Métodos Matemáticos 1
Tarea 7
Análisis Vectorial
Enero 2008

1. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

2. Dado $\vec{r} = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ con $\|\vec{r}\| = r = cte$, $f(r)$ un campo escalar bien comportado y $\vec{a}$ y $\vec{c}$ vectores constantes, muestre si las siguientes igualdades son ciertas:

   a) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} f(r)) = 3f(r) + r f'(r)\,;\quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r})\,\vec{r}) = 4\,(\vec{a} \cdot \vec{r})$
   $\vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r})\,\vec{c}) = \vec{\nabla} \cdot ((\vec{c} \cdot \vec{r})\,\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,;\quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{c}) = -2\,(\vec{a} \cdot \vec{c})$

   b) Encuentre los enteros n tales que $\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = 3$

   c) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times (f(r)\,\vec{r}) = 0;\quad \vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c};\quad \vec{\nabla} \times (\vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{r})) = \vec{a} \times \vec{c}$
   $\vec{\nabla} \times ((\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{c}$

   d) $\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) \cdot \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) f(r) = r^2 \Delta f(r) - r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ con $\Delta f(r) \equiv \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) f(r)$

3. Encuentre la expresión para la divergencia y el rotor de la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ de un cuerpo rígido alrededor de un punto (x, y, z)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y $\vec{\epsilon}$ es un vector constante.

4. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los siguientes campos.

   a) $\vec{a} = \frac{1}{2}\,(-y\ \hat{\imath} + x\ \hat{\jmath})$

   b) $\vec{a} = (xy + 1)\,\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right)\hat{\jmath}$

5. Encuentre el rotor y el flujo para el campo vectorial

$$\vec{a} = \left(x^2 + y - 4\right)\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} + \left(2xz + z^2\right)\hat{\mathbf{k}}$$

a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z > 0$

6. En mecánica clásica la cantidad de movimiento viene definida como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Para pasar a mecánica cuántica se asocia $\vec{r}$ y $\vec{p}$ con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{X} | \psi \rangle = x \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = x\ \psi(\vec{r}) \qquad \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_x | \psi \rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x}\right) \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{Y} | \psi \rangle = y \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = y\ \psi(\vec{r}) \qquad \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_y | \psi \rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial y}\right) \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial y} \psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{Z} | \psi \rangle = z \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = z\ \psi(\vec{r}) \qquad \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_z | \psi \rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial z} \psi(\vec{r})$$

En definitiva, en coordenadas cartesianas en la representación de coordenadas $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ tendremos que

$$\langle \mathbf{r}| \, \mathbf{R} \, |\psi\rangle = \vec{r} \; \psi \left(\vec{r} \right) \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{r}| \, \mathbf{P}_x \, |\psi\rangle = -i\hbar \; \vec{\nabla} \; \psi \left(\vec{r} \right)$$

a) Muestre que en Mecánica cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular son

$$\langle \mathbf{r}| \, \mathbf{L}_x \, |\psi\rangle = -i\hbar \; \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi \left(\vec{r} \right) ; \qquad \langle \mathbf{r}| \, \mathbf{L}_y \, |\psi\rangle = -i\hbar \; \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi \left(\vec{r} \right)$$

$$\langle \mathbf{r}| \, \mathbf{L}_z \, |\psi\rangle = -i\hbar \; \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \left(\vec{r} \right)$$

b) Utilizando las definiciones anteriores muestre que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantindad de movimiento angular cumple con

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = i\hbar \mathbf{L}_z \qquad \text{y en general } \varepsilon_{ijk} \mathbf{L}^i \mathbf{L}^j = i\hbar \mathbf{L}_i \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{L}} \times \tilde{\mathbf{L}} = i \tilde{\mathbf{L}}$$

con $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_x$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_y$; $\mathbf{L}^3 = \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_z$ y $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_x \hat{\imath} + \mathbf{L}_y \hat{\jmath} + \mathbf{L}_z \hat{\mathbf{k}}$

c) Dados dos Operadores Vectoriales $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ que conmtan entre ellos y con $\tilde{\mathbf{L}}$ tales que

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}} \right] = \left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{L}} \right] = \left[\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}} \right] = 0$$

demuestre entonces que

$$\left[\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{L}} \right] = i \left(\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{L}}$$

7. El campo magnético generado por una corriente I es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{\imath} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\jmath} \right)$$

Encuentre un vector potencial magnético, $\vec{A}$, tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

8. Si un campo vectorial tiene la forma $\vec{B} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\varphi$, entonces $\vec{B}$ es solenoidal y su potencial vectorial es: $\vec{A} = \frac{1}{2} \left(\phi \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \phi \right)$.

9. Considere una esfera de densidad uniforme, ρ_0, radio $r = a$, y masa M.

a) Muestre que la fuerza gravitacional por unidad de masa es $\vec{F} = -\left(\frac{4\pi G \rho_0}{3r} \right) \hat{\mathbf{u}}_r$ para $0 < r \leq a$

b) Encuentre el potencial gravitacional asociado a esta fuerza

c) Imagine un tunel que atravieza la esfera pasado por su centro. Encentre la ecuación de movimiento y la expresión del periódo para una partícula de masa m, que se deja caer por ese túnel.

10. Dado un vector potencial magnético, $\vec{A}$, tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ muestre que

$$\iint_s \vec{B} \cdot \mathrm{d} \, \vec{S} = \oint \vec{A} \cdot \mathrm{d} \, \vec{r} \qquad \text{es invariante de calibre: } \vec{A} \left(\vec{r} \right) \rightarrow \vec{A} \left(\vec{r} \right) + \vec{\nabla} \chi \left(\vec{r} \right)$$

11. La fuerza de Lorentz para una partícula con carga q que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en un campo electríco $\vec{E}$ y magnéstico $\vec{B}$ es $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$. Muestre que

$$\left.\begin{array}{c} \vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \\ \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \vec{F} = \left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} + \vec{\nabla}\left(\vec{A} \cdot \vec{v}\right)\right]$$