

**Métodos Matemáticos 1**  
**Tarea 6**  
**Coordenadas Curvilíneas**  
**Fecha de entrega 7 Diciembre 2007**

1. Considere las siguientes leyes de transformación entre coordenada  $(x, y, z) \rightarrow (u, v, z)$

$$xy = u \quad x^2 - y^2 = v \quad z = z$$

- a) Para  $z = cte$  grafique las coordenadas  $(x, y)$  y explique qué significan estas coordenadas  
 b) Construya la tríada de vectores unitarios  $|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{z}\rangle$  ¿es ese sistema levógiro ( $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{z}}$ ) o destrógiro ( $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{z}}$ )?  
 c) Dado un vector  $|\mathbf{a}\rangle = 5|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle + 6|\mathbf{z}\rangle$  encuentre su expresión en el sistema cartesiano ( $|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle$ )  
 d) Considere ahora un tensor cartesiano

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Encuentre su expresión  $\tilde{T}_{ij}$  en la base coordenada  $(u, v, z)$

- e) Considere ahora otra familia de sistemas de coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi \quad z = z$$

Encuentre la expresión para el vector  $|\mathbf{a}\rangle = 5|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle + 6|\mathbf{z}\rangle$  en la base  $(|\rho\rangle, |\varphi\rangle, |\mathbf{k}\rangle)$

2. Considere el espacio de Minkowski con un elemento de línea escrito en coordenadas “cartesianas”, como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Considere también un cuadrivector en coordenadas “cartesianas”  $u^\mu \equiv (u^0 = 1, u^1 = 1, u^2 = 0, u^3 = 0)$

- a) Encuentre la expresión para este cuadrivector en coordenadas “esféricas”

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \equiv \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- b) Encuentre la expresión para el módulo del cuadrivector  $u^\mu u_\mu$  en coordenadas “esféricas”  
 c) Considere las siguientes coordenadas

$$ds^2 = -dv^2 + dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \equiv \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Encuentre las expresiones para  $\bar{u}^\mu = (\bar{u}^0, \bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$  y  $\bar{u}_\mu = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$

- d) Finalmente considere el siguiente sistema de coordenadas

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1+kt} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \equiv \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad k = const$$

Encuentre la expresión para el cuadrivector  $\hat{u}^\mu$  en estas coordenadas