

Métodos Matemáticos 1

Tarea 5

Tensores e Índices

Octubre 2007

1. En un espacio euclideo E^n se define un vector \tilde{u} unitario. Muestre que

- a) Si definimos el tensor $P_j^i = u^i u_j$ entonces $P_j^i = P_j^k P_k^i$. Este tipo de objetos lo llamaremos proyector.
- b) Encuentre u^i para $n = 3$ para cada una de las representaciones de

$$P_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Muestre que si $A_{hijk} x^h x^i y^j y^k = 0 \forall x^j, y^k \in E^n$ entonces

$$A_{hijk} + A_{jihk} + A_{hkji} + A_{jkhi} = 0$$

3. Considere un tensor de rango 4, T_{hijk} antisimétrica respecto a cualquier par de índices. ¿cuántas componentes independientes tiene T_{hijk} ?

4. Dados T_j^i y $a^i \in E^3$ con

$$T_{ij} = T_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{a} = 5i_1 + 9i_2 - 5i_3 \quad \text{con } a^i \equiv a_i$$

- a) Calcule $T_j^i a_i$ y $T_j^i a^j$
- b) Si ahora $\vec{b} = -2i_1 + 5i_2 + 4i_3$ Calcule $T_j^i a_i b^j, T_j^i b_i b^j$.
- c) Construya y muestre las partes simétrica S_{ij} y antisimétrica A_{kl} del tensor T_j^i
- d) Calcule $S_j^i a_i b^j, A_j^i a_i b^j, S_j^i a_i a^j, A_j^i b_i b^j$
5. Dado un tensor genérico de segundo orden T_{ij} Demostrar
- a) El determinante, $\det[\mathbf{T}] \equiv \det[T_j^i] = T$ y la traza, $\text{tr}[T_j^i] = T^i_i$ de los tensores son invariantes, en otras palabras $\det[T_j^i]$ y $\text{tr}[T_j^i]$ son escalares respecto a transformaciones de coordenadas.
- b) Si definimos la matriz adjunta, $\text{adj}[\mathbf{A}]$, como la traspuesta de la matriz de cofactores

$$\text{adj}[\mathbf{A}] = (\mathbf{A}^c)^T \quad \implies \text{adj}[A_j^i] = \left((A^c)_j^i \right)^T = (A^c)_i^j$$

donde la matriz de cofactores $(A^c)_j^i$ viene dada por

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \quad \implies (A^c)_j^i = \begin{pmatrix} (A^c)_1^1 & (A^c)_2^1 & (A^c)_3^1 \\ (A^c)_1^2 & (A^c)_2^2 & (A^c)_3^2 \\ (A^c)_1^3 & (A^c)_2^3 & (A^c)_3^3 \end{pmatrix}$$

y los cofactores son

$$(A^c)_1^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)_1^2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)_1^3 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (A^c)_2^3 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix} \quad (A^c)_3^3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Para la transformación $\tilde{x}^i = a x^i$ con a un escalar constante, muestre que

- 1) $\tau_j^i = \frac{\text{adj}[T_j^i]}{T}$ es un tensor
- 2) Su determinante, $\det [\tau_j^i] = \tau$ y su traza, $\text{tr} [\tau_j^i] = \tau_i^i$ también serán invariantes.
- 3) $T_j^i = \frac{\text{adj}[\tau_j^i]}{\tau}$
- 4) $\tau T = 1$