $x+2y-z=0$ y $2x+y-5z=1$

d) Hallar el ángulo entre la recta que une a los puntos $P_1 \longleftrightarrow (-1,0,0)$ y $P_2 \longleftrightarrow (2,-3,4)$ con el plano $3x-2y+z=7$

e) Hallar la distancia más corta del punto $P \longleftrightarrow (6,-1,4)$ a la recta que une a los puntos $P_1 \longleftrightarrow (2,2,2)$ y $P_2 \longleftrightarrow (3,-1,4)$