Métodos Matemáticos 1
Tarea 3
Fecha de entrega 11 de Octubre 2007

1. Dos números complejos $a = \alpha + i\beta$ y $b = \mu + i\nu$ pueden ser representados como vectores en el plano de forma que $\vec{a} = \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}$ y $\vec{b} = \mu\hat{\imath} + \nu\hat{\jmath}$. Muestre que

$$a^* b = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\hat{\mathsf{k}} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

2. Dado un polinomio de la forma $f(z) = z^5 - 6z^4 + 15z^3 - 34z^2 + 36z - 48$

   a) Muestre que la ecuación $f(z) = 0$ tiene raíces de la forma $z = \lambda i$. Identifique λ y factorice $f(z)$.

   b) Muestre que el factor cúbico de $f(z)$ puede ser escrito como $(z + a)^3 + b$, y utilizando ese hecho, encuentre las raíces de la ecuación $f(z) = 0$.

3. Dado un polinomio de la forma

$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0$$

   Resuelva la ecuación

   a) Evaluando el efecto de hacer $z^3 = 2$

   b) Factorizando y utilizando la expansión binomial $(z + a)^4$

   Grafique las raíces en el diagrama de Argand

4. Aunque no lo parezcan, las funciones hiperbólicas son las análogas, complejas, de las funciones trigonométricas. Las definimos de la siguiente manera

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \equiv \cos(ix)\,; \qquad \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \equiv -i \operatorname{sen}(ix)$$

   donde $x \in \mathbb{R}$. Habida cuenta de estas definiciones y si $z = x + iy$, entonces

   a)
$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\operatorname{senh} x + i \operatorname{sen} y}{\cosh x + \cos y}$$

   b)
$$\arccos z = -i \ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$