# Métodos Matemáticos 1 Operadores Lineales Matrices, Determinantes, Autovalores y Autovectores*

**L. A. Núñez****

*Centro de Física Fundamental,*
*Departamento de Física, Facultad de Ciencias,*
*Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela* y
*Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,*
(CeCalCULA),
*Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Enero 2007 $\alpha$ 1.0

# Índice



*ADVERTENCIA: **El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.**

**e-mail: `nunez@ula.ve` Web: `http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/`

# 1. Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformaciones lineales) a una operación que asocia un vector $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad, es decir esta función de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ cumple con

$$\left|\mathbf{v}'\right\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle \qquad \ni \quad \mathbf{A}\left[\alpha\ |\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ |\mathbf{v}_2\rangle\right] = \alpha\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_2\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle\,,|\mathbf{v_1}\rangle\ \text{ y }\ |\mathbf{v}_2\rangle \in \mathbf{V}_1$$

Sencillamente algo que actúe sobre una suma de vectores y que sea equivalente a la suma de sus actuaciones sobre los vectores suma.

**Ejemplos**

- Las siguientes transformaciones

  $$\left|\mathbf{x}'\right\rangle = \mathbf{T}\,|\mathbf{x}\rangle \rightarrow \qquad \left(x', y', z'\right) = \mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\}$$

  claramente son lineales

  - $\mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\} = (x, 2y, 3z) \rightarrow$

    $$\begin{aligned} \mathbf{T}\left\{a\,(x, y, z) + b\,(m, n, l)\right\} &= a\mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\} + b\mathbf{T}\left\{(m, n, l)\right\} \\ \mathbf{T}\left\{(ax + bm, ay + bn, az + bl)\right\} &= a\,(x, 2y, 3z) + b\,(m, 2n, 3l) \\ (ax + bm, 2\,[ay + bn]\,, 3\,[az + bl]) &= (ax + bm, 2\,[ay + bn]\,, 3\,[az + bl]) \end{aligned}$$

  - $\mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\} = (z, y, x) \rightarrow$

    $$\begin{aligned} \mathbf{T}\left\{a\,(x, y, z) + b\,(m, n, l)\right\} &= a\mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\} + b\mathbf{T}\left\{(m, n, l)\right\} \\ \mathbf{T}\left\{(ax + bm, ay + bn, az + bl)\right\} &= a\,(z, y, x) + b\,(l, n, m) \\ (az + bl, ay + bn, ax + bm) &= (az + bl, ay + bn, ax + bm) \end{aligned}$$

- Cosas tan sencillas como multiplicación por un escalar es una transformación (u operador) lineal $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ tal que

  $$\mathbf{T}\,|\mathbf{v}\rangle = \left|\mathbf{v}'\right\rangle = \alpha\,|\mathbf{v}\rangle$$

  Claramente,

  $$\mathbf{T}\left[a\,|\mathbf{v}\rangle + b\,|\mathbf{w}\rangle\right] = a\mathbf{T}\,|\mathbf{v}\rangle + b\mathbf{T}\,|\mathbf{w}\rangle = a\alpha\,|\mathbf{v}\rangle + b\alpha\,|\mathbf{w}\rangle$$

  Obviamente, si $\alpha = 1$ tenemos la transformación identidad que transforma todo vector en sí mismo; si $\alpha = 0$ tendremos la transformación cero, vale decir que lleva a todo $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$ a al elemento cero $|\mathbf{0}\rangle$

- La definición de producto interno también puede ser vista como una transformación (operador) lineal $\mathbf{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$

  $$\mathbf{T}\,|\mathbf{v}\rangle = \alpha \rightleftharpoons \langle\mathbf{a}\,|\mathbf{v}\rangle \equiv \alpha$$

Otra vez:

$$\mathbf{T}\left[a\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] = \left\langle \mathbf{a}\right|\left[a\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] = a\left\langle \mathbf{a}\left|\mathbf{v}\right.\right\rangle + b\left\langle \mathbf{a}\left|\mathbf{w}\right.\right\rangle$$

por lo tanto es lineal. Esto implica que también la proyección de un determinado $\left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}$ sobre un subespacio $\mathbf{S}$ es un operador lineal, y lo denotaremos como

$$\left[\left|\mathbf{s}\right\rangle\left\langle \mathbf{s}\right|\right]\ \left|\mathbf{v}\right\rangle = \left\langle \mathbf{s}\left|\mathbf{v}\right.\right\rangle\left|\mathbf{s}\right\rangle = \left|\mathbf{v}_s\right\rangle \qquad \text{con } \left|\mathbf{s}\right\rangle \text{ y } \left|\mathbf{v}_s\right\rangle \in \mathbf{S}$$

esta idea se extiende fácil si para un proyector $\mathbf{T}: \mathbf{V}_m \rightarrow \mathbf{S}_n$ con $m > n$ de tal modo que para un vector $\left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}_m$

$$\mathbf{P}_m\left|\mathbf{v}\right\rangle \equiv \left(\left|\mathbf{u}_i\right\rangle\left\langle \mathbf{u}^i\right|_m\right)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^i\left|\mathbf{v}\right.\right\rangle_m\left|\mathbf{u}_i\right\rangle = \left|\mathbf{v}_m\right\rangle$$

con $\left\{\left\langle \mathbf{u}_i\right|\right\}$ base de $\mathbf{S}_n$.Es claro que estamos utilizando la convención de Einstein para la suma de ínidices

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales. Esto es, considere una transformación lineal $\mathbf{T}: \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_m$ Por lo tanto asociaremos

$$\left|\mathbf{y}\right\rangle = \mathbf{T}\left|\mathbf{x}\right\rangle \rightarrow \qquad \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbf{T}\left\{\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right\}$$

a través de $n \times m$ números, $a^i_j$, organizados de la siguiente forma

$$y^i = a^i_j\ x^j \qquad \text{con } \left\{\begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{array}\right.$$

una vez más,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\left[\alpha\left|\mathbf{v}\right\rangle + \beta\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] &= \mathbf{T}\left\{\alpha\left(v^1, v^2, v^3, \cdots, v^n\right) + \beta\left(w^1, w^2, w^3, \cdots, w^n\right)\right\} = \alpha a^i_j\ v^j + \beta a^i_j\ w^j \\ &= \mathbf{T}\left\{\left(\alpha v^1 + \beta w^1, \alpha v^2 + \beta w^2, \alpha v^3 + \beta w^3, \cdots, \alpha v^n + \beta w^n\right)\right\} \\ &= a^i_j\ \left(\alpha v + \beta w\right)^j = \alpha a^i_j\ v^j + \beta a^i_j\ w^j = a^i_j\left(\alpha v^j + \beta w^j\right)\end{aligned}$$

Como siempre estamos utilzando la convención de suma de Einstein

- La derivada es un operador lineal. Así podemos representar el operador lineal diferenciación como

$$\left|\mathbf{v}'\right\rangle = \mathbf{T}\left|\mathbf{v}\right\rangle \rightarrow \qquad \left|\mathbf{y}'\right\rangle = \mathrm{D}\left|\mathbf{y}\right\rangle \rightarrow \qquad \mathrm{D}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \frac{\mathrm{d}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x} \equiv y'\left(x\right)$$

es claro que

$$\mathrm{D}\left[\alpha f\left(x\right) + \beta g\left(x\right)\right] = \alpha \mathrm{D}f\left(x\right) + \beta \mathrm{D}g\left(x\right) \equiv \alpha f'\left(x\right) + \beta g'\left(x\right)$$

igualmente podemos asociar un operador diferencial de cualquier orden a una derivada del mismo orden, esto es

$$\begin{array}{lcl} \left|\mathbf{y}''\right\rangle = \mathrm{D}^2 \left|\mathbf{y}\right\rangle & \rightarrow & \mathrm{D}^2 \left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^2 y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^2} \equiv y''\left(x\right) \\ \left|\mathbf{y}'''\right\rangle = \mathrm{D}^3 \left|\mathbf{y}\right\rangle & \rightarrow & \mathrm{D}^3 \left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^3 y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^3} \equiv y'''\left(x\right) \\ \vdots & & \\ \left|\mathbf{y}^{(n)}\right\rangle = \mathrm{D}^n \left|\mathbf{y}\right\rangle & \rightarrow & \mathrm{D}^n \left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^n y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^n} \equiv y^{(n)}\left(x\right) \end{array}$$

- Igualmente, cualquier ecuación diferencial lineal es un ejemplo de operador lineal, recordamos el ejemplo del tema de transformadas integrales. Esto es

$$y'' - 3\ y' + 2\ y = \left(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2\right) y\left(x\right)$$

es claro que si $y\left(x\right) = \alpha f\left(x\right) + g\left(x\right)$ la linealidad es evidente

$$\begin{array}{c} \left(\alpha f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)'' - 3\ \left(\alpha f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)' + 2\ \left(\alpha f\left(x\right) + g\left(x\right)\right) = \alpha\left(f'' - 3\ f' + 2\ f\right) + g'' - 3\ g' + 2\ g \\ \uparrow\downarrow \\ \left(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2\right)\left(\alpha f\left(x\right) + g\left(x\right)\right) = \left(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2\right)\alpha f\left(x\right) + \left(\mathrm{D}^2 - 3\mathrm{D} + 2\right) g\left(x\right) \end{array}$$

- La integral también es un operador lineal

$$g\left(x\right) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\left\{f(t)\right\}$$

- Otro ejemplo típico son los operadores de transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}\left(s,t\right)\ f(t)\mathrm{d}t \quad \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\left\{f(t)\right\}$$

donde $\mathcal{K}\left(s,t\right)$ es una función conocida de $s$ y $t$, denominada el *núcleo* de la transformación. Si $a$ y $b$ son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita.
Así si $f(t) = \alpha f_1(t) + f_2(t)$ con $f_1(t)$ y $f_2(t) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ es obvio que

$$\begin{array}{l} F(s) = \displaystyle\int_a^b \mathcal{K}\left(s,t\right)\ \left[\alpha f_1(t) + f_2(t)\right]\mathrm{d}t \quad \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\left\{\left[\alpha f_1(t) + f_2(t)\right]\right\} \\ F(s) = \alpha \displaystyle\int_a^b \mathcal{K}\left(s,t\right)\ f_1(t)\mathrm{d}t + \int_a^b \mathcal{K}\left(s,t\right)\ f_2(t)\mathrm{d}t \\ \quad\Downarrow \\ F(s) = \alpha F(s_1) + F(s_2) \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\left\{\left[\alpha f_1(t) + f_2(t)\right]\right\} = \alpha\mathbf{T}\left\{f_1(t)\right\} + \mathbf{T}\left\{f_2(t)\right\} \end{array}$$

Dependiendo de la selección del núcleo y los limites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son:

| **Nombre** | $F(s) = \mathbf{T}\{f(t)\}$ | $f(t) = \mathbf{T}^{-1}\{F(s)\}$ |
|---|---|---|
| Laplace | $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$ |
| Fourier de senos y cosenos | $F(s) = \int_0^\infty \begin{array}{c} sen(st) \\ \cos(st) \end{array} f(t)\mathrm{d}t$ | $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \begin{array}{c} sen(ts) \\ \cos(ts) \end{array} F(s)\mathrm{d}s$ |
| Fourier compleja | $F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\ st} f(t)\mathrm{d}t$ | $f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-i\ st} F(s)\mathrm{d}s$ |
| Hankel | $F(s) = \int_0^\infty tJ_n(st)f(t)\mathrm{d}t$ | $f(t) = \int_0^\infty sJ_n(ts)F(s)\mathrm{d}s$ |
| Mellin | $F(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\ f(t)\mathrm{d}t$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} s^{-t}\ F(s)\mathrm{d}s$ |

## 1.1. Espacio Vectorial de Operadores Lineales

Un conjunto de operadores lineales $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\cdots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ puede constituir un espacio vectorial lineal si se dispone entre ellos de la operación suma y la multiplicación por un escalar. Así, claramente, dado $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\cdots\}$ ,y definida

$$(\chi\mathbf{A} + \mathbf{B})\left|\mathbf{v}\right\rangle \equiv \chi\mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle + \mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle \qquad \ni \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right] = \alpha\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle \\ \\ \mathbf{B}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right] = \alpha\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle \end{array} \right.$$

es directo comprobar que

$$\begin{aligned} (\chi\mathbf{A} + \mathbf{B})\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right] &= \chi\mathbf{A}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right] + \mathbf{B}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right] \\ &= \chi\left(\alpha\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right) + \alpha\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle \\ &= \chi\left(\alpha\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \alpha\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle\right) + \beta\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle + \beta\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle \\ &\Downarrow \\ (\chi\mathbf{A} + \mathbf{B})\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right] &= \chi\mathbf{A}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right] + \mathbf{B}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle + \beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right] \end{aligned}$$

Igualmente, se cumple que

$$\left[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}\right] = \left[\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\right]$$

con $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ lineales en $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} \left[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})\left|\mathbf{v}\right\rangle + \mathbf{C}\left|\mathbf{v}\right\rangle \qquad \forall \quad \left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \\ &= \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle + \mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle + \mathbf{C}\left|\mathbf{v}\right\rangle \\ &= \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\left|\mathbf{v}\right\rangle \\ &= \left[\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle \end{aligned}$$

del mismo modo se puede comprobar fácilmente

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

Ahora bien, si definimos la transformación cero de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ tal que

$$|\mathbf{0}\rangle = 0\,|\mathbf{v}\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$$

se le asigna a el vector $|\mathbf{0}\rangle \in \mathbf{V}_2 \ \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$, entonces el operador lineal 0 será el elemento neutro respecto a la suma de operadores. Finalmente, el elemento simétrico queda definido por

$$(-\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle = -\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle \qquad \Longrightarrow (\mathbf{A}-\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle = 0\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$$

Con ello queda demostrado que los operadores lineales forman un espacio vectorial el cual de ahora en adelante denominaremos $\mathcal{L}\left(\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2\right)$.

## 1.2. Composición de Operadores Lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se denotará $\mathbf{AB}$ y significará que primero se aplica $\mathbf{B}$ y al resultado se aplica $\mathbf{A}$. Esto es

$$\mathbf{AB}\,|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{A}\left(\mathbf{B}\,|\mathbf{v}\rangle\right) = \mathbf{A}\,|\tilde{\mathbf{v}}\rangle = \left|\tilde{\mathbf{v}}'\right\rangle$$

La composición de funciones cumple con las siguientes propiedades

$$\begin{gathered}(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{BC})\,; \qquad \alpha\,(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,(\alpha\mathbf{B})\,; \\ (\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\,\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}+\mathbf{A}_2\mathbf{B}; \qquad \mathbf{A}\,(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2) = \mathbf{AB}_1+\mathbf{AB}_2\end{gathered}$$

Es decir, que la composición de operadores es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por escalares.

Por otro lado si 1 es el operador Identidad

$$\mathbf{1}\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \Longrightarrow \qquad \mathbf{A1} = \mathbf{1A} = \mathbf{A};$$

En general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$,por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB}-\mathbf{BA} \qquad \ni \quad [\mathbf{AB}-\mathbf{BA}]\,|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{AB}\,|\mathbf{v}\rangle - \mathbf{BA}\,|\mathbf{v}\rangle$$

Es inmediato comprobar algunas de las propiedades más útiles de los conmutadores:

$$\begin{aligned}[\mathbf{A},\mathbf{B}] &= -\,[\mathbf{B},\mathbf{A}] \\ [\mathbf{A},(\mathbf{B}+\mathbf{C})] &= [\mathbf{A},\mathbf{B}]+[\mathbf{A},\mathbf{C}] \\ [\mathbf{A},\mathbf{BC}] &= [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{C}+\mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}] \\ 0 &= [\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]]+[\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]]+[\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]\end{aligned}$$

Dados dos vectores $|\mathbf{v_1}\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ definiremos como el elemento de matriz del operador $\mathbf{A}$ al producto interno de dos vectores

$$\langle\mathbf{v}_2|\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v_1}\rangle) \equiv A_{(|\mathbf{v_1}\rangle,|\mathbf{v_2}\rangle)}$$

es claro que $A_{(|\mathbf{v_1}\rangle,|\mathbf{v_2}\rangle)}$ será en general un número complejo.

**Ejemplos**

- **Potencias de Operadores**: Uno de los ejemplos más útiles en la composición de operadores lo constituyen las potencias de los operadores, las cuales provienen de la aplicación consecutiva de un mismo operador,

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{1}; \qquad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}; \qquad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}; \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{A}; \qquad \cdots$$

  Es claro que las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números

$$\mathbf{A}^{n+m} = \mathbf{A}^n\mathbf{A}^m; \qquad (\mathbf{A}^n)^m = \mathbf{A}^{nm}$$

  Llamaremos *operadores nilpotentes de grado* $n$ a los operadores $\mathbf{A}^n \neq 0$, del tipo $\mathbf{A}^n |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \; \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$ al vector nulo, $|\mathbf{0}\rangle \in \mathbf{V}_2$. Es decir un operador que lleva cualquier vector $|\mathbf{v}\rangle$ al elemento neutro de $\mathbf{V}_2$. El ejemplo más emblemático es el operador diferencial

$$\mathbf{D}^n \left|\mathbf{P}^{n-1}\right\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} P_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[a_i x^i\right] = 0$$

  con $\left|\mathbf{P}^{n-1}\right\rangle$ perteneciente al espacio de polinomios de grado $n-1$

- **Operador Ecuaciones Diferenciales.** Si consideramos el espacio de funciones $f(x) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ podemos construir un operador diferencial

$$\left[a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 + \cdots + a_n\mathbf{D}^n\right]|\mathbf{f}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \left(a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\right) f(x)$$

  con $\{a_0, a_1, a_2, \cdots a_n\}$ coeficientes constantes. De este modo

$$\left(\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 2\right) y = (\mathbf{D}-1)(\mathbf{D}-2)\, y \qquad \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2\right) y\,(x) = y'' - 3\; y' + 2\; y$$

  con $r=1$ y $r=2$ las raíces del polinomio característico

- **Funciones de Operadores**: Basándonos en el primero de los ejemplos se puede construir un “polinomio” en potencias de los operadores:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = a_i x^i \quad \Longrightarrow$$
$$P_n(\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle = \left[a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{A} + a_2^2\mathbf{A} + \cdots + a_n^n\mathbf{A}^n\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[a_i\mathbf{A}^i\right]|\mathbf{v}\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$$

  Más aún, lo anterior nos permite extender la idea operadores a funciones de operadores, es decir si nos saltamos todos los detalles de convergencia de la serie anterior, los cuales dependerán de los autovalores de $\mathbf{A}$ y de su radio de convergencia, de esta manera, al igual que podemos expresar cualquier función $F(z)$ como una serie de potencias de $z$ en un cierto dominio, podremos expresar la función de un operador, $F(\mathbf{A})$, como una serie de potencias del operador $\mathbf{A}$ esto es

$$F(z) = a_i x^i \quad \leftrightarrows \quad F(\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle = \left[a_i\mathbf{A}^i\right]|\mathbf{v}\rangle$$

Así, por ejemplo, podemos expresar

$$e^{\mathbf{A}} |\mathbf{v}\rangle = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right] |\mathbf{v}\rangle = \left[ \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \cdots \right] |\mathbf{v}\rangle$$

En este caso hay que hacer una acotación, dado que, en general, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0 \Longrightarrow e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ esta afirmación se corrobora de manera inmediata al desarrollar las exponenciales

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} |\mathbf{v}\rangle = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right] \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^m}{m!} \right] |\mathbf{v}\rangle = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \frac{\mathbf{B}^m}{m!} \right] |\mathbf{v}\rangle$$

$$e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} |\mathbf{v}\rangle = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^n}{n!} \right] \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^m}{m!} \right] |\mathbf{v}\rangle = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^n}{n!} \frac{\mathbf{A}^m}{m!} \right] |\mathbf{v}\rangle$$

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} |\mathbf{v}\rangle = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n}{n!} \right] |\mathbf{v}\rangle$$

sólo en el caso que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0 \Longrightarrow e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, la demostración es inmediata pero requiere expandir y rearreglar las sumatorias arriba expuestas. En general más adelante demostraremos la relación de Glauber

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$

## 1.3. Proyectores

La notación de Dirac se hace particularmente conveniente para representar proyectores. Hasta ahora, hemos relacionado un funcional lineal, un *bra* $\langle \mathbf{w}|$ del espacio dual $\mathbf{V}^*$, con un vector *ket* $|\mathbf{v}\rangle$ del espacio vectorial $\mathbf{V}$ a través de su producto interno $\langle \mathbf{w}| \mathbf{v}\rangle \in \mathbf{C}$ el cual es, en general, un número complejo. Si ahora escribimos esta relación entre vectores y formas diferenciales de una manera diferente. Así, la relación entre $\langle \mathbf{w}|$, y $|\mathbf{v}\rangle$ un *ket* $|\mathbf{\Psi}\rangle$ o un *bra* $\langle \mathbf{\Phi}|$ arbitrarios serán

$$|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}| \qquad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}| \mathbf{\Psi}\rangle \\ \\ \langle \mathbf{\Phi} |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}| \end{array} \right.$$

La primera será la multiplicación del vector $|\mathbf{v}\rangle$ por el número complejo $\langle \mathbf{w}| \mathbf{\Psi}\rangle$ ,mientras que la segunda relación será la multiplicación de la forma $\langle \mathbf{w}|$ por el complejo $\langle \mathbf{\Phi} |\mathbf{v}\rangle$ . Es imperioso señalar que el orden en la escritura de los vectores y formas es crítico, sólo los números complejos $\lambda$ se pueden mover con impunidad a través de estas relaciones

$$\lambda |\mathbf{v}\rangle = |\lambda \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \lambda, \qquad \lambda \langle \mathbf{w}| = \langle \lambda \mathbf{w}| = \langle \mathbf{w}| \lambda$$

$$\langle \mathbf{w}| \lambda |\mathbf{v}\rangle = \lambda \langle \mathbf{w}| \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}| \mathbf{v}\rangle \lambda \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A} |\lambda \mathbf{v}\rangle = \mathbf{A}\lambda |\mathbf{v}\rangle = \lambda \mathbf{A} |\mathbf{v}\rangle$$

Por lo tanto, dado un vector $|\mathbf{v}\rangle$, podemos construir un proyector $\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}$ a lo largo del vector $|\mathbf{v}\rangle$

$$\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} \equiv |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}| \qquad \text{con } \langle \mathbf{v}|\ \mathbf{v}\rangle = 1$$

siempre y cuando este operador lineal cumpla

$$\begin{array}{c} \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} \left[\alpha\ \ |\mathbf{z_1}\rangle + \beta\ \ |\mathbf{z}_2\rangle\right] = \alpha\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} |\mathbf{z_1}\rangle + \beta\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} |\mathbf{z}_2\rangle \qquad \Longrightarrow \\ |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}| \left[\alpha\ \ |\mathbf{z_1}\rangle + \beta\ \ |\mathbf{z}_2\rangle\right] = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|\, \alpha\ \ |\mathbf{z_1}\rangle + |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|\, \beta\ \ |\mathbf{z}_2\rangle = \alpha\ \ |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}\ |\mathbf{z_1}\rangle + \beta\ \ |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}\ |\mathbf{z}_2\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{P}^2_{|\mathbf{v}\rangle} = \ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|)\,(|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|) = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}| \qquad \Longrightarrow \\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} |\mathbf{z}\rangle = (|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|)\,(|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|)\,|\mathbf{z}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \underbrace{\langle \mathbf{v}\ |\mathbf{v}\rangle}_{1} \langle \mathbf{v}\ |\mathbf{z}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}\ |\mathbf{z}\rangle = \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} |\mathbf{z}\rangle \end{array}$$

Así el operador $\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}$ actuando sobre el vector $|\boldsymbol{\Psi}\rangle$ representará la proyección de $|\boldsymbol{\Psi}\rangle$ a lo largo de $|\mathbf{v}\rangle$

$$\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\ \ |\boldsymbol{\Psi}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|\ \boldsymbol{\Psi}\rangle \equiv \langle \mathbf{v}|\ \boldsymbol{\Psi}\rangle\, |\mathbf{v}\rangle$$

Es inmediato construir un proyector de un vector sobre un subespacio $\mathbf{S}_q$.
Sea $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots,|\mathbf{e}_q\rangle\}$ un conjunto ortonormal de vectores que expande $\mathbf{S}_q$. Por lo tanto definiremos el proyector $\mathbf{P}_q$ al proyector sobre el subespacio $\mathbf{S}_q$ de la forma

$$\mathbf{P}_q = |\mathbf{e}_i\rangle \left\langle \mathbf{e}^i\right|_q$$

es claro que $\mathbf{P}^2_q = \ \mathbf{P}_q$

$$\mathbf{P}^2_q\,|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{P}_q\mathbf{P}_q\,|\mathbf{v}\rangle \Longrightarrow \mathbf{P}^2_q\,|\mathbf{v}\rangle = \left(|\mathbf{e}_i\rangle \left\langle \mathbf{e}^i\right|_q\right)\left(|\mathbf{e}_j\rangle \left\langle \mathbf{e}^j\right|_q\right)|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{e}_i\rangle \underbrace{\left\langle \mathbf{e}^i\ |\mathbf{e}_j\right\rangle}_{\delta^i_j} \left\langle \mathbf{e}^j\ |\mathbf{v}\right\rangle$$

$$\mathbf{P}^2_q\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{e}_j\rangle \left\langle \mathbf{e}^j\ |\mathbf{v}\right\rangle \equiv \mathbf{P}_q\,|\mathbf{v}\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$$

## 1.4. Espacio Nulo e Imagen

El conjunto de todos los $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \ni \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbf{A}$ y lo denotaremos como $\aleph\,(\mathbf{A})$, en símbolos diremos que

$$\aleph\,(\mathbf{A}) = \{|\mathbf{v}\rangle \mid |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle\}$$

Adicionalmente, $\aleph\,(\mathbf{A}) \subset \mathbf{V}_1$ será un subespacio de $\mathbf{V}_1$. La prueba de esta afirmación es inmediata. Dados $|\mathbf{v}_1\rangle\,,|\mathbf{v}_2\rangle \in \aleph\,(\mathbf{A})$ ,con $\mathbf{A}$ un operador lineal, es claro que

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{0}\rangle \\ \\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{0}\rangle \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \alpha_1\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_1\rangle + \alpha_2\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{0}\rangle = \ \mathbf{A}\,(\alpha_1\ \ |\mathbf{v}_1\rangle + \alpha_2\ \ |\mathbf{v}_2\rangle)$$

por la misma razón se tiene que el elemento neutro contenido en $\aleph(\mathbf{A})$ ,esto es

$$\mathbf{A}\left|\alpha\ \mathbf{v}\right\rangle = \left|\mathbf{0}\right\rangle \quad \forall \left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \forall\alpha \qquad \therefore\ \mathbf{A}\left|\mathbf{0}\right\rangle = \left|\mathbf{0}\right\rangle \qquad \text{si} \quad \alpha = 0$$

por lo tanto, queda demostrado que $\aleph(\mathbf{A})$ es un subespacio de $\mathbf{V}_1$ .

Definiremos imagen (rango o recorrido) de $\mathbf{A}$,y la denotaremos como

$$\Im(\mathbf{A}) = \left\{\left|\mathbf{v}'\right\rangle \mid \left|\mathbf{v}'\right\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left|\mathbf{v}'\right\rangle\right\}$$

igualmente $\Im(\mathbf{A}) \subset \mathbf{V}_2$ también será un subespacio de $\mathbf{V}_2$ ya que si $\left|\mathbf{v}\right\rangle = \alpha_1\ \left|\mathbf{v}_1\right\rangle + \alpha_2\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle$ y dado que $\mathbf{A}$ es un operador lineal, se cumple que

$$\mathbf{A}\left(\underbrace{\alpha_1\ \left|\mathbf{v}_1\right\rangle + \alpha_2\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle}_{\left|\mathbf{v}\right\rangle}\right) = \alpha_1\ \underbrace{\mathbf{A}\left|\mathbf{v}_1\right\rangle}_{\left|\mathbf{v}'_1\right\rangle} + \alpha_2\ \underbrace{\mathbf{A}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle}_{\left|\mathbf{v}'_2\right\rangle} = \underbrace{\alpha_1\ \left|\mathbf{v}'_1\right\rangle + \alpha_2\ \left|\mathbf{v}'_2\right\rangle}_{\left|\mathbf{v}'\right\rangle}$$

Es claro que si $\mathbf{V}$ de dimensión finita, $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\} = n$ también será de dimensión finita $n$ y tendremos que

$$\dim\left[\aleph(\mathbf{A})\right] + \dim\left[\Im(\mathbf{A})\right] = \dim\left[\mathbf{V}\right]$$

vale decir que la dimensión del núcleo más la dimensión del recorrido o imagen de una transformación lineal es igual a la dimensión del dominio.

Para demostrar esta afirmación supongamos que $\dim[\mathbf{V}] = n$ y que $\{\left|\mathbf{e}_1\right\rangle,\ \left|\mathbf{e}_2\right\rangle,\ \left|\mathbf{e}_3\right\rangle \cdots \left|\mathbf{e}_k\right\rangle\} \in \mathbf{V}$ es una base de $\aleph(\mathbf{A})$, donde $k = \dim\left[\aleph(\mathbf{A})\right] \leq n$.
Como $\{\left|\mathbf{e}_1\right\rangle,\ \left|\mathbf{e}_2\right\rangle,\ \left|\mathbf{e}_3\right\rangle \cdots \left|\mathbf{e}_k\right\rangle\} \in \mathbf{V}$ estos elementos formán base y por lo tanto son linealmente independientes, necesariamente ellos formarán parte de una base mayor de $\mathbf{V}$.
Esto es $\{\left|\mathbf{e}_1\right\rangle,\ \left|\mathbf{e}_2\right\rangle,\ \left|\mathbf{e}_3\right\rangle, \cdots, \left|\mathbf{e}_k\right\rangle, \left|\mathbf{e}_{k+1}\right\rangle, \cdots, \left|\mathbf{e}_{k+r-1}\right\rangle, \left|\mathbf{e}_{k+r}\right\rangle\} \in \mathbf{V}$ será una base de $\mathbf{V}$ donde $k + r = n$

Es esquema de la demostración será:

- primero probaremos que $\{\mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+1}\right\rangle\}, \mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+2}\right\rangle\}, \cdots, \mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+r-1}\right\rangle\}, \mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+r}\right\rangle\}\}$ forman una base para $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}$
- luego demostraremos que $\dim[\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}] = r$ y como hemos supuesto que $k + r = n$ habremos demostrado la afirmación anterior.

Si los $r$ elementos $\{\mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+1}\right\rangle\}, \mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+2}\right\rangle\}, \cdots, \mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+r-1}\right\rangle\}, \mathbf{A}\{\left|\mathbf{e}_{k+r}\right\rangle\}\}$ expanden $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}$ entonces cualquier elemento

$$\left|\mathbf{w}\right\rangle \in \mathbf{A}\{\mathbf{V}\} \ni \left|\mathbf{w}\right\rangle = \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle = C^i\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_i\right\rangle \qquad \text{con}\ \left|\mathbf{A}\mathbf{e}_i\right\rangle = \mathbf{A}\left|\mathbf{e}_i\right\rangle$$

Ahora bien, analicemos con cuidado los límites de la suma implícita del índice $i = 1, 2, \cdots, k + r$

$$\left|\mathbf{w}\right\rangle = C^i\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_i\right\rangle = \underbrace{C^1\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_1\right\rangle + C^2\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_2\right\rangle + \cdots + C^k\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_k\right\rangle}_{=\left|\mathbf{0}\right\rangle \qquad \text{ya que } \mathbf{A}\left|\mathbf{e}_1\right\rangle = \mathbf{A}\left|\mathbf{e}_2\right\rangle = \mathbf{A}\left|\mathbf{e}_3\right\rangle \cdots = \mathbf{A}\left|\mathbf{e}_k\right\rangle = \left|\mathbf{0}\right\rangle} + C^{k+1}\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_{k+1}\right\rangle + \cdots + C^{k+r}\left|\mathbf{A}\mathbf{e}_{k+r}\right\rangle$$

Por lo tanto $\{\mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+2}\rangle\}, \cdots, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}$. Ahora bien, para demostrar que son base, demostraremos que son linealmente independientes, para ello supondremos que

$$\exists \quad \left\{C^{k+1}, C^{k+2}, \cdots, C^{k+r}\right\} \ni C^i |\mathbf{A}\mathbf{e}_i\rangle = 0 \qquad \text{con } i = k+1, k+2, \cdots, k+r$$

y ttenemos que demostrar que $C^{k+1} = C^{k+2} = \cdots = C^{k+r} = 0$. Entonces

$$C^i |\mathbf{A}\mathbf{e}_i\rangle = C^i \mathbf{A} |\mathbf{e}_i\rangle = \mathbf{A}\left(C^i |\mathbf{e}_i\rangle\right) = 0 \qquad \text{con } i = k+1, k+2, \cdots, k+r$$

por lo tanto el elemento $|\mathbf{v}\rangle = C^i |\mathbf{e}_i\rangle \in \aleph(\mathbf{A}) \qquad \text{con } i = k+1, k+2, \cdots, k+r$. Con lo cual dado que $\forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \aleph(\mathbf{A}), |\mathbf{v}\rangle = C^i |\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, \cdots, r$, entonces se puede hacer la siguiente resta

$$|\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{k} C^i |\mathbf{e}_i\rangle - \sum_{i=k+1}^{k+r} C^i |\mathbf{e}_i\rangle$$

y como los $\{|\mathbf{e}_1\rangle, \ |\mathbf{e}_2\rangle, \ |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_k\rangle, |\mathbf{e}_{k+1}\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle, |\mathbf{e}_{k+r}\rangle\}$ son una base de $\mathbf{V}$ entonces las $C^{k+1} = C^{k+2} = \cdots = C^{k+r} = 0$

**Ejemplos**

- **Transformaciones Identidad**: Sea $\mathbf{1}: \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ , la transformación identidad,

$$\forall |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \ni \mathbf{1}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle. \qquad \Rightarrow \aleph(\mathbf{1}) = |\mathbf{0}\rangle \subset \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \Im(\mathbf{1}) \equiv \mathbf{V}_1$$

- **Sistemas de lineales de Ecuaciones.** En $\mathbf{V}^n$ los sistemas de ecuaciones lineales representan el espacio nulo,$\aleph(\mathbf{A})$, para vectores de $\mathbf{V}^n$

$$\mathbf{A}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrows A^i_j x_i = 0$$

  son $j$ ecuaciones con $j = 1, 2, \cdots, n$. Recordemos que estamos utilizando la convención de Einstein para suma de índices. Esto es $\sum_{i=1}^{n} A^i_j x_i = 0$

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias.** Sea $\mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]}$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas doblemente diferenciables. Definimos $\mathbf{A}:\mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]} \longrightarrow \mathcal{C}_{[-\infty,\infty]}$ como la transformación lineal $\left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{1}\right)$ tal que para todas las $y(x) \in \mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]}$ se cumple

$$\mathbf{A}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{1}\right) y(x) = 0 \quad \leftrightarrows \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1\right) y(x) = y'' - y = 0$$

  por lo tanto el núcleo o espacio nulo de $\mathbf{A}$,$\aleph(\mathbf{A})$ lo constituyen el conjunto de soluciones para la mencionada ecuación diferencial. Por lo tanto el problema de encontrar las soluciones de la ecuación diferencial es equivalente a encontrar los elementos del núcleo de $\mathbf{A}$.

## 1.5. Operadores Biyectivos e Inversos

Se dice que $\mathbf{A}:\mathbf{V}_1\rightarrow\mathbf{V}_2$ es biyectivo (uno a uno o biunívoco) si dados $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \quad \wedge \quad |\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que

$$\mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{v}'\rangle \quad \wedge \quad \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{v}'\rangle \qquad \Longrightarrow |\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{v}_2\rangle$$

es decir será biyectiva si $\mathbf{A}$ transforma vectores distintos de $\mathbf{V}_1$ en vectores distintos de $\mathbf{V}_2$. Más aún, se puede afirmar que una transformación lineal $\mathbf{A}$, será biyectiva si y sólo si $\aleph(\mathbf{A}) = |\mathbf{0}\rangle$. Vale decir, si el subespacio nulo está constituido, únicamente por el elemento neutro del espacio vectorial. La demostración es sencilla. Supongamos que $\mathbf{A}$ es biyectiva y que $\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ ,entonces $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ ,es decir, $\mathbf{A}|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$, por consiguiente $\aleph(\mathbf{A}) = |\mathbf{0}\rangle$. Recíprocamente, si

$$\left.\begin{array}{c} \aleph(\mathbf{A}) = |\mathbf{0}\rangle \\ \wedge \\ \mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle - \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{0}\rangle = \mathbf{A}\left(\underbrace{|\mathbf{v}_1\rangle - |\mathbf{v}_2\rangle}_{|\mathbf{v}_1\rangle - |\mathbf{v}_2\rangle = 0}\right) \Longrightarrow |\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{v}_2\rangle$$

La importancia de las transformaciones lineales uno a uno o biyectiva reside en la posibilidad de definir inversa, debido a que siempre existe en $\mathbf{V}_2$ un vector $|\mathbf{v}'\rangle$ asociado a través de $\mathbf{A}$ con un vector $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$. Diremos que $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{V}_2\rightarrow\mathbf{V}_1$ es el inverso de $\mathbf{A}$, si $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$.

Podemos afirmar que un operador lineal $\mathbf{A}$ tendrá inverso $\mathbf{A}^{-1}$ si a cada vector $|\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2$

Habría que hacer un par de comentarios al respecto. El primero es que, tal y como hemos enfatizado arriba, en general, los operadores no conmutan entre si, y los inversos no son una excepción. Es decir, debieran existir (y de hecho existen) inversas por la izquierda $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ e inversas por la derecha $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$. Por simplicidad e importancia en Física obviaremos esta dicotomía y supondremos que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$. El segundo comentario tiene que ver con la existencia y unicidad del inverso de un operador lineal. Algunos operadores tienen inverso, otros no, pero aquellos quienes tienen inverso, ese inverso es único. Veamos, supongamos que

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \\ \wedge \\ \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle - \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle = \underbrace{\left(\mathbf{A}_1^{-1} - \mathbf{A}_2^{-1}\right)}_{\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1}}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle \Longrightarrow \mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1}$$

Ahora bien, un operador lineal $\mathbf{A}$ tendrá inverso sí y sólo sí para cada vector $|\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \exists!$ $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \ni \mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$. Es decir cada vector $|\mathbf{v}'\rangle$ está asociado con uno y sólo un vector $|\mathbf{v}\rangle$ a través de la transformación lineal $\mathbf{A}$. Dejaremos sin demostración esta afirmación pero lo importante es recalcar que para que exista inverso la transformación lineal $\mathbf{A}$,tiene que ser biyectiva y esto implica que se asocia uno y solo un vector de $\mathbf{V}_1$ con otro de $\mathbf{V}_2$.

Todavía podemos añadir algunas demostraciones consecuencias de las afirmaciones anteriores. Sea la transformación lineal $\mathbf{T}:\mathbf{V}_1\rightarrow\mathbf{V}_2$ supongamos además que $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ Entonces las siguientes afirmaciones son válidas y equivalentes

1. $\mathbf{T}$ es Biyectiva en $\mathbf{V}_1$
2. $\mathbf{T}$ es invertible y su inversa $\mathbf{T}^{-1}:\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\} \rightarrow \mathbf{V}_1$ es lineal

3. $\forall \ |v\rangle \in \mathbf{V}_1, \mathbf{T}\{|v\rangle\} = |0\rangle \Longrightarrow |v\rangle = |0\rangle$ esto es, el espacio nulo $\aleph(\mathbf{T})$ únicamente contiene al elemento neutro de $\mathbf{V}_1$.

Si ahora suponemos que $\mathbf{V}_1$ tiene dimensión finita, digamos $\dim[\mathbf{V}_1] = n$, las siguientes afirmaciones serán válidas y equivalentes

1. $\mathbf{T}$ es Biyectiva en $\mathbf{V}_1$
2. Si $\{|\mathbf{u}_1\rangle, \ |\mathbf{u}_2\rangle, \ |\mathbf{u}_3\rangle, \cdots |\mathbf{u}_n\rangle\} \in \mathbf{V}_1$ son linealmente independientes entonces, $\{\mathbf{T}\{|\mathbf{u}_1\rangle\}, \ \mathbf{T}\{|\mathbf{u}_2\rangle\}, \ \mathbf{T}\{|\mathbf{u}_3\rangle\}$ $\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}$ también serán linealmente independientes.
3. $\dim[\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}] = n$
4. Si $\{|\mathbf{e}_1\rangle, \ |\mathbf{e}_2\rangle, \ |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}_1$ es una base de $\mathbf{V}_1$, entonces $\{\mathbf{T}\{|\mathbf{e}_1\rangle\}, \ \mathbf{T}\{|\mathbf{e}_2\rangle\}, \ \mathbf{T}\{|\mathbf{e}_3\rangle\} \cdots \mathbf{T}\{|\mathbf{e}_n\rangle\}\} \in$ $\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}$ es una base de $\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}$

## 1.6. Operadores Hermíticos Conjugados

Definiremos la acción de un operador $\mathbf{A}$ sobre un *bra* de la forma siguiente

$$\underbrace{(\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{A})}_{\langle\mathbf{w}'|}\,|\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{w}|\,\underbrace{(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle)}_{|\mathbf{v}'\rangle}$$

por lo cual lo que estamos diciendo es que el elemento de matriz para el operador, $\mathbf{A}$, es el mismo, y no importa donde opere $\mathbf{A}$.De esta manera, dado cada vector en $\mathbf{V}$, tiene asociado un vector en $\mathbf{V}^*$ podemos demostrar que $\mathbf{A}$ operando sobre los *bra* es lineal. Esto es dado

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{w}| = \lambda_1\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2| \qquad &\Longrightarrow \\
(\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle \equiv (\lambda_1\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle &= (\lambda_1\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2|)\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle) = \lambda_1\langle\mathbf{z}_1|\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle) + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2|\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle) \\
&= \lambda_1(\langle\mathbf{z}_1|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle + \lambda_2(\langle\mathbf{z}_2|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

Siguiendo con esta lógica podemos construir la acción del operador hermítico conjugado, $\mathbf{A}^\dagger$. Para ello recordamos que igual que a cada vector (*ket*) $|\mathbf{v}\rangle$ le está asociado una forma lineal (*bra*) $\langle\mathbf{v}|$ ,a cada *ket* transformado $\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$ le corresponderá un *bra* transformado $\langle\mathbf{v}'| = \langle\mathbf{v}|\,\mathbf{A}^\dagger$. Por lo tanto

$$\begin{array}{ccc}
|\mathbf{v}\rangle & \Longleftrightarrow & \langle\mathbf{v}| \\
|\mathbf{v}'\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle & \Longleftrightarrow & \langle\mathbf{v}'| = \langle\mathbf{v}|\,\mathbf{A}^\dagger
\end{array}$$

ahora bien,si $\mathbf{A}$ es lineal, $\mathbf{A}^\dagger$ también lo será. Dado que a un vector $|\mathbf{w}\rangle = \lambda_1 \ |\mathbf{z_1}\rangle + \lambda_2 \ |\mathbf{z}_2\rangle$ le corresponde un *bra* $\langle\mathbf{w}| = \lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2|$ (la correspondencia es antilineal). Por lo tanto, $|\mathbf{w}'\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{w}\rangle = \lambda_1 \ \mathbf{A}\,|\mathbf{z_1}\rangle + \lambda_2 \ \mathbf{A}\,|\mathbf{z}_2\rangle$ , por ser $\mathbf{A}$ lineal, entonces

$$|\mathbf{w}'\rangle \Longleftrightarrow \langle\mathbf{w}'| \equiv \langle\mathbf{w}|\,\mathbf{A}^\dagger = (\lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2|)\,\mathbf{A}^\dagger \equiv \lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1'| + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2'| = \lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1|\,\mathbf{A}^\dagger + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2|\,\mathbf{A}^\dagger$$

Es claro que de la definición de producto interno en la notación de Dirac, se desprende

$$\left\langle \mathbf{x}' \right| \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}| \mathbf{x}'\rangle^* \quad \forall \ \left|\mathbf{x}'\right\rangle = \mathbf{A}\left|\mathbf{x}\right\rangle, \left|\mathbf{y}\right\rangle \in \mathbf{V} \qquad \Longrightarrow \langle \mathbf{x}| \mathbf{A}^\dagger \left|\mathbf{y}\right\rangle = \langle \mathbf{y}| \mathbf{A} \left|\mathbf{x}\right\rangle^* \quad \forall \ \left|\mathbf{x}\right\rangle, \left|\mathbf{y}\right\rangle \in \mathbf{V}$$

Igualmente se pueden deducir las propiedades de los operadores hermíticos conjugados

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^\dagger = \mathbf{A}; \qquad (\lambda \mathbf{A})^\dagger = \lambda^* \mathbf{A}^\dagger; \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger; \qquad (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$

Esta última propiedad es fácilmente demostrable y es educativa su demostración. Dado $\left|\mathbf{v}'\right\rangle = \mathbf{A}\mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle$, además se tiene que

$$\left.\begin{array}{c} \left|\bar{\mathbf{v}}\right\rangle = \mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle \\ \\ \left|\mathbf{v}'\right\rangle = \mathbf{A}\left|\bar{\mathbf{v}}\right\rangle \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \left\langle \mathbf{v}' \right| = \left\langle \bar{\mathbf{v}} \right| \mathbf{A}^\dagger = \left\langle \mathbf{v} \right| \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger = \left\langle \mathbf{v} \right| (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger$$

A partir de propiedades anteriores se deriva una más útil relacionada con el conmutador de dos operadores hermíticos

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\dagger = -\left[\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger\right] = \left[\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}^\dagger\right]$$

La conclusiones a las que llegamos son

Para obtener el hermítico conjugado de una expresión proceda de la siguiente manera:

- Cambie constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \leftrightarrows \lambda^*$
- Cambie los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $\left|\mathbf{v}\right\rangle \leftrightarrows \left\langle \mathbf{v}\right|$
- Cambie operadores lineales por sus hermíticos conjugados $\mathbf{A}^\dagger \leftrightarrows \mathbf{A}$;
- Invierta el orden de los factores

De este modo

$$\left(\left|\mathbf{v}\right\rangle \left\langle \mathbf{w}\right|\right)^\dagger = \left|\mathbf{w}\right\rangle \left\langle \mathbf{v}\right|$$

que se deduce fácilmente de la consecuencia de la definición de producto interno

$$\left\langle \mathbf{x}\right| \left(\underline{\left|\mathbf{v}\right\rangle \left\langle \mathbf{w}\right|}\right)^\dagger \left|\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \mathbf{y}\right| \left(\left|\mathbf{v}\right\rangle \left\langle \mathbf{w}\right|\right) \left|\mathbf{x}\right\rangle^* = \left\langle \mathbf{y}\right| \left|\mathbf{v}\right\rangle^* \left\langle \mathbf{w}\right| \left|\mathbf{x}\right\rangle^* = \left\langle \mathbf{x}\right| \underline{\left|\mathbf{w}\right\rangle \left\langle \mathbf{v}\right|} \left|\mathbf{y}\right\rangle$$

Existe un conjunto de operadores que se denominan Hermíticos a secas o autoadjunto. Un operador Hermítico (o autoadjunto) será aquel para el cual $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$. Con esto

$$\left\langle \mathbf{x}\right| \mathbf{A}^\dagger \left|\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \mathbf{x}\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \mathbf{y}\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{x}\right\rangle^*$$

Claramente los proyectores son autoadjuntos por construcción

$$\mathbf{P}^\dagger_{\left|\mathbf{v}\right\rangle} \equiv \left(\left|\mathbf{v}\right\rangle \left\langle \mathbf{v}\right|\right)^\dagger = \left|\mathbf{v}\right\rangle \left\langle \mathbf{v}\right|$$

### 1.7. Operadores Unitarios

Por definición un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto. Esto es

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger} \quad \Longrightarrow \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}$$

De estos operadores podemos decir varias cosas

- Las transformaciones unitarias dejan invariantes al producto interno y consecuentemente la norma de vectores. Esto se demuestra fácilmente. Dados dos vectores $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle$ sobre los cuales actua un operadore unitario

$$\left. \begin{array}{c} |\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{x}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{y}}\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{y}\rangle \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \langle \tilde{\mathbf{y}}\,|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \langle \mathbf{y}|\,\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}\,|\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{y}\,|\mathbf{x}\rangle$$

  Es claro que si $\mathbf{A}$es hermítico, $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}$, el operador $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{i\mathbf{A}}$ es unitario.

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}^{i\mathbf{A}} \quad \Longrightarrow \mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{e}^{-i\mathbf{A}^{\dagger}} = \mathbf{e}^{-i\mathbf{A}} \quad \Longrightarrow \mathbf{T}\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{e}^{i\mathbf{A}}\mathbf{e}^{-i\mathbf{A}} = \mathbf{1} = \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\mathbf{A}}\mathbf{e}^{i\mathbf{A}}$$

- El producto de dos operadores unitarios también es unitario. Esto es si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son unitarios entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}\mathbf{V})^{\dagger}(\mathbf{U}\mathbf{V}) &= \mathbf{V}^{\dagger}\underbrace{\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}}_{\mathbf{1}}\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\dagger}\mathbf{V} = \mathbf{1} \\ (\mathbf{U}\mathbf{V})(\mathbf{U}\mathbf{V})^{\dagger} &= \mathbf{U}\underbrace{\mathbf{V}\mathbf{V}^{\dagger}}_{\mathbf{1}}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

## 2. Representación Matricial de Operadores

Supongamos un operador lineal $\mathbf{A}$ en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(V,W)$ donde $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$ y sean $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle, \cdots |\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ las bases para $V$ y $W$ respectivamente. Entonces $\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle \in W$

$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = A_i^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle \qquad \text{con } i = 1,2,..,n \qquad \text{y } \alpha = 1,2,..,m$$

las $A_i^{\alpha}$ son las componentes de la expansión de $\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$ en la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle, \cdots |\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$. Para un vector genérico $|\mathbf{x}\rangle$ tendremos que

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{x}\rangle = \tilde{x}^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle \qquad \text{pero, a su vez } |\mathbf{x}\rangle = x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle$$

con lo cual

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{x}\rangle = \tilde{x}^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle = \mathbf{A}\left(x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle\right) = x^i\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = x^iA_i^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle \qquad \Longrightarrow \left(\tilde{x}^{\alpha} - x^iA_i^{\alpha}\right)|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle = 0$$

para finalmente concluir que

$$\tilde{x}^{\alpha} = A_i^{\alpha}x^i$$

Varias cosas se pueden concluir hasta este punto

1. Si acordamos que los índices de arriba indican filas podemos representar los vectores como un arreglo vertical de sus componentes

$$|\mathbf{x}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

y las cantidades

$$A_i^\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_j^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_j^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ A_1^\alpha & A_2^\alpha & & A_j^\alpha & & A_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_j^m & & A_n^m \end{pmatrix}$$

de tal modo que se cumpla

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^\alpha \\ \\ \tilde{x}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_j^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_j^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ A_1^\alpha & A_2^\alpha & & A_j^\alpha & & A_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_j^m & & A_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^j \\ \\ x^n \end{pmatrix}$$

Nótese que los índices arriba indican fila y los de abajo columnas. Las cantidades $A_j^\alpha$ es la representación del operador $\mathbf{A}$ en las bases $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle, \cdots |\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ de $V$ y $W$ respectivamente. Es decir una matriz $A_j^i$ es un arreglo de números

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix}$$

donde el superíndice, $i$, indica fila

$$\begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^n \end{pmatrix}$$

y el subíndice $j$ columna

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \end{pmatrix}$$

2. Diremos que las componentes de los vectores transforman como
$$\tilde{x}^{\alpha} = A_i^{\alpha} x^i$$

3. Si suponemos $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales
$$\tilde{x}^{\alpha} = \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{x}\rangle = \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\left(x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle\right) = x^i\,\langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$$
queda claro que $A_i^{\alpha} \equiv \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$ será la representación matricial

4. Los vectores $|\mathbf{e}_k\rangle$ transforman de la siguiente manera
$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = |\tilde{\mathbf{w}}_i\rangle = A_i^j\,|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \Longrightarrow$$
donde $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle\}$ son las bases para $V$ y $W$ respectivamente.

Definitivamente, las matrices son uno de los objetos más útiles de las Matemáticas. Ellas permiten aterrizar conceptos y calcular cantidades. La palabra matriz fue introducida en 1850 por James Joseph Sylvester[1] y su teoría desarrollada por Hamilton[2] y Cayley[3] . Si bien los físicos las consideramos indispensables, no fueron utilizadas de manera intensiva hasta el aparición de la Mecánica Cuántica alrededor de 1925.

## 2.1. Bases y Representación Matricial de Operadores

Es importante recalcar que la representación matricial de un operador depende de las bases $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ de de $V$ y $W$ respectivamente. Si tenemos otras bases ortonormal para $V$ y $W$ vale decir, $\{|\bar{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\bar{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\bar{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\bar{\mathbf{e}}_n\rangle\}$ y $\{|\breve{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\breve{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\breve{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\breve{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ su representación será distinta. Esto es
$$\langle\breve{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\bar{\mathbf{e}}_j\rangle = \tilde{A}_j^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc} \tilde{A}_1^1 & \tilde{A}_2^1 & \cdots & \tilde{A}_j^1 & \cdots & \tilde{A}_n^1 \\ \tilde{A}_1^2 & \tilde{A}_2^2 & & \tilde{A}_j^2 & & \tilde{A}_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \tilde{A}_1^{\alpha} & \tilde{A}_2^{\alpha} & & \tilde{A}_j^{\alpha} & & \tilde{A}_n^{\alpha} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \tilde{A}_1^m & \tilde{A}_2^m & & \tilde{A}_j^m & & \tilde{A}_n^m \end{array}\right)$$

[1] **James Joseph Sylvester** (1814-1897 Londres, Inglaterra). Además de sus aportes con Cayley a la Teoría de las Matrices descubrió la solución a la ecuación cúbica y fue el primero en utilizar el término discriminante para categorizar cada una de las raíces de la ecuación. Para vivir tuvo que ejercer de abogado durante una década. Por fortuna otro matemático de la época (Arthur Cayley) frecuentaba los mismos juzgados y tribunales y pudieron interactuar. Por ser judío tuvo cantidad de dificultades para conseguir trabajo en la Academia.

[2] Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865, Dublin, Irlanda) Sus contribuciones en el campo de la Optica, Dinámica del cuerpo Rígido, Teoría de ecuaciones algebráicas y Teoría de Operadores Lineales.

[3] **Arthur Cayley** (1821, Richmond, 1895, Cambridge, Inglaterra) En sus cerca de 900 trabajos cubrió casí la totalidad de las áreas de las Matemáticas de aquel entonces. Sus mayores cotribuciones se centran el la Teoría de Matrices y la Gemetría no euclideana. No consiguió empleo como Matemético y tuvo que graduarse de abogado y ejercer durante más de 15 años, durante los cuales publicó más de 250 trabajos en Matemáticas

Más aún cambiando el orden en el cual se presenta una base, cambia la representación matricial del operador. Los siguientes ejemplos tratarán de ilustrar estas situaciones

Si tenemos un matriz $2 \times 3$, $\mathbf{B}$ de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y supongamos las bases canónicas para $V^3$y $V^2$ : $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\}$ y $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\}$ . Entonces la matriz $\mathbf{B}$ representan la transformación $\mathbf{B}$ :$V^3 \rightarrow V^2$ que lleva un vector genérico $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ en un vector genérico $|y\rangle = (y_1, y_2)$ tal que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \mathbf{B}\,|x\rangle = |y\rangle \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

y esto es

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 0x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

La representación matricial, dependerá de la base en la cual se exprese. Si suponemos el operador diferencial $D(\cdot) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ y consideramos el dominio un espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq 3$, por lo tanto $D(\cdot) : P^3 \rightarrow P^2$, si consieramos las bases $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ y $\left\{1, x, x^2\right\}$ de $P^3$ y $P^2$ respectivamente. Si el producto interno está definido como

$$\left\langle P^i \,|P_j\right\rangle \rightarrow \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \ \mathcal{P}_i(x)\,\mathcal{P}_j(x)\,\mathrm{d}x$$

La representación matricial el operador diferencial será

$$\left\langle \tilde{P}^i \right| D\,|P_j\rangle = \left\langle \tilde{P}^i \,\middle|\tilde{P}_j\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

como siempre $i$ indica las filas y $j$ las columnas.

Otra manera de verlo es operar (diferenciar) sobre el $|P_j\rangle \in P^3$ y expresar ese resultado en la base de $P^2$

$$D\,|P_j\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x} & = & 2x & = & 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^3\right)}{\mathrm{d}x} & = & 3x^2 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{array} \right.$$

y los coeficientes de esa expansión serán las columnas de la matriz que los representa.

Para enfatizar que los elementos de matríz, no sólo dependen de la base sino del orden en el cual la base se presente. Consideremos que la base de $P^2$ viene representadas por $\left\{x^2, x, 1\right\}$. La representación matricial del operador $D\left(\cdot\right) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ será

$$\left\langle P^i \right| D \left| P_j \right\rangle = \left\langle P^i \left| \tilde{P}_j \right.\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aunque

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow 1 + 2x + 3x^2$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow 1 + 2x + 3x^2$$

¡Es el mismo polinomio!

Recuerde que las componentes del vector multiplican a los vectores bases en el mismo orden.

Si ahora construimos la respresentación para el mismo operador $D\left(\cdot\right) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ en la siguiente base $\left\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\right\}$ y $\left\{1, x, x^2\right\}$ de $P^3$ y $P^2$, respectivamente.

$$D\left| P_j \right\rangle = \left| \tilde{P}_j \right\rangle \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}(1+x)}{\mathrm{d}x} & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(1+x+x^2\right)}{\mathrm{d}x} & = & 1 + 2x & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(1+x+x^2+x^3\right)}{\mathrm{d}x} & = & 1 + 2x + 3x^2 & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{array} \right.$$

con lo cual

$$\left\langle P^i \right| D \left| P_j \right\rangle = \left\langle P^i \left| \tilde{P}_j \right.\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2.2. Algebra de Matrices

Por comodidad supongamos que $\dim\left(V\right) = \dim\left(W\right) = n$ y consideremos la base ortogonal $\left\{\left|\mathbf{e}_1\right\rangle, \left|\mathbf{e}_2\right\rangle, \left|\mathbf{e}_3\right\rangle, \cdots \left|\mathbf{e}_n\right\rangle\right\}$.De este modo es claro, que se reobtienen las conocidas relaciones para matrices cuadradas

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} + \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A}{+}\mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e_j} \right\rangle + \left\langle \mathbf{e^i} \right| \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = A^i_j + B^i_j$$

con lo cual tenemos la suma de matrices. Esto es

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & A_n^n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_1^1 + B_1^1 & A_2^1 + B_2^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ A_1^2 + B_1^2 & A_2^2 + B_2^2 & & A_n^2 + B_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_1^n + B_1^n & & & A_n^n + B_n^n \end{pmatrix}$$

en forma compacta puede demostrarse $A_j^i + B_j^i = (A+B)_j^i$con lo cual es directo la demostrar la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} A_1^1 + B_1^1 & A_2^1 + B_2^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ A_1^2 + B_1^2 & A_2^2 + B_2^2 & & A_n^2 + B_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_1^n + B_1^n & & & A_n^n + B_n^n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & A_n^n \end{pmatrix}$$

de donde $A_j^i = B_j^i$

De igual modo para la representación de composición de operadores

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{AB} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A1B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left( \left| \mathbf{e_k} \right\rangle \left\langle \mathbf{e^k} \right| \right) \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_k \right\rangle \left\langle \mathbf{e}^k \right| \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = A_k^i B_j^k$$

para multiplicación de matrices. Esto es

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & A_n^n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_k^1 B_1^k & A_k^1 B_2^k & \cdots & A_k^1 B_n^k \\ A_k^2 B_1^k & A_k^2 B_2^k & & A_k^2 B_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_k^n B_1^k & & & A_k^n B_n^k \end{pmatrix}$$

como ya sabíamos $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \rightarrow A^i_k B^k_j \neq B^i_k A^k_j$

De la misma manera la multiplicación de un número por una matriz es la multiplicación de todos sus elementos por ese número

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \alpha \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \alpha \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \alpha A^i_j$$

## 2.3. Representación Diagonal

Finalmente mostraremos que dado un operador lineal $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ donde $\dim(V) = \dim(W) = n$ y sea $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \cdots |\mathbf{u}_n\rangle\}$ una base ortonormal para $V$ y $W$. Si adicionalmente se da el caso que

$$\mathbf{A} \left| \mathbf{u}_i \right\rangle = \left| \mathbf{u}_i \right\rangle$$

la representación matricial es diagonal

$$\left\langle \mathbf{u}^j \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{u}_i \right\rangle = A^j_i = \left\langle \mathbf{u}^j \right. \left| \mathbf{u}_i \right\rangle = \delta^j_i$$

Esta afirmación también es válida para $\dim(V) \neq \dim(W)$ pero por simplicidad seguimos trabajando con matrices cuadradas.

En leguaje de índices estaremos diciendo que

$$D^i_j = D_k \; \delta^k_l \delta^l_j \delta^i_k = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix}$$

## 2.4. Sistemas de Ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones más útiles del álgebra de matrices es la resolución de los sitemas de ecuaciones lineales. El cual puede ser expresado de la siguiente forma

$$A^\alpha_i x^i = c^\alpha \qquad \text{con } i = 1, 2, .., n \qquad \text{y } \alpha = 1, 2, .., m$$

por lo tanto tendremos $m$ ecuaciones lineales para $n$ incognitas $\left(x^1, x^2, \cdots x^n\right)$. Las $A^\alpha_i$ es la matriz de los coeficientes. Por lo tanto este problema puede ser pensado como un problema de un operador $\mathbf{A}$ en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(V, W)$ donde $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, con las $c^\alpha$ las componentes del vector transformado

$$\left| \mathbf{c} \right\rangle = \mathbf{A} \left| \mathbf{x} \right\rangle \rightarrow c^\alpha = A^\alpha_i x^i$$

Concretemos en un ejemplo

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 5 \\ 4x + 4y - 3z & = & 3 \\ -2x + 3y - z & = & 10 \end{array} \qquad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el método más utilizado es la eliminación de *Gauss Jordan* el cual se basa en el intercambio de ecuaciones y la multiplicación apropiada e inteligente por constantes y resta de ecuaciones. La idea es construir una matriz triangular superior para poder luego despejar desde abajo. Veamos:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

entonces para eliminar $x$ de lala fila $c$ (o la ecuación $c$) sumamos la fila $a$ con la $c, a+c$ y esta nueva ecuación será la nueva $c$

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c' \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

ahora $-2a+b$ será la nueva $b$

$$\begin{array}{c} a \\ b' \\ c' \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

finalmente $3b'+c'$

$$\begin{array}{c} a \\ b' \\ c'' \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right]$$

Este sistema es equivalente al primer sistema de ecuaciones. La solución emerge rápidamente:

$$-5z = -15 \rightarrow z = 3 \qquad -2y - z = -7 \rightarrow -2y - 3 = -7 \rightarrow y = 2 \quad 2x + 3\,(2) - 3 = 5 \rightarrow x = 1$$

Es bueno recalcar que los sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente tienen solución y a veces tienen más de una solución.

## 2.5. Operadores Hermíticos

La representación matricial de un operador hermítico,

$$\left(A^\dagger\right)^i_j = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A}^\dagger \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^j \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_i \right\rangle^* = \left(A^j_i\right)^*$$

vale decir: el hermítico conjugado de una matriz, es su traspuesta conjugada. Si la matriz es Hermítica, i.e.

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \Longrightarrow \quad \left(A^\dagger\right)^i_j = A^i_j$$

por lo tanto, las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales. Un operador hermítico estará representado por una matriz hermítica.

Aquí vale la pena probar algunas de las propiedades que arriba expresamos para operadores hermíticos conjugados, vale decir

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^\dagger = \mathbf{A}; \qquad (\lambda\mathbf{A})^\dagger = \lambda^*\mathbf{A}^\dagger; \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger; \qquad (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger\mathbf{A}^\dagger$$

Es claro que

$$\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} \rightarrow \left(\left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle\right)^{\dagger} = \left(\left(A^{\dagger}\right)^{i}_{j}\right)^{\dagger} = \left(\left(A^{j}_{i}\right)^{*}\right)^{\dagger} = A^{i}_{j}$$

y

$$(\lambda\mathbf{A})^{\dagger} \rightarrow \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \lambda\mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^{j}\right| \lambda\mathbf{A} \left|\mathbf{e}_{i}\right\rangle^{*} = \lambda^{*} \left\langle \mathbf{e}^{j}\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{e}_{i}\right\rangle^{*} = \lambda^{*} \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \lambda^{*}\mathbf{A}^{\dagger}$$

pero más interesante es

$$(\mathbf{AB})^{\dagger} \rightarrow \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| (\mathbf{AB})^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \left(A^{i}_{k}B^{k}_{j}\right)^{\dagger} = A^{j*}_{k}B^{k*}_{i} = A^{k*}_{j}B^{i*}_{k} = B^{i*}_{k}A^{k*}_{j} \rightarrow \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$$

## 2.6. Inversa de una matriz

Hemos visto que dada una transformación lineal biyectiva, podemos definir una inversa para esa transformación lineal. Esa transformación lineal tendrá como representación un matriz. Por lo tanto dado un operador lineal $\mathbf{A}$ diremos que otro operador lineal $\mathbf{B}$ será su inverso (por la derecha) si

$$\mathbf{AB} = \mathbf{1} \rightarrow \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{AB} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \delta^{i}_{j} \rightarrow A^{i}_{k}B^{k}_{j} = \delta^{i}_{j}$$

ahora bien, como conocemso la matriz $A^{i}_{k}$ y las suponemos no singular (esto es: $\det\left(A^{i}_{k}\right) \neq 0$) y si tomamos un $j$ fijo tendremos un sistema de $n$ ecuaciones lineales inhomogeneo con $n$ incognitas $B^{1}_{j}, B^{2}_{j}, B^{3}_{j}, \cdots B^{n}_{j}$. Al resolver el sistema tendremos la solución. El procedimiento para encontrar la inversa es equivalente al método de eliminación de Gauss Jordan, veamos como funciona. Supongamos una matriz $3 \times 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A^{1}_{1} & A^{1}_{2} & A^{1}_{3} & 1 & 0 & 0 \\ A^{2}_{1} & A^{2}_{2} & A^{2}_{3} & 0 & 1 & 0 \\ A^{3}_{1} & A^{3}_{2} & A^{3}_{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \stackrel{\text{Gauss Jordan}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & B^{1}_{1} & B^{1}_{2} & B^{1}_{3} \\ 0 & 1 & 0 & B^{2}_{1} & B^{2}_{2} & B^{2}_{3} \\ 0 & 0 & 1 & B^{3}_{1} & B^{3}_{2} & B^{3}_{3} \end{array}\right)$$

Como un ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

## 2.7. Cambio de Bases para vectores

Dada una representación (una base) particular un *bra*, un *ket* o un operador queda representado por una matriz. Si cambiamos la representación, ese mismo *bra*, *ket* u operador tendrá otra matriz como representación. Mostraremos cómo están relacionadas esas matrices.

Dadas dos base discretas ortonormales $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ y $\{|\mathbf{t}_i\rangle\}$, entonces un vector cualquiera

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{\Psi}\rangle = \left(|\mathbf{u^k}\rangle \langle \mathbf{u_k}|\right) |\mathbf{\Psi}\rangle = \underbrace{\left\langle \mathbf{u^k} \right| \mathbf{\Psi}\rangle}_{c^k} \; |\mathbf{u_k}\rangle \\ \\ |\mathbf{\Psi}\rangle = \left(|\mathbf{t^m}\rangle \langle \mathbf{t_m}|\right) |\mathbf{\Psi}\rangle = \underbrace{\langle \mathbf{t}^m | \; \mathbf{\Psi}\rangle}_{\tilde{c}^m} \; |\mathbf{t}_m\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \langle \mathbf{t}^m \; |\mathbf{\Psi}\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \; \mathbf{\Psi}\rangle \; \underbrace{\langle \mathbf{t}^m \; |\mathbf{u}_k\rangle}_{S_k^m} \\ \\ \left\langle \mathbf{u}^k \; |\mathbf{\Psi}\rangle = \langle \mathbf{t}^m | \; \mathbf{\Psi}\rangle \; \underbrace{\left\langle \mathbf{u}^k \; |\mathbf{t}_m\right\rangle}_{\tilde{S}_m^k} \right. \end{array}\right.$$

con lo cual, una vez más, tendremos que la expresión de transformación de componentes de un vector

$$\tilde{c}^m = S_k^m c^k \quad \Longleftrightarrow \quad c^k = \tilde{S}_m^k \tilde{c}^m$$

y $S_k^m$ (o $\tilde{S}_m^k$) será la matriz de transformación, cambio de base o cambio de representación. Ahora bien, por definición de producto interno

$$\langle \mathbf{t}^m \; |\mathbf{u}_k\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \; |\mathbf{t}_m\right\rangle^* \quad \Longrightarrow \quad S_k^m = S_m^{k*} \equiv S_k^{m\dagger}$$

por lo tanto, la matriz de transformación entre bases es hermítica o autoadjunta y la relación anterior queda escrita como

$$\tilde{c}^m = S_k^m c_k \quad \Longrightarrow \quad \langle \mathbf{t}^m | \; \mathbf{\Psi}\rangle = S_k^m \; \left\langle \mathbf{u}^k \right| \; \mathbf{\Psi}\rangle$$

$$c^k = S_m^{k\dagger} \tilde{c}^m \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \mathbf{u}^k \; |\mathbf{\Psi}\rangle = S_m^{k\dagger} \langle \mathbf{t}^m | \; \mathbf{\Psi}\rangle\right.$$

Igualmente la regla de transformación de las representaciones matriciales de operadores quedan expresadas como

$$\left\langle \mathbf{t}^i \right| \mathbf{A} \, |\mathbf{t}_j\rangle = \left\langle \mathbf{t}^i \right| \left(|\mathbf{u_k}\rangle \left\langle \mathbf{u^k} \right|\right) \mathbf{A} \left(|\mathbf{u_m}\rangle \langle \mathbf{u^m}|\right) |\mathbf{t}_j\rangle = \underbrace{\left\langle \mathbf{t}^i \; |\mathbf{u}_k\right\rangle}_{S_k^i} \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \, |\mathbf{u}_m\rangle \underbrace{\langle \mathbf{u}^m \; |\mathbf{t}_j\rangle}_{S_j^{m\dagger}}$$

por lo tanto,

$$\tilde{A}_j^i = S_k^i \; A_m^k \; S_j^{m\dagger}$$

donde $\tilde{A}_j^i$ es la representación del operador $\mathbf{A}$ respecto a la base $\{|\mathbf{t}_j\rangle\}$ y $A_m^k$ su representación en la base $\{|\mathbf{u}_m\rangle\}$

# 3. Traza de Operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})$, de un operador $\mathbf{A}$ es la suma de los elementos diagonales de su representación matricial. Esto es dado un operador $\mathbf{A}$ y una base ortogonal $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ para $V^n$

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \, |\mathbf{u}_k\rangle = A_i^i$$

Así

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) = A_i^i = 15$$

## 3.1. Invariancia de la Traza

La traza de una matriz no depende de la base que seleccionemos. Es un invariante que caracteriza al operador independientemente de la base en la cual se represente. Entonces Dadas dos base discretas ortonormales $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ y $\{|\mathbf{t}_i\rangle\}$,

$$A_k^k = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right. \left|\mathbf{t}^m\right\rangle \left\langle \mathbf{t}_m\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{t}_m\right| \mathbf{A} \underbrace{\left|\mathbf{u}_k\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^k \right.}_{\mathbf{1}} \left|\mathbf{t}^m\right\rangle = \left\langle \mathbf{t}_m\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{t}^m\right\rangle = A_m^m$$

Donde una vez más hemos utilizado las dos relaciones de cierre $|\mathbf{t}^m\rangle\langle\mathbf{t}_m| = \mathbf{1}$ y $\left|\mathbf{u}^k\right\rangle\langle\mathbf{u}_k| = \mathbf{1}$. Es claro que el número que representa esta suma será el mismo independientemente de su representación matricial.

## 3.2. Propiedades de la Traza

Claramente la traza es lineal

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) + \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{B})$$

ya que

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}) = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A}+\lambda\mathbf{B} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle + \lambda \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{B} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) + \lambda\,\mathrm{Tr}\,(\mathbf{B})$$

La traza de un producto conmuta esto es

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{BA})$$

y es fácilmente demostrable

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{AB}) = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{AB} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \underbrace{\left|\mathbf{u}_m\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^m\right|}_{\mathbf{1}} \mathbf{B} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{B} \underbrace{\left|\mathbf{u_m}\right\rangle \left\langle \mathbf{u^m}\right|}_{\mathbf{1}} \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{BA})$$

Recuerde que $\left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{B} \left|\mathbf{u_m}\right\rangle$ y $\left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle$ son números que pueden ser reordenados.

Del mismo modo es fácil demostrar que la traza de un triple producto de matrices respeta la ciclicidad del orden de la matrices en el producto

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{ABC}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{BCA}) = \mathrm{Tr}\,(\mathbf{CAB})$$

## 3.3. Diferenciación de Operadores

Dado un operador $\mathbf{A}(t)$ el cual supondremos dependiente de una variable arbitraria $t$ podremos definir la derivada como

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

por lo tanto si $\left\langle u^k \right| \mathbf{A} \left| u_i \right\rangle = A_i^k$ entonces

$$\left\langle u^k \right| \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t} \left| u_i \right\rangle = \left( \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t} \right)_i^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle u^k \right| \mathbf{A}(t) \left| u_i \right\rangle = \frac{\mathrm{d}A_i^k}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_1^1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A_2^1}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}A_n^1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}A_1^2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A_2^2}{\mathrm{d}t} & & \frac{\mathrm{d}A_n^2}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\mathrm{d}A_1^n}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A_2^n}{\mathrm{d}t} & & \frac{\mathrm{d}A_n^n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$$

con lo cual la regla es simple, la representación matricial de la derivada de un operador será la derivada de cada uno de sus elementos. Con ello

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{pmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & e^{-x} & 5x \\ 3x^3 & 3 & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & -e^{-x} & 5 \\ 9x^2 & 0 & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

## 3.4. Reglas de Diferenciación de Operadores Lineales

Las reglas usuales de la diferenciación se cumplirán con la diferenciación de operadores. Esto se demuestra con la representación matricial

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\mathbf{B}(t))}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned} \left\langle u^k \right| \frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t))}{\mathrm{d}t} \left| u_i \right\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle u^k \right| (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)) \left| u_i \right\rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \left\langle u^k \right| \mathbf{A}(t) \left| u_i \right\rangle + \left\langle u^k \right| \mathbf{B}(t) \left| u_i \right\rangle \right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle u^k \right| \mathbf{A}(t) \left| u_i \right\rangle + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle u^k \right| \mathbf{B}(t) \left| u_i \right\rangle \\ &= \left\langle u^k \right| \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t} \left| u_i \right\rangle + \left\langle u^k \right| \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(t)}{\mathrm{d}t} \left| u_i \right\rangle = \frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(\mathbf{B}(t))}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Del mismo modo se cumplirá que

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t)\,\mathbf{B}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(t)}{\mathrm{d}t}$$

con la precaución que no se puede modificar el orden de aparición de los operadores. Es fácil ver que

$$\left\langle u^k \right| \frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{B}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k \right| \mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k \right| \mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{1}\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle$$
$$= \left(\left\langle u^k \right| \mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^m\right| \mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}\left\langle u^k\right| \mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle}{\mathrm{d}t}\left\langle \mathbf{u}^m\right| \mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle + \left\langle u^k \right| \mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle \frac{\mathrm{d}\left\langle \mathbf{u}^m\right| \mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle}{\mathrm{d}t}$$
$$= \left\langle u^k \right| \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{u}_m\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^m\right| \mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle + \left\langle u^k \right| \mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^m\right| \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle$$

Otras propiedades de la derivación de operadores se demuestran a partir de la expansión en series de los operadores. Por ejemplo si queremos conocer la expresión para $\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}$, con $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}\left(t\right)$si recordamos que

$$e^{\mathbf{A}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left[\mathbf{1} + \mathbf{A}t + \frac{\left(\mathbf{A}t\right)^2}{2!} + \cdots + \frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\cdots\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

tendremos que

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\right)\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^{n-1}\mathbf{A}^n}{n!}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}\mathbf{A}^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\right]}_{e^{\mathbf{A}t}}\mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

Nótese que la suma es hasta infinito, por lo tanto al cambiar de índice $p = n-1$, $p$ sigue variando hasta infinito y la serie es la misma que la anterior. Entonces

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle \equiv \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

también fíjese que si un solo operador esta siendo derivado el orden de presentación de los operadores es indiferente. Ahora bien, cuando se presenta la siguiente situación

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle + e^{\mathbf{A}t}\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{B}t}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle$$
$$= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle + e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

con $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}\left(t\right)$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\left(t\right)$ y siempre $\left[e^{\mathbf{B}t}, \mathbf{B}\right] = 0$. Con lo cual, sólo para el caso en el cual $\left[\mathbf{A}, \mathbf{B}\right] = 0$ podremos factorizar $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ y

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\mathbf{A}+\mathbf{B}\right)e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

Si $[\mathbf{A},\mathbf{B}] \neq 0$ el orden de aparición de los operadores es MUY importante.

Para el caso en el cual $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ **no necesariamente** $\left[\mathbf{A}(t), e^{\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}}\right] = 0$. Veamos:

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}(t)}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{v}\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}(t))^n}{n!}\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))^n}{\mathrm{d}t}\right)\right]|\mathbf{v}\rangle$$
$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\left\{\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)^{n-1} + \mathbf{A}(t)\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)^{n-2}\cdots\mathbf{A}(t)^{n-1}\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t}\right\}\right)\right]|\mathbf{v}\rangle$$

Adicionalmente

$$\text{si } [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0 \qquad \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

Esta relación es fácilmente demostrable para el caso en el cual $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{1}$ el operador indentidad, en ese caso teníamos que $\mathbf{AB}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} = \mathbf{nB}^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} &= \mathbf{A}\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= (\mathbf{1}+\mathbf{BA})\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{1B}^{n-1} + \mathbf{B}(\mathbf{1}+\mathbf{BA})\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= 2\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}^2(\mathbf{1}+\mathbf{BA})\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{nB}^{n-1}
\end{aligned}$$

Obviamente, para este caso, se cumple que

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{1} \qquad \Longrightarrow [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0$$

para demostrar esta relación "desarrollemos en Serie de Taylor" la funcion $\mathbf{F}(\mathbf{B})$. Esto es

$$[\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] = \left[\mathbf{A},\sum_{n=0}^{\infty}f_n\frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}f_n\frac{[\mathbf{A},\mathbf{B}^n]}{n!} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\sum_{n=0}^{\infty}f_n\frac{n\mathbf{B}^{n-1}}{n!} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\sum_{n=0}^{\infty}f_n\frac{\mathbf{B}^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$= [\mathbf{A},\mathbf{B}]\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

Para el caso más general se procede del mismo modo

$$\text{si } [\mathbf{A},\mathbf{C}] = [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0 \qquad \text{con } \mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] \stackrel{?}{=} [\mathbf{A},\mathbf{B}]\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

Probaremos primero que

$$\text{si } [\mathbf{A},\mathbf{C}] = [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0 \qquad \text{con } \mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{B}^n] = \mathbf{A}\mathbf{B}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} = \mathbf{n}\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{B}^{n-1}$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{B}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} &= \mathbf{A}\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= (\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{A})\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{C}\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}\,(\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{A})\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= 2\mathbf{C}\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}^2(\mathbf{C}+\mathbf{B}\mathbf{A})\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{n}\mathbf{C}\mathbf{B}^{n-1} = \mathbf{n}\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{B}^{n-1}
\end{aligned}$$

con lo cual es inmediato demostrar que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] &= \left[\mathbf{A},\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{[\mathbf{A},\mathbf{B}^n]}{n!} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{n\mathbf{B}^{n-1}}{n!} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbf{B}^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

## 3.5. La Fórmula de Glauber

Ahora estamos en capacidad de demostrar limpiamente la fórmula de Glauber. Esta es

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$

Para demostrarla, procedemos a considerar un operador $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(t)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{v}\rangle &= \frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\,e^{\mathbf{B}t}|\mathbf{v}\rangle + e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{B}e^{\mathbf{B}t}|\mathbf{v}\rangle = \left(\mathbf{A}+e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right)e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}|\mathbf{v}\rangle \\
&= \left(\mathbf{A}+e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right)\mathbf{F}(t)\,|\mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\text{si } [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0 \qquad \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

entonces

$$\left[e^{\mathbf{A}t},\mathbf{B}\right] = t\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,e^{\mathbf{A}t} \qquad \Longrightarrow e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = \mathbf{B}e^{\mathbf{A}t} + t\,[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,e^{\mathbf{A}t}$$

por lo cual

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(t)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\mathbf{A}+e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right)\mathbf{F}(t)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\mathbf{A}+\mathbf{B}+t\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]e^{\mathbf{A}t}\right)\mathbf{F}(t)\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

por tanteo uno puede darse cuenta que

$$\mathbf{F}(t) = e^{\left\{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t+\frac{t^2}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\right\}}$$

cumple con la ecuación anterior, por lo tanto absorbiendo $t$ en los operadores correspondientes llegamos a la fórmula de Glauber

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$

# 4. Un Zoológico de Matrices Cuadradas

A continuación presentaremos un conjunto de matrices que serán de utilidad más adelante

## 4.1. La matriz nula

es

$$A^i_j = 0 \qquad \forall i,j \qquad \Longrightarrow A^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

## 4.2. Diagonal a Bloques

Podremos tener matrices diagonales a bloques, vale decir

$$D^i_j = \begin{pmatrix} D^1_1 & D^1_2 & 0 & 0 \\ D^2_1 & D^2_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D^3_3 & D^3_4 \\ 0 & 0 & D^4_3 & D^4_4 \end{pmatrix}$$

## 4.3. Triangular superior e inferior

$$\check{D}^i_j = \begin{pmatrix} \check{D}^1_1 & \check{D}^1_2 & \check{D}^1_3 & \check{D}^1_4 \\ 0 & \check{D}^2_2 & D^2_3 & \check{D}^2_4 \\ 0 & 0 & \check{D}^3_3 & \check{D}^3_4 \\ 0 & 0 & 0 & \check{D}^4_4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \hat{D}^i_j = \begin{pmatrix} \hat{D}^1_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{D}^2_1 & \hat{D}^2_2 & 0 & 0 \\ \hat{D}^3_1 & D^3_2 & \hat{D}^3_3 & 0 \\ \hat{D}^4_1 & \hat{D}^4_2 & \hat{D}^4_3 & \hat{D}^4_4 \end{pmatrix}$$

## 4.4. Matriz singular

$\mathbf{A}$ es singular $\Longrightarrow \det \mathbf{A} = \mathbf{0}$

### 4.5. Matriz de cofactores

$$A^i_j = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad (A^c)^i_j = \begin{pmatrix} (A^c)^1_1 & (A^c)^1_2 & (A^c)^1_3 \\ (A^c)^2_1 & (A^c)^2_2 & (A^c)^2_3 \\ (A^c)^3_1 & (A^c)^3_2 & (A^c)^3_3 \end{pmatrix}$$

donde los $(A^c)^i_j$ es la matriz de cofactores, y los cofactores son

$$(A^c)^1_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \qquad (A^c)^1_2 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} \qquad (A^c)^1_3 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)^2_1 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \qquad (A^c)^2_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} \qquad (A^c)^2_3 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)^3_1 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_3 \end{vmatrix} \qquad (A^c)^3_2 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_3 \end{vmatrix} \qquad (A^c)^3_3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix}$$

### 4.6. Matriz Adjunta

Llamaremos matriz adjunta, $\text{adj}\,[\mathbf{A}]$, a la traspuesta de la matriz de cofactores de una determinada matriz. Esto es

$$\text{adj}\,[\mathbf{A}] = (\mathbf{A}^c)^T \qquad \Longrightarrow \text{adj}\left[A^i_j\right] = \left((A^c)^i_j\right)^T = (A^c)^j_i$$

Esto es

$$A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \text{adj}\left[A^i_j\right] = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Una matriz será autoadjunta si $\text{adj}\,[\mathbf{A}] = \mathbf{A}$

## 5. Un Paréntesis Determinante

### 5.1. Definición

Antes de continuar es imperioso que refresquemos algunas propiedades del determinante de una matriz. Ya hemos visto que el $\det \mathbf{A} : \mathbf{M}_{n\times n} \to \Re$. Es decir, asocia un número real con cada matriz del espacio vectorial $\mathbf{M}_{n\times n}$ de matrices $n \times n$

Así, dada una matriz

$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i A^2_j A^3_k \cdots = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{vmatrix}$$

Hemos generalizado el índice de Levi Civita de tal forma que

$$\varepsilon^{ijk\cdots} = \varepsilon_{ijk\cdots} = \begin{cases} 0, \text{ si cualesquiera dos índices son iguales} \\ 1, \text{ si los índices } i,j,k\cdots \text{ constituyen una permutación cíclica de } 1,2,3\cdots n \\ -1 \text{ si los índices } i,j,k\cdots \text{ constituyen una permutación anticíclica de } 1,2,3\cdots n \end{cases}$$

Esta situación es clara para el caso de matrices $3\times 3$, veamos.

Dada una matriz $3\times 3$

$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk} A^1_i A^2_j A^3_k = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \varepsilon^{123} A^1_1 A^2_2 A^3_3 + \varepsilon^{312} A^1_3 A^2_1 A^3_2 + \varepsilon^{231} A^1_2 A^2_3 A^3_1 + \varepsilon^{132} A^1_1 A^2_3 A^3_2 + \varepsilon^{321} A^1_3 A^2_2 A^3_1 + \varepsilon^{213} A^1_2 A^2_1 A^3_3 \\ &= A^1_1 A^2_2 A^3_3 + A^1_3 A^2_1 A^3_2 + A^1_2 A^2_3 A^3_1 - A^1_1 A^2_3 A^3_2 - A^1_3 A^2_2 A^3_1 - A^1_2 A^2_1 A^3_3 \end{aligned}$$

## 5.2. Propiedades Determinantes

1. $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$ donde $\mathbf{A}^T$ es la traspuesta de $\mathbf{A}$
   Esta propiedad proviene de la definición del índice de Levi Civita

   $$\det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i A^2_j A^3_k \cdots = \varepsilon_{ijk\cdots} A^i_1 A^j_2 A^k_3 \cdots = \det \mathbf{A}^T$$

   que se traduce que se intercambian filas por columnas el determinante no se altera

   $$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \\ A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{vmatrix}$$

2. Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

   $$\varepsilon^{iik\cdots} A^1_i A^2_i A^3_k \cdots = \varepsilon_{iik\cdots} A^i_1 A^i_2 A^k_3 \cdots = 0$$

   por definición del índice de Levi Civita

   $$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_1 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_1 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_1 & A^3_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix} = 0$$

3. Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

   $$\begin{aligned} \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i \left(\lambda A^2_j\right) A^3_k \cdots &= \lambda \varepsilon^{ijk\cdots} A^1_i A^2_j A^3_k \cdots = \lambda \det \mathbf{A} \\ \varepsilon_{ijk\cdots} A^i_1 A^j_2 \left(\lambda A^k_3\right) \cdots &= \lambda \varepsilon_{ijk\cdots} A^i_1 A^j_2 A^k_3 \cdots = \lambda \det \mathbf{A} \end{aligned}$$

de aquí claramente se desprende que si una fila o una columna es cero $(\lambda = 0)$ el determinante se anula. Más aún, si dos filas o dos columnas son proporcionales $A_i^1 = \lambda A_j^2$ el determinante se anula, por cuanto se cumple la propiedad anterior

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ \lambda A_1^3 & \lambda A_2^3 & \lambda A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

Obvio que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & A_3^1 \\ A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ A_1^3 & 0 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

al igual que

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ \lambda A_1^1 & \lambda A_2^1 & \lambda A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo el determinante.

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \cdots = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \varepsilon^{ijk\cdots} A_j^1 A_i^2 A_k^3 \cdots = \det \tilde{\mathbf{A}}$$

donde en la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ se han intercambiando un par de columnas. Claramente las propiedades del índice de Levi Civita, obliga al cambio de signo

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = -\det \mathbf{A}$$

Nótese que una síntesis de las propiedades anteriores nos lleva a reescribir el determinante de una matriz de la forma

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\cdots} \det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk\cdots} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \cdots \Longleftrightarrow \det \mathbf{A} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\cdots} \det \mathbf{A} = \varepsilon^{ijk\cdots} A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \cdots$$

claramente, si $\alpha\beta\gamma\cdots \Longleftrightarrow 123\cdots$ reobtenemos la definición anterior. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo debido al intercambio de dos índices griegos. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante se anula debido a la propiedad de símbolo de Levi Civita con índices griegos.

5. El determinante de un producto es el producto de los determinantes

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

Antes de proceder a la demostración de este importante propiedad jugaremos un poco más con las propiedades de las matrices. Queremos señalar que si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{B}$ es una matriz $n \times p$, entonces tendremos que

$$(\mathbf{AB})^{\alpha} = \mathbf{A}^{\alpha}\mathbf{B}$$

esto es que la $\alpha - esima$ fila es igual a la multiplicación de la $\alpha - esima$ fila, $\mathbf{A}^{\alpha}$,por toda la matriz $\mathbf{B}$. Veamos

$$C^i_j = (\mathbf{AB})^i_j = A^i_l B^l_j$$

por lo tanto la $\alpha - esima$ fila

$$C^{\alpha}_j = A^{\alpha}_l B^l_j \qquad \Longrightarrow C^{\alpha}_j = (A^{\alpha}_1, A^{\alpha}_2, A^{\alpha}_3, \cdots A^{\alpha}_n, ) \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & B^n_n \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\left(\varepsilon_{ijk\cdots}B^i_1 B^j_2 B^k_3 \cdots\right) = \left(\varepsilon_{ijk\cdots}A^i_{\alpha}A^j_{\beta}A^k_{\gamma}\cdots\right)\left(\varepsilon_{abc\cdots}B^a_1 B^b_2 B^c_3\cdots\right)$$

que siempre puede ser rearreglado a

$$\left(\varepsilon^{ijk\cdots}A^{\alpha}_i A^{\beta}_j A^{\gamma}_k \cdots\right)\left(\varepsilon_{ijk\cdots}B^i_1 B^j_2 B^k_3 \cdots\right) = A^{\alpha}_i B^i_1 A^{\beta}_j B^j_2 A^{\gamma}_k B^k_3 \cdots = \det(\mathbf{AB})$$

veamos este desarrollo en el caso de $3 \times 3$

$$\begin{aligned} &\left(\varepsilon^{123}A^1_1A^2_2A^3_3 + \varepsilon^{312}A^1_3A^2_1A^3_2 + \varepsilon^{231}A^1_2A^2_3A^3_1 + \varepsilon^{132}A^1_1A^2_3A^3_2 + \varepsilon^{321}A^1_3A^2_2A^3_1 + \varepsilon^{213}A^1_2A^2_1A^3_3\right) \\ &\times\left(\varepsilon^{123}B^1_1B^2_2B^3_3 + \varepsilon^{312}B^1_3B^2_1B^3_2 + \varepsilon^{231}B^1_2B^2_3B^3_1 + \varepsilon^{132}B^1_1B^2_3B^3_2 + \varepsilon^{321}B^1_3B^2_2B^3_1 + \varepsilon^{213}B^1_2B^2_1B^3_3\right) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} &= A^1_1A^2_2A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 - B^1_1B^2_3B^3_2 - B^1_3B^2_2B^3_1 - B^1_2B^2_1B^3_3\right) \\ &+ A^1_3A^2_1A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right) \\ &+ A^1_2A^2_3A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right) \\ &- A^1_1A^2_3A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right) \\ &- A^1_3A^2_2A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right) \\ &- A^1_2A^2_1A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^1_3B^2_1B^3_2 + B^1_2B^2_3B^3_1 + B^1_1B^2_3B^3_2 + B^1_3B^2_2B^3_1 + B^1_2B^2_1B^3_3\right) \end{aligned}$$

como son números los rearreglo

$$\begin{aligned} &= A^1_1A^2_2A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right) \\ &+ A^1_3A^2_1A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right) \\ &+ A^1_2A^2_3A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right) \\ &- A^1_1A^2_3A^3_2\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right) \\ &- A^1_3A^2_2A^3_1\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right) \\ &- A^1_2A^2_1A^3_3\left(B^1_1B^2_2B^3_3 + B^2_1B^3_2B^1_3 + B^3_1B^1_2B^2_3 - B^1_1B^3_2B^2_3 - B^3_1B^2_2B^1_3 - B^2_1B^1_2B^3_3\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A_1^1 A_2^2 A_3^3 \left(+B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3\right) \\
&+ A_3^1 A_1^2 A_2^3 \left(B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3\right) \\
&+ A_2^1 A_3^2 A_1^3 \left(B_1^1 B_2^2 B_3^3 + +B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3\right) \\
&- A_1^1 A_3^2 A_2^3 \left(B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3\right) \\
&- A_3^1 A_2^2 A_1^3 \left(B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3\right) \\
&- A_2^1 A_1^2 A_3^3 \left(B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_1^2 B_2^3 B_3^1 + B_1^3 B_2^1 B_3^2 - B_1^1 B_2^3 B_3^2 - B_1^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3\right)
\end{aligned}
$$

$$A_1^1 B_1^1 A_2^2 A_3^3 B_2^2 B_3^3 + A_2^1 B_1^2 A_3^2 A_1^3 B_2^3 B_3^1$$

$$\varepsilon_{ijk\cdots} A_\alpha^i B_1^\alpha A_\lambda^j B_2^\lambda A_\mu^k B_2^\mu \cdots$$

# 6. Autovectores y Autovalores

## 6.1. Definiciones y Teoremas Preliminares

Llamaremos a $|\psi\rangle$ un autovector del operador $\mathbf{A}$ si se cumple que

$$\mathbf{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$$

en este caso $\lambda$ (que, en general será un número complejo) se denomina el autovalor correspondiente al autovector $|\psi\rangle$ . La ecuación $\mathbf{A}\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$ en conocida en la literatura como la ecuación de autovalores y se cumple para algunos valores particulares de los autovalores $\lambda$. El conjunto de los autovalores se denomina el espectro del operador $\mathbf{A}$.

Supongamos que $\mathbf{A}: V \to V$ y que $\dim V = n$, supongamos además que una base ortogonal para $V$ es $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ . Por lo tanto la repercusión de esta ecuación sobre la representación matricial es la siguiente

$$\left\langle \mathbf{e}^i\right| \mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle \left\langle \mathbf{e}^j\right| |\psi\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i\right| \lambda\,|\psi\rangle = \lambda \left\langle \mathbf{e}^i\ |\psi\right\rangle \qquad \Longrightarrow A_j^i\ c^j = \lambda c^i$$

claramente, si $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ genera una representación diagonal de $\mathbf{A}$ entonces

$$A_j^i \propto \delta_j^i \qquad \Longrightarrow A_j^i\ c^j \propto \delta_j^i\ c^j = \lambda c^i \qquad \Longrightarrow A_j^i \propto \lambda\delta_j^i$$

Esto lo podemos resumir en el siguiente teorema que presentaremos sin demostración.

**Teorema** Dado un operador lineal $\mathbf{A}: V^n \to V^n$ si la representación matricial de $\mathbf{A}$ es diagonal, $\left\langle \mathbf{e}^i\right| \mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle = A_j^i \propto \delta_j^i$ entonces existe una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$[4] y un conjunto de cantidades escalares $\{\lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n\}$ tales que se cumple

$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = \lambda_i\ \ |\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, \cdots n$$

[4] Realmente un conjunto de vectores linealmente independientes, pero como siempre puedo ortoganalizarlos mediante el método de Gram Smith, consideraremos que es una base ortogonal de entrada

igualmente se cumple que si existe una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$y un conjunto de cantidades escalares $\{\lambda_1,\lambda_n,\cdots,\lambda_n\}$ tales satisfagan

$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = \lambda_i\ \,|\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con } i=1,2,\cdots n$$

Entonces se cumple la representación matricial de $\mathbf{A}$ es diagonal,

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right|\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle = A^i_j = \operatorname{diag}\left(\lambda_1,\lambda_n,\cdots,\lambda_n\right)$$

## 6.2. Algunos comentarios

1. Nótese que si $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbf{A}$ para un determinado autovalor $\lambda$ entonces $\left|\breve{\psi}\right\rangle = \alpha\,|\psi\rangle$ (un vector proporcional a $|\psi\rangle$ ,con $\alpha$ un número complejo) también es un autovector para el mismo autovector. Esto representa una incómoda ambigüedad: dos autovectores que corresponden al mismo autovalor. Un intento de eliminarla es **siempre** considerar vectores $|\psi\rangle$ normalizados, i.e. $\langle\psi\,|\psi\rangle = 1$. Sin embargo no deja de ser un intento que no elimina la ambigüedad del todo porque siempre queda ángulo de fase arbitrario. Esto es el vector $e^{i\theta}\,|\psi\rangle$ ,con $\theta$ un número real arbitrario, tiene la misma norma del vector $|\psi\rangle$ . Sin embargo esta arbitrariedad es inofensiva. En Mecánica Cuántica las predicciones obtenidas con $|\psi\rangle$ son las mismas que con $e^{i\theta}\,|\psi\rangle$

2. Un autovalor $\lambda$ será *no degenerado* o *simple* si está asociado a un único autovector $|\psi\rangle$[5] de lo contrario si denominará *degenerado* si existen dos o más autovectores de $\mathbf{A}$, linealmente independientes asociados al mismo autovalor $\lambda$. El *grado* (o el *orden*) de la *degeneración* es el número de vectores linealmente independientes que estén asociados al mencionado autovalor $\lambda$.

3. El orden de degeneración de un autovalor $\lambda$ expande un espacio vectorial $S(\lambda)\subset\mathbf{V}^n$ (denominado *autoespacio*) cuya dimensión es el orden de la degeneración. Esto es si $\lambda$ es $g-$degenerado, entonces existen
$$\{|\psi_1\rangle\,,\ |\psi_2\rangle\,,\ |\psi_3\rangle\,,\cdots|\psi_g\rangle\} \quad \Longrightarrow \mathbf{A}\,|\psi_i\rangle = \lambda\,|\psi_i\rangle$$
adicionalmente un autovector correspondiente al autovalor $\lambda$ puede ser expresado como
$$|\psi\rangle = c^i\,|\psi_i\rangle \qquad \text{con } i=1,2,\cdots,g$$
con lo cual
$$\mathbf{A}\,|\psi\rangle = c^i\mathbf{A}\,|\psi_i\rangle = \lambda\ c^i\,|\psi_i\rangle = \lambda\ \,|\psi\rangle$$

## 6.3. Algunos Ejemplos

1. **Reflexión respecto al plano** $xy$ : Si $\mathbf{R}:V^3\rightarrow V^3$ es tal que $\mathbf{R}\,|\psi\rangle = \left|\tilde{\psi}\right\rangle$ donde se ha realizado una reflexión en el plano $xy$. Esto es
$$\mathbf{R}\,|\mathbf{i}\rangle = |\mathbf{i}\rangle\,;\quad \mathbf{R}\,|\mathbf{j}\rangle = |\mathbf{j}\rangle\,;\quad \mathbf{R}\,|\mathbf{k}\rangle = -\,|\mathbf{k}\rangle$$

[5] Con la arbitrariedad del calibre antes mencionado

con $|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle$ vectores unitarios cartesianos. Es claro que cualquier vector en el plano $xy$ será autovector de $\mathbf{R}$ con un autovalor $\lambda = 1$ mientras que cualquier otro vector $|\psi\rangle \in \mathbf{V}^3$ y que no esté en el mencionado plano cumple con $|\psi\rangle = c\,|\mathbf{k}\rangle$ y también será autovector de $\mathbf{R}$ pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.

2. **Dos visiones de Rotaciones de ángulo fijo $\theta$ :** La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.

   *a*) Se considera el plano como un espacio vectorial *real* $\mathbf{V}^2$ con una base cartesiana canónica: $|\mathbf{i}\rangle = (1,0)$ , y $|\mathbf{j}\rangle = (0,1)$ , esto es si

   $$\mathbf{R}\,|\mathbf{a}\rangle = \lambda\,|\mathbf{a}\rangle \quad \Longrightarrow \text{ el ángulo de rotación} = n\pi \quad \text{con } n \text{ entero}$$

   *b*) Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|\mathbf{z}\rangle = re^{i\theta}$ por lo cual

   $$\mathbf{R}\,|\mathbf{z}\rangle = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}\,|\mathbf{z}\rangle$$

   si queremos $\lambda = e^{i\alpha}$ reales necesariamente $\alpha = n\pi$ con $n$ entero

3. **Autovalores y Autovectores de Proyectores.** Es interesante plantearse la ecuación de autovalores con la definición del proyector para un determinado *autoespacio*. Esto es dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ si este proyector cumple con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ supuestamente arbitrario

   $$P_\psi\,|\varphi\rangle = \lambda\ |\varphi\rangle \quad \Longrightarrow P_\psi\,|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)\,|\varphi\rangle \quad \Longrightarrow |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle$$

   es decir necesariamente $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$ . Más aún si ahora el $|\varphi\rangle$ no es tan arbitrario sino que es ortogonal a $|\psi\rangle$ , $\langle\psi\,|\varphi\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = 0$. Esto nos lleva a concluir que el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1,el primer de los cuales es infinitamente degenerado y el segundo es simple. Esto nos lleva a reflexionar que si existe un autovector de un determinado operador, entonces su autovalor es distinto de cero, pero pueden existir autovalores nulos que generan un autoespacio infinitamente degenerado.

4. **El operador diferenciación** $D\,|\mathbf{f}\rangle \to D(f) = f'$ : Los autovectores del operador diferenciación necesariamente deben satisfacer la ecuación

   $$D\,|\mathbf{f}\rangle = \lambda\,|\mathbf{f}\rangle \to D(f)(x) = f'(x) = \lambda f(x)$$

   la solución a esta ecuación será una exponencial. Esto es

   $$|\mathbf{f}\rangle \to f(x) = ce^{\lambda x} \quad \text{con } c \neq 0$$

   las $f(x)$ se denominarán *autofunciones* del operador

## 6.4. Autovalores, autovectores e independencia lineal

Uno de los teoremas más útiles e importantes tiene que ver con la independencia lineal de los autovectores correspondientes a distintos autovalores de un determinado operador lineal. Este importante teorema se puede concretar en.

**Teorema** Sean $\{|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle, \ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ autovectores del operador $\mathbf{A} : V^m \rightarrow V^n$ y suponemos que existen $n$ autovalores, $\{\lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_k\}$, distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$. Entonces los $\{|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle, \ |\psi_3\rangle, \cdots, |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes.

*Demostración* La demostración de este teorema es por inducción y resulta elegante y sencilla.

- Primeramente demostramos que vale $j = 1$.
  Obvio que el resultado se cumple y es trivial para el caso $k = 1$(un autovector $|\psi_1\rangle$ que corresponde a un autovalor $\lambda_1$ es obvia y trivialmente linealmente independiente).

- Seguidamente supondremos que se cumple para $j = k - 1$.
  Esto es que si existen $\{|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle, \ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_{k-1}\rangle\}$ autovectores de $\mathbf{A}$ correspondientes a $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k-1}\}$ entonces los $\{|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle, \ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_{k-1}\rangle\}$ son linealmente independientes.

- Ahora lo probaremos para $j = k$.
  Por lo cual si tenemos $k$ autovectores $\{|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle, \ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$, podremos construir una combinación lineal con ellos y si esa combinación lineal se anula serán linealmente independientes

  $$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k$$

  al aplicar el operador $\mathbf{A}$ a esa combinación lineal, obtenemos

  $$c^j \mathbf{A} |\psi_j\rangle = 0 \quad \Longrightarrow c^j \lambda_j |\psi_j\rangle = 0$$

  multiplicando por $\lambda_k$ y restando miembro a miembro obtenemos

  $$c^j (\lambda_j - \lambda_k) |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k-1$$

  (nótese que el último índice es $k - 1$) pero, dado que los $k - 1$ vectores $|\psi_j\rangle$ son linealmente independiente, entonces tendremos $k - 1$ ecuaciones $c^j (\lambda_j - \lambda_k) = 0$ una para cada $j = 1, 2, \cdots, k-1$. Dado que $\lambda_j \neq \lambda_k$ necesariamente llegamos a que $c^j = 0$ para $j = 1, 2, \cdots, k-1$ y dado que

  $$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k \quad \Longrightarrow c^j \neq 0$$

  con lo cual si

  $$c^j |\psi_j\rangle = 0 \quad \Longrightarrow c^j = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k$$

  y los $\{|\psi_1\rangle, \ |\psi_2\rangle, \ |\psi_3\rangle, \cdots |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes. Con lo cual queda demostrado el teorema

Es importante acotar que el inverso de este teorema NO se cumple.
Esto es, si $\mathbf{A}:V^m \rightarrow V^n$ tiene $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$ autovectores linealmente independientes. NO se puede concluir que existan $n$ autovalores, $\{\lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n\}$, distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$.

El teorema anterior lo complementa el siguiente que lo presentaremos sin demostración. Este teorema será de gran utilidad en lo que sigue.

**Teorema** Si la $\dim(V^n) = n$ cualquier operador lineal $\mathbf{A}:V^n \rightarrow V^n$ tendrá un máximo de $n$ autovalores distintos. Adicionalmente, si $\mathbf{A}$ tiene *precisamente* $n$ autovalores, $\{\lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n\}$, entonces los correspondientes $n$ autovectores, $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots, |\psi_n\rangle\}$, forman una base para $V^n$ y la representación matricial, en esa base, del operador será diagonal

$$\left\langle \psi^i \right| \mathbf{A} \left| \psi_j \right\rangle = A^i_j = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_n, \cdots, \lambda_n)$$

# 7. Autovalores y Autovectores de un operador

Una vez más supongamos que $\mathbf{A}: V \rightarrow V$ y que $\dim V = n$, supongamos además que $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ es una base ortogonal para $V$. Por lo tanto la representación matricial de la ecuación de autovalores es la siguiente

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle \left\langle \mathbf{e}^j \right| |\psi\rangle = \lambda \left\langle \mathbf{e}^i \, |\psi\right\rangle \qquad \Longrightarrow A^i_j \; c^j = \lambda c^i \qquad \Longrightarrow \left(A^i_j - \lambda \delta^i_j\right) c^j = 0$$

para con $j = 1, 2, \cdots, n$ El conjunto de ecuaciones$\left(A^i_j - \lambda \delta^i_j\right) c^j = 0 = 0$ puede ser considerado un sistema (lineal y homogéneo) de ecuaciones con $n$ incógnitas $c^j$.

## 7.1. El polinomio característico.

Dado que un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones con $n$ incógnitas tiene solución si el determinante de los coeficientes se anula tendremos que

$$\left(A^i_j - \lambda \delta^i_j\right) c^j = 0 \qquad \Longrightarrow \det\left[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}\right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(\lambda) = \det\left[A^i_j - \lambda \delta^i_j\right] = 0$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen todos los autovalores (el espectro) del operador $\mathbf{A}$. Claramente esta ecuación implica que

$$\begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \det\left[A^i_j - \lambda \delta^i_j\right] = 0$$

y tendrá como resultado un polinomio de grado $n$ (el polinomio característico). Las raíces de este polinomio serán los autovalores que estamos buscando. Es claro que estas raíces podrán ser reales y distintas, algunas reales e iguales y otras imaginarias.

Es importante señalar que el polinomio característico será independiente de la base a la cual esté referida la representación matricial $\left\langle \mathbf{w}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{w}_j \right\rangle$ del operador $\mathbf{A}$.

## 7.2. Primero los autovalores, luego los autovectores

El procedimiento es el siguiente. Una vez obtenidos (los autovalores) las raíces del polinomio característico, se procede a determinar el autovector, $|\psi_j\rangle$, correspondiente a ese autovalor. Distinguiremos en esta determinación casos particulares dependiendo del tipo de raíz del polinomio característico. Ilustraremos estos casos con ejemplos específicos para el caso específico de matrices $3 \times 3$ a saber:

1. Una matriz $3 \times 3$ con 3 autovalores reales distintos

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \det\left[A^i_j - \lambda \delta^i_j\right] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 21) = 0$$

y es claro que tiene 3 raíces distintas. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es

*a*) $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & x^3 \end{array}$$

que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_1 = 1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_1 = 1} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha$ un escalar distinto de cero

*b*) $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 2x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 2x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 2x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_2 = 2 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2 = 2} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\lambda_3 = 21$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 21 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 21x^1 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 21x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 21x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_3 = 21 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_3=21} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Una matriz $3 \times 3$ con 2 autovalores reales distintos, es decir una matriz con autovalores repetidos

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \det \left[ A^i_j - \lambda \delta^i_j \right] = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 7 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ es un autovalor degenerado de orden 2. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es:

a) $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & -3x^1 \\ 4x^1 - x^2 & = & -3x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & -3x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_1 = -3 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_1=-3} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_2 = 1$ (autovalor degenerado de orden 2)

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & x^1 \\ 4x^1 - x^2 & = & x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_2 = 1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2=1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Otra matriz $3 \times 3$ con 2 autovalores reales distintos, es decir otra matriz con autovalores repetidos

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \det \left[ A^i_j - \lambda \delta^i_j \right] = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico ahora queda expresado como

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ vuelve a ser un autovalor degenerado de orden 2. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor. Esto es:

*a*) $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + x^3 & = & 7x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 & = & 7x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 & = & 7x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_1 = 7 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_1 = 7} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

*b*) $\lambda_2 = 1$, el autovalor degenerado de orden 2 presenta una pequeña patología. Veamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 2x^1 + x^2 + x^3 & = & x^1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 & = & x^2 \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 & = & x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda_2 = 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2 = 1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2 = 1} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

con lo cual el autovector $|\psi_2\rangle$ correspondiente al autovalor $\lambda_2 = 1$ se podrá escribir como

$$|\psi_2\rangle = \alpha \, |\phi_{21}\rangle + \beta \, |\phi_{22}\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda_2 = 1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Una matriz $3 \times 3$ con 1 autovalor real y dos autovalores complejos

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \det\left[A^i_j - \lambda \delta^i_j\right] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda - 18 = (\lambda - 6)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 3\right) = 0$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 6$ es un autovalor real. Adicionalmente existen dos autovalores complejos, uno el complejo conjugado del otro: $\lambda_* = -\frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{3}\right)$ y $\bar{\lambda}_* = -\frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{3}\right)$. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para **cada** autovalor real. En este caso existe **un único** autovalor real $\lambda = 6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & 6x^1 \\ 4x^1 - x^2 & = & 6x^2 \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & 6x^3 \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos que

$$\lambda = 6 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\lambda=6} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 8. Autovalores y Autovectores de Matrices Importantes

En esta sección presentaremos autovalores y autovectores de matrices importantes en Física

## 8.1. Autovalores y Autovectores de Matrices Similares

Supongamos la representación matricial de un determinado operador lineal $\mathbf{A} : V \to V$ y que $\dim V = n$, supongamos además que $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \cdots |\mathbf{w}_n\rangle\}$ son dos bases ortogonales para $V$. Entonces

$$\mathbf{A} \left|\mathbf{e}_j\right\rangle = A^l_j \left|\mathbf{e}_l\right\rangle \qquad \text{con } A^i_j = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{e}_j\right\rangle$$

y

$$\mathbf{A} \left|\mathbf{w}_j\right\rangle = \tilde{A}^l_j \left|\mathbf{w}_l\right\rangle \qquad \text{con } \tilde{A}^i_j = \left\langle \mathbf{w}^i \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{w}_j\right\rangle$$

ahora bien, cada uno de los vectores base $|\mathbf{e}_j\rangle$ y $|\mathbf{w}_j\rangle$ puede ser expresado en las otras bases $\{|\mathbf{w}_1\rangle, |\mathbf{w}_2\rangle, |\mathbf{w}_3\rangle, \cdots |\mathbf{w}_n\rangle\}$ y $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$, respectivamente como

$$\left.\begin{array}{c} |\mathbf{w}_j\rangle = c^l_j \, |\mathbf{e}_l\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_l\rangle = \tilde{c}^m_l \, |\mathbf{w}_m\rangle \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow |\mathbf{w}_j\rangle = c^l_j \; \tilde{c}^m_l \, |\mathbf{w}_m\rangle \quad \Longrightarrow c^l_j \; \tilde{c}^m_l = \tilde{c}^m_l c^l_j = \delta^m_j \quad \Longrightarrow \tilde{c}^m_l = \left(c^m_l\right)^{-1}$$

Las cantidades $c_j^l$ son escalares que pueden ser "arreglados" como una matriz. Esa matriz, adicionalmente es no singular[6] por ser una la representación de una transformación lineal que aplica una base en otra. Entonces además

$$|\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l\,|\mathbf{e}_l\rangle \qquad \Longrightarrow \mathbf{A}\,|\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_l\rangle \quad \Longrightarrow \tilde{A}_j^l\,|\mathbf{w}_l\rangle = c_j^m A_m^k\,|\mathbf{e}_k\rangle = \underbrace{c_j^m A_m^k \tilde{c}_k^h}_{\delta_j^h}|\mathbf{w}_h\rangle$$

con lo cual

$$\tilde{A}_j^l = c_j^m A_m^k \tilde{c}_k^l \quad \Longrightarrow \tilde{A}_j^l = \tilde{c}_k^l A_m^k c_j^m \quad \Longrightarrow \tilde{A}_j^l = \left(c_k^l\right)^{-1} A_m^k c_j^m$$

que puede ser expresada en el lenguaje de operadores, finalmente como

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\mathbf{w}^i|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{w}_j\rangle = \left(c_k^i\right)^{-1}\left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_m\rangle\,c_j^m$$

De esta manera hemos demostrado el siguiente teorema.

**Teorema** Dadas dos matrices, $n \times n$, $A_j^l$ y $\tilde{A}_j^i$ las cuales corresponden a la representación matricial de un operador $\mathbf{A}$ en las bases ortogonales $\{|\mathbf{e}_1\rangle,\ |\mathbf{e}_2\rangle,\ |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\mathbf{w}_1\rangle,\ |\mathbf{w}_2\rangle,\ |\mathbf{w}_3\rangle, \cdots |\mathbf{w}_n\rangle\}$, respectivamente. Entonces existe una matriz $c_j^l$, no singular, tal que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\mathbf{w}^i|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{w}_j\rangle = \left(c_k^i\right)^{-1}\left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_m\rangle\,c_j^m$$

El inverso de este teorema también se cumple. Vale decir

**Teorema** Si dos matrices $n \times n$, $A_j^l$ y $\tilde{A}_j^i$, están relacionadas por la ecuación

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \Longleftrightarrow \quad \langle\mathbf{w}^i|\,\tilde{\mathbf{A}}\,|\mathbf{w}_j\rangle = \left(c_k^i\right)^{-1}\left\langle\mathbf{w}^k\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{w}_m\rangle\,c_j^m$$

donde $\mathbf{C}$ es una matriz no singular, entonces $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$ representan el mismo operador lineal.

*Demostración* Para proceder a demostrarlo supondremos $\mathbf{A} : V \to V$ y que $\dim V = n$, supongamos además que $\{|\mathbf{e}_1\rangle,\ |\mathbf{e}_2\rangle,\ |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\mathbf{w}_1\rangle,\ |\mathbf{w}_2\rangle,\ |\mathbf{w}_3\rangle, \cdots |\mathbf{w}_n\rangle\}$ son bases de $V$ de tal forma

$$\left.\begin{array}{c} |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l\,|\mathbf{e}_l\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_l\rangle = \tilde{c}_l^m\,|\mathbf{w}_m\rangle \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow |\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l\ \tilde{c}_l^m\,|\mathbf{w}_m\rangle \quad \Longrightarrow c_j^l\ \tilde{c}_l^m = \tilde{c}_l^m c_j^l = \delta_j^m \quad \Longrightarrow \tilde{c}_l^m = (c_l^m)^{-1}$$

donde

$$c_j^l = \left\langle\mathbf{e}^l\ |\mathbf{w}_j\right\rangle \qquad \text{y} \qquad \tilde{c}_l^m = (c_l^m)^{-1} = \langle\mathbf{w}^m\ |\mathbf{e}_l\rangle$$

Supongamos que

$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle = A_j^l\,|\mathbf{e}_l\rangle \qquad \text{con } A_j^i = \langle\mathbf{e}^i|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle$$

y

$$\tilde{\mathbf{A}}\,|\mathbf{w}_j\rangle = \tilde{A}_j^l\,|\mathbf{w}_l\rangle \qquad \text{con } \tilde{A}_j^i = \langle\mathbf{w}^i|\,\tilde{\mathbf{A}}\,|\mathbf{w}_j\rangle$$

[6] $\det\left(c_j^i\right) \neq 0$

al actuar $\mathbf{A}$ sobre $|\mathbf{w}_j\rangle$ tendremos

$$\mathbf{A}|\mathbf{w}_j\rangle = c_j^l \mathbf{A}|\mathbf{e}_l\rangle = c_j^l\ A_l^k |\mathbf{e}_k\rangle = c_j^l\ A_l^k \tilde{c}_k^m |\mathbf{w}_m\rangle = \tilde{c}_k^m\ A_l^k\ c_j^l |\mathbf{w}_m\rangle = \underbrace{(c_k^m)^{-1}\ A_l^k\ c_j^l}_{\langle \mathbf{w}^i|\tilde{\mathbf{A}}|\mathbf{w}_j\rangle}|\mathbf{w}_m\rangle$$

que es exactamente la representación matricial de $\tilde{\mathbf{A}}$. Con lo cual $\mathbf{A} \equiv \tilde{\mathbf{A}}$ y queda demostrado el teorema.

Definición Dos matrices, $A_l^k$ y $\tilde{A}_j^i$, $n \times n$, se denominará similares si existe una matriz no singular $c_k^i$ tal que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \mathbf{w}^i \right| \tilde{\mathbf{A}} |\mathbf{w}_j\rangle = \left(c_k^i\right)^{-1} \left\langle \mathbf{w}^k \right| \mathbf{A} |\mathbf{w}_m\rangle\, c_j^m$$

Podemos juntar los dos teoremas anteriores y afirmar que

**Teorema** Dos matrices, $A_l^k$ y $\tilde{A}_j^i$, $n \times n$, similares representan la misma transformación lineal.

**Teorema** Dos matrices, $A_l^k$ y $\tilde{A}_j^i$, $n \times n$, similares tienen el mismo determinante.

*Demostración* La demostración es inmediata y proviene de las propiedades del determinante de un producto:

$$\det\left(\tilde{\mathbf{A}}\right) = \det\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\right) = \det\left(\mathbf{C}^{-1}\right)\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A})$$

Con lo cual es inmediato el siguiente Teorema

**Teorema** Dos matrices, $A_l^k$ y $\tilde{A}_j^i$, $n \times n$, similares tienen el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores

*Demostración* Es inmediato verificar que

$$\tilde{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{1} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\,\mathbf{C}$$

y dado que

$$\det\left(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda\mathbf{1}\right) = \det\left(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\,\mathbf{C}\right) = \det\left(\mathbf{C}^{-1}\right)\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})$$

ambas matrices, $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{A}$, tendrán el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores.

Todos los teoremas de esta sección pueden ser resumidos en el siguiente teorema

**Teorema** Sea un operador lineal $\mathbf{A} : V \to V$ y que $\dim V = n$, supongamos además que el polinomio característico tiene $n$ raíces distintas, $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Entonces tendremos que

- Los autovectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ correspondientes a los a $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, forman una base para $V$.

- La representación matricial del operador $\left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{u}_m \right\rangle$ en la base de autovectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\}$, será diagonal

$$\bar{A}^k_m = \Lambda^k_m = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{u}_m \right\rangle = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$$

- Cualquier otra representación matricial, $\left\langle \mathbf{e}^k \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_m \right\rangle$, del operador $\mathbf{A}$ en otra base de $V$, estará relacionada con la representación diagonal mediante una transformación de similaridad

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) = \left(c^i_k\right)^{-1} \left\langle \mathbf{e}^k \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_m \right\rangle\ c^m_j$$

donde $c^m_j$ es la matriz, no singular y por lo tanto invertible, de cantidades que relacionan ambas bases

$$\left.\begin{array}{r} |\mathbf{u}_j\rangle = c^l_j\, |\mathbf{e}_l\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_l\rangle = \tilde{c}^m_l\, |\mathbf{u}_m\rangle \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{c}^m_l = \left(c^m_l\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \tilde{c}^m_l c^l_j = \delta^m_j$$

*Demostración* La demostración, en términos de los teoremas anteriores es inmediata y se la dejamos como ejercicio al lector.

## 8.2. Autovalores y Autovectores de Matrices Hermíticas

Tal y como mencionamos con anterioridad un operador Hermítico cumple con

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \Longrightarrow \quad \left(A^\dagger\right)^i_j = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A}^\dagger \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^j \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_i \right\rangle^* = \left(A^j_i\right)^*$$

Esto es: el hermítico conjugado de una matriz, es su traspuesta conjugada. Por lo tanto las matrices Hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

Por su parte, llamaremos antihermítico a un operador que cumpla con

$$\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A} \quad \Longrightarrow \quad \left(A^\dagger\right)^i_j = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A}^\dagger \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = -\left\langle \mathbf{e}^j \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_i \right\rangle^* = -\left(A^j_i\right)^*$$

**Teorema** Suponga un operador Hermítico $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ tiene por autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Entonces:

- Los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son reales.
- Los autovectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\}$, correspondientes a cada uno de los autovalores, serán ortogonales.

*Demostración:*

- Para demostrar que los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son reales, proyectamos la ecuación de autovalores en cada uno de los autovectores:

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda \langle\psi |\psi\rangle$$

  Ahora bien, dado que $\langle\psi |\psi\rangle$ es real, si demostramos que $\langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle$ estará demostrado que $\lambda$ lo será también. Pero como $\mathbf{A}$ es Hermítico

$$\langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle^* = \langle\psi| \mathbf{A}^\dagger |\psi\rangle = \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle \quad \Longrightarrow \langle\psi| \mathbf{A} |\psi\rangle \in \Re$$

  y por consiguiente los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ son reales. Más aún, si $\mathbf{A}$ es Hermítico, y como sus autovalores son reales entonces

$$\langle\psi| \mathbf{A}^\dagger = \lambda^* \langle\psi| = \lambda \langle\psi| \quad \Longrightarrow \quad \langle\psi| \mathbf{A} |\phi\rangle = \lambda \langle\psi |\phi\rangle$$

- Para demostrar que los autovectores $\{|\mathbf{u}_1\rangle, \ |\mathbf{u}_2\rangle, \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$ son ortogonales, consideremos dos autovectores con sus correspondientes autovalores de tal forma que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A} |\varphi\rangle = \mu |\varphi\rangle$$

  pero como $\mathbf{A}$ es Hermítico entonces se cumple que $\langle\varphi| \mathbf{A} = \mu \langle\varphi|$ entonces multiplicando a la izquierda por $|\psi\rangle$ y a $\langle\psi| \mathbf{A} = \lambda \langle\psi|$ por $\langle\varphi|$ la derecha.

$$\left.\begin{array}{c} (\langle\varphi| \mathbf{A} = \mu \langle\varphi|) |\psi\rangle \\ \\ \langle\varphi| (\mathbf{A} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \langle\varphi| \mathbf{A} |\psi\rangle = \mu \langle\varphi |\psi\rangle \\ \\ \langle\varphi| \mathbf{A} |\psi\rangle = \langle\varphi |\psi\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow (\lambda - \mu) \langle\varphi |\psi\rangle = 0$$

  y como hemos supuesto que $\lambda \neq \mu$ con lo cual $\langle\varphi |\psi\rangle = 0$ los autovectores correspondientes a dos autovalores son ortogonales.

Existen situaciones en las cuales un determinado autovalor $\lambda = \lambda_0$ es degenerado. Consideremos una matriz $n \times n$, $A^i_j$, por lo cual el polinomio característico $P(\lambda) = \det\left[A^i_j - \lambda\delta^i_j\right] = 0$ tendrá una raíz degenerada de orden $k \leq n$. Entonces el siguiente teorema garantiza la existencia de, al menos un subespacio $S(\lambda_0) \subset V^n$

**Teorema** Sea un operador lineal $\mathbf{A} : V^n \to V^n$ con una representación matricial $n \times n$ tal que su polinomio $\mathcal{P}(\lambda) = \det\left[A^i_j - \lambda\delta^i_j\right] = 0$ tiene al menos una raíz degenerada $\lambda = \lambda_0$, de orden $k \leq n$. Entonces existen $k$ autovectores, no triviales, que cumplen con

$$\mathbf{A} |\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \qquad \text{con } j = 1, 2, \cdots, k$$

*Demostración* La demostración también emerge de una variante del *Método de Inducción Completa.* Para ello, probamos que se cumple para $j = 1$. Esta afirmación es obvia. Si existe un $\lambda = \lambda_0$ existe un $\lambda_0$ existe un $|\psi_j\rangle$, tal que cumple con la ecuación anterior el es linealmente independiente con él mismo.

Suponemos que se cumple para $1 \leq j = m \leq k$. Es decir existen $m$ autovectores $|\psi_j\rangle$ de $\mathbf{A}$ para el autovalor $\lambda_0$. Definamos un subespacio $S_{\lambda_0} = S(\lambda_0) \subset V^n$ donde

$$|\psi_j\rangle \in\in S_{\lambda_0} \quad \ni \mathbf{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \quad \Longrightarrow \mathbf{A}|\psi_j\rangle \in S_{\lambda_0} \quad \text{con } j = 1, 2, \cdots, m, \cdots k$$

por lo tanto podremos separar $V^n$ como una suma directa entre el subespacio $S_{\lambda_0}$ y, $\mathcal{N}$ su complemento ortogonal

$$V^n = S_{\lambda_0} \oplus \mathcal{N} \quad \ni \mathbf{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \quad \wedge \quad |\phi\rangle \in \mathcal{N} \quad \Longrightarrow \langle\phi\,|\psi_j\rangle = 0$$

claramente $S_{\lambda_0}$ es un subespacio invariante de $\mathbf{A}$ por cuanto su acción se circunscribe dentro del mismo subespacio $S_{\lambda_0}$. Mostraremos que, para este caso por cuanto no es verdad, en general para operadores no Hermíticos. Entonces

$$\left.\begin{array}{c} \langle\phi\,|\psi_j\rangle = 0 \\ \wedge \\ \mathbf{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0 |\psi_j\rangle \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \langle\psi_j\,|\phi\rangle = 0 = \langle\psi_j|\,\mathbf{A}^\dagger\,|\phi\rangle = \langle\psi_j|\,\mathbf{A}\,|\phi\rangle$$

de donde se concluye que el vector es ortogonal a $S_{\lambda_0}$ y por lo tanto está en el complemento ortogonal, $\mathbf{A}|\phi\rangle \in \mathcal{N}$ como, por hipótesis $|\phi\rangle \in \mathcal{N}$. Esto implica que $\mathcal{N}$ también es un espacio invariante del operador Hermítico $\mathbf{A}$. Entonces el espacio $V^n$ puede expresarse como una suma directa de los dos subespacios invariantes respecto al operador lineal $\mathbf{A}$ $V^n = S_{\lambda_0} \oplus \mathcal{N}$ y su representación matricial en la base de autovectores tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques:con lo cual

$$\left\langle \mathbf{u}^j \right| \mathbf{A}\,|\mathbf{u}_i\rangle = A^j_i \rightarrow \begin{pmatrix} Q^1_1 & \cdots & Q^1_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ Q^m_1 & & Q^m_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R^{m+1}_{m+1} & \cdots & R^{m+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R^n_{m+1} & \cdots & R^n_n \end{pmatrix}$$

donde $Q^\alpha_\beta$ y $R^\mu_\upsilon$ son matrices $m \times m$ y $(n-m) \times (n-m)$, respectivamente. La matriz $Q^\alpha_\beta$ opera en $S_{\lambda_0}$ mientras que $R^\mu_\upsilon$ actúa sobre el complemento ortogonal $\mathcal{N}$. El polinomio característico de $\mathbf{A}$ puede expresarse como

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det\left[A^i_j - \lambda\delta^i_j\right] = 0 \quad \Longrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \det\left[Q^i_j - \lambda\delta^i_j\right]\det\left[R^i_j - \lambda\delta^i_j\right] = 0$$

y como $\lambda = \lambda_0$ es la raíz múltiple del polinomio característico y que anula el det $\left[Q^i_j - \lambda\delta^i_j\right]$ tendremos que

$$\det\left[Q^i_j - \lambda_0\delta^i_j\right] = 0 \quad \Longrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) \quad \text{con } \mathcal{F}(\lambda_0) \neq 0$$

donde $\lambda_0$ no es raíz del polinomio $\mathcal{F}(\lambda)$. Ahora bien, para que se cumpla para $j = k$ el polinomio característico es

$$j = k \quad \Longrightarrow \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda) \quad \Longrightarrow (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda)$$

otra vez $\lambda_0$ no es raíz del polinomio $\mathcal{R}(\lambda)$. La ecuación anterior se cumple para todo $\lambda$ en particular para $\lambda = \lambda_0$. Por lo tanto

$$1 = (\lambda - \lambda_0)^{k-m} \frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\mathcal{F}(\lambda)}$$

Es claro que $\lambda = \lambda_0$ obliga a $k = m$

## 8.3. Autovalores y Autovectores de Matrices Unitarias

Tal y como mencionamos anteriormente, un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto. Esto es

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger} \quad \Longrightarrow \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}$$

dado que los operadores unitarios conservan la norma de los vectores sobre los cuales ellos actúan, i.e.

$$\left. \begin{array}{l} |\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{x}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{y}}\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{y}\rangle \end{array} \right\} \Longrightarrow \langle \tilde{\mathbf{y}}\, |\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \langle \mathbf{y}|\, \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}\,|\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{y}\,|\mathbf{x}\rangle$$

son naturales para representar cambios de base dentro de un espacio vectorial. De lo anterior se deduce que si $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$es una base ortonormal, el conjunto de vectores transformados, $|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle$, también son ortonormales:

$$|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle \quad \Longrightarrow \left\langle \mathbf{w}^i\, |\mathbf{w}_j\right\rangle = \left\langle \mathbf{w}^i\right|\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i\right|\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \delta^i_j$$

**Bases y operadores unitarios**

Los operadores unitarios aplican vectores base de un espacio vectorial en otra. El siguiente Teorema lo ilustra

**Teorema** La condición necesaria y suficiente para que un operador $\mathbf{U}: V^n \to V^n$ sea unitario es que aplique vectores de una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ en otra de $\{|\mathbf{w}_1\rangle\,,\ |\mathbf{w}_2\rangle\,,\ |\mathbf{w}_3\rangle\,, \cdots |\mathbf{w}_n\rangle\}$ también ortonormal.

*Demostración* Demostremos primero la condición necesaria: Si es unitario aplica una base en otra. Esto es, supongamos que los vectores $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ forman una base ortonormal para $V^n$. Sean $|\psi\rangle$, y $\mathbf{U}^{\dagger}\,|\psi\rangle \in V^n$. Estos vectores pueden ser expresados en términos de la base $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ de $V^n$. Por lo tanto, si seleccionamos $\mathbf{U}^{\dagger}\,|\psi\rangle$ se cumple que

$$\mathbf{U}^{\dagger}\,|\psi\rangle = c^j\,|\mathbf{e}_j\rangle \quad \Longrightarrow \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger}\,|\psi\rangle = c^j\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle = c^j\,|\mathbf{w}_j\rangle \quad \Longrightarrow |\psi\rangle = c^j\,|\mathbf{w}_j\rangle$$

donde hemos aplicado el operador $\mathbf{U}$ a la ecuación $\mathbf{U}^{\dagger}\,|\psi\rangle = c^j\,|\mathbf{e}_j\rangle$ y el resultado es que el otro vector, $|\psi\rangle$, también se pudo expresar como combinación lineal de los vectores transformados $\{|\mathbf{w}_j\rangle\}$ de la base $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$. Y por lo tanto los $\{|\mathbf{w}_j\rangle\}$ también constituyen una base. Es decir, los operadores unitarios aplican una base ortonormal en otra

La condición de suficiencia (Si aplica una base en otra es unitario) se puede demostrar como sigue. Si $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ y $\{|\mathbf{w}_j\rangle\}$ son bases ortonormales de $V^n$ y una es la transformada de la otra implica que

$$|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle\,; \qquad \text{y} \quad \langle\mathbf{w}_j| = \langle\mathbf{e}_j|\,\mathbf{U}^\dagger$$

con

$$\left\langle\mathbf{e}^i\,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \delta^i_j; \qquad |\mathbf{e}_j\rangle\left\langle\mathbf{e}^j\right| = \mathbf{1} \qquad \left\langle\mathbf{w}^i\,|\mathbf{w}_j\right\rangle = \delta^i_j; \qquad |\mathbf{w}_j\rangle\left\langle\mathbf{w}^j\right| = \mathbf{1}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{w}_j\rangle = |\mathbf{e}_k\rangle\left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{w}_j\rangle = |\mathbf{e}_k\rangle\left\langle\mathbf{w}^k\,|\mathbf{w}_j\right\rangle = |\mathbf{e}_k\rangle\,\delta^k_j = |\mathbf{e}_j\rangle$$

Esto significa que $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{1}$. De un modo equivalente, se puede demostrar que $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$. Veamos:

$$\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{e}_j\rangle = |\mathbf{e}_k\rangle\left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{e}_j\rangle = |\mathbf{e}_k\rangle\left\langle\mathbf{w}^k\,|\mathbf{e}_j\right\rangle$$

y ahora, aplicando el operador $\mathbf{U}$ a esta ecuación, tenemos

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{e}_j\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{e}_k\rangle\left\langle\mathbf{w}^k\,|\mathbf{e}_j\right\rangle = |\mathbf{w}_k\rangle\left\langle\mathbf{w}^k\,|\mathbf{e}_j\right\rangle = |\mathbf{e}_j\rangle$$

Esto significa que está demostrado que $\mathbf{U}$ es unitario: $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$.

**Matrices unitarias**

La representación de una matriz unitaria en una base $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ implica

$$U^k_j = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle\,; \quad \langle\mathbf{e}^\mathbf{m}|\,\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{e}_j\rangle = \left\langle\mathbf{e}^\mathbf{j}\right|\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_m\rangle^* = \left(U^j_m\right)^*$$

$$\delta^k_j = \left\langle\mathbf{e}^k\,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{1}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{e}_j\rangle = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_\mathbf{m}\rangle\,\langle\mathbf{e}^\mathbf{m}|\,\mathbf{U}^\dagger\,|\mathbf{e}_j\rangle = \sum_m U^k_m\left(U^j_m\right)^*$$

$$\delta^k_j = \left\langle\mathbf{e}^k\,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{1}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \left\langle\mathbf{e}^k\right|\mathbf{U}^\dagger|\mathbf{e}_\mathbf{m}\rangle\,\langle\mathbf{e}^\mathbf{m}|\,\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_j\rangle = \sum_m \left(U^m_k\right)^* U^m_j$$

Una vez más, dado un operador lineal $\mathbf{A}$, la representación matricial del Hermítico conjugado de ese operador $\mathbf{A}^\dagger$ es la traspuesta conjugada de la matriz que representa al operador $\mathbf{A}$. En el caso de operadores unitarios.

Con lo cual es fácilmente verificable que una matriz sea unitaria. Basta comprobar que la suma de los productos de los elementos de una columna (fila) de la matriz con los complejos conjugados de otra columna (fila). Esa suma de productos será

1. cero si las columnas (filas) son distintas
2. uno si las columnas (filas) son iguales

Ejemplos de matrices unitarias son las llamadas matrices de rotación. Alrededor del eje $z$ tendremos que

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y también la matriz de rotación de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ en el espacio de estados

$$R^{(1/2)}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\beta & -e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\operatorname{sen}\beta \\ e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\operatorname{sen}\beta & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\beta \end{pmatrix}$$

claramente se cumple la regla expuesta arriba.

**Autovalores y Autovectores de Matrices Unitarias**
Si $|\psi_u\rangle$ es un autovector, normalizado del operador $\mathbf{U}$ correspondiente a un autovalor $u$ tendremos que norma al cuadrado será igual a

$$\mathbf{U}|\psi_u\rangle = u|\psi_u\rangle \quad \Longrightarrow \langle\psi^u|\,\mathbf{U}^\dagger\mathbf{U}\,|\psi_u\rangle = 1 = u^*u\,\langle\psi^u\,|\psi_u\rangle = u^*u \quad \Longrightarrow u = e^{i\varphi_u}$$

con $\varphi_u$ una función real. Por lo cual podemos concluir que, necesariamente, los autovalores de los operadores unitarios serán números complejos de módulo 1. Cuando los autovalores son diferentes, digamos $u' \neq u$, entonces $\left\langle\psi^{u'}\,|\psi_u\right\rangle = 0$. Con lo cual los autovectores de un operador unitarios son ortogonales.

**Transformación unitaria de Operadores** Hemos visto como las transformaciones unitarias permiten construir bases ortogonales $\{|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ para el espacio vectorial $V^n$ partiendo de otra base $\{|\mathbf{e}_m\rangle\}$ también ortogonal. En esta subsección mostraremos como transforman los operadores lineales bajo transformaciones unitarias.

Definición Dadas dos bases ortonormales $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ y $\{|\mathbf{w}_k\rangle\}$ en $V^n$ con $|\mathbf{w}_j\rangle = \mathbf{U}|\mathbf{e}_j\rangle$, un operador lineal unitario $\mathbf{U}: V^n \rightarrow V^n$.y un operador lineal $\mathbf{A}: V^n \rightarrow V^n$. Definiremos al operador transformado $\tilde{\mathbf{A}}: V^n \rightarrow V^n$ como aquel cuya representación matricial en la base $\{|\mathbf{w}_k\rangle\}$ es la misma que en la base $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$: $\left\langle\mathbf{w}^j\right|\tilde{\mathbf{A}}\,|\mathbf{w}_i\rangle = \left\langle\mathbf{e}^j\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$

A partir de esta definición es fácil concluir que

$$\left\langle\mathbf{w}^j\right|\tilde{\mathbf{A}}\,|\mathbf{w}_i\rangle = \left\langle\mathbf{e}^j\right|\mathbf{U}^\dagger\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U}\,|\mathbf{e}_i\rangle = \left\langle\mathbf{e}^j\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle \quad \Longrightarrow \mathbf{U}^\dagger\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{U} = \mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger$$

Por lo tanto la ecuación $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^\dagger$ corresponde a la definición de la transformación de un operador $\mathbf{A}$ mediante un operador unitario $\mathbf{U}^\dagger$. Es fácil identificar las propiedades de estos operadores transformados. Veamos

**Hermítico conjugado y Funciones de un Operador transformado:**

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^{\dagger} = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{U} = \widetilde{(\mathbf{A}^{\dagger})}$$

en particular se sigue de esta propiedad que si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger}$, es Hermítico también lo será $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\dagger} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{A}} = \left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^{\dagger}$$

Del mismo modo

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^{2} = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{\dagger}\right)\left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{\dagger}\right) = \mathbf{U}\mathbf{A}^{2}\mathbf{U}^{\dagger} = \widetilde{(\mathbf{A}^{2})}$$

con lo cual

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)^{n} = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{\dagger}\right)\overset{n-2}{\cdots}\left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{\dagger}\right) = \mathbf{U}\mathbf{A}^{n}\mathbf{U}^{\dagger} = \widetilde{(\mathbf{A}^{n})} \quad \Longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{A}) = \mathcal{F}\left(\tilde{\mathbf{A}}\right)$$

donde $\mathcal{F}(\mathbf{A})$ es una función del operador $\mathbf{A}$.

**Autovalores y autovectores de un operador transformado** Sera un autovector $|\phi_\chi\rangle$ de $\mathbf{A}$ correspondiente a un autovalor $\chi$, y sea $\left|\tilde{\phi}_\chi\right\rangle$ el transformado de $|\phi_\chi\rangle$ mediante el operador unitario $\mathbf{U}$. Entonces

$$\mathbf{A}|\phi_\chi\rangle = \chi|\phi_\chi\rangle \quad \Longrightarrow \tilde{\mathbf{A}}\left|\tilde{\phi}_\chi\right\rangle = \left(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{\dagger}\right)\mathbf{U}|\phi_\chi\rangle = \mathbf{U}\mathbf{A}|\phi_\chi\rangle = \chi\mathbf{U}|\phi_\chi\rangle = \chi\left|\tilde{\phi}_\chi\right\rangle$$

con lo cual es claro que $\left|\tilde{\phi}_\chi\right\rangle$ es un autovector de $\tilde{\mathbf{A}}$ con el mismo autovalor $\chi$ : $\left|\tilde{\phi}_\chi\right\rangle = \chi\left|\tilde{\phi}_\chi\right\rangle$. Equivalentemente podemos afirmar que los autovectores transformados de $\mathbf{A}$, serán autovectores del operador transformado, $\tilde{\mathbf{A}}$.

## 9. Conjunto Completo de Observables que conmutan

Definición Diremos que un operador $\mathbf{A} : V^n \to V^n$ es un *observable* si el conjunto de autovectores $\left\{\left|\mathbf{u}_{i|\mu}\right\rangle\right\}$ de un operador Hermítico $\mathbf{A}$, forman una base de $V^n$.

$$\mathbf{A}\left|\mathbf{u}_{i\ (\mu)}\right\rangle = a_i\left|\mathbf{u}_{i\ (\mu)}\right\rangle \quad \Longrightarrow \left|\mathbf{u}_{i\ (\mu)}\right\rangle\left\langle\mathbf{u}^{i\ (\mu)}\right| = \mathbf{1} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle\mathbf{u}^{i\ (\mu)}\right|\left.\mathbf{u}_{j\ (\nu)}\right\rangle = \delta^i_j\delta^\mu_\nu$$

donde el índice $\mu$ indica el grado de degeneración del autovalor $a_i$.

Un ejemplo trivial de un observable lo constituyen los proyectores, $\mathbf{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$ con $\langle\psi|\ \psi\rangle = 1$. Claramente, la ecuación de autovalores para un proyector obliga a que tenga dos autovalores 0 y 1. El autovalor nulo es infinitamente degenerado y está asociado a todos los vectores ortogonales a $|\psi\rangle$, mientras que el autovalor 1 corresponde a un autovalor simple y está asociado a todos los vectores colineales al mismo vector $|\psi\rangle$. Esto es

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{P}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = 0 \quad \text{si} \ \langle\psi|\ \phi\rangle = 0$$

Más aún, sea un vector arbitrario $|\varphi\rangle \in V^n$. Siempre se podrá expresar como

$$|\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle + \left(\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}\right) |\varphi\rangle \quad \Longrightarrow \mathbf{P}_{|\psi\rangle} \left(|\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle + \left(\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}\right) |\varphi\rangle\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} \left(\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle\right) + \left(\mathbf{P}_{|\psi\rangle} - \mathbf{P}^2_{|\psi\rangle}\right) |\varphi\rangle = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle \quad \Longrightarrow \mathbf{P}_{|\psi\rangle} \left(\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle\right) = \mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle$$

ya que $\mathbf{P}^2_{|\psi\rangle} = \mathbf{P}_{|\psi\rangle}$, por definición de proyector. Entonces, se deduce que $\mathbf{P}_{|\psi\rangle} |\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbf{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 1. Igualmente $\left(\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}\right) |\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbf{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 0, y la demostración es inmediata

$$\mathbf{P}_{|\psi\rangle} \left(\mathbf{1} - \mathbf{P}_{|\psi\rangle}\right) |\varphi\rangle = \left(\mathbf{P}_{|\psi\rangle} - \mathbf{P}^2_{|\psi\rangle}\right) |\varphi\rangle = 0$$

Para el caso de autoespacios correspondientes a autovalores degenerados se puede definir un observable $\mathbf{A}$ de la forma

$$\mathbf{A} = \sum_i a_i \mathbf{P}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{P}_i = \left(\left|\psi_{\cdot\ (\mu)}\right\rangle \left\langle \psi^{\cdot\ (\mu)}\right|\right)_i \quad \text{y } \mu = 1, 2, \cdots, k$$

**Observables que Conmutan**

**Teorema** Si dos operadores lineales $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, operadores Hermíticos, conmutan, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$,y $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbf{A}$ con autovalor $a$, entonces $\mathbf{B}|\psi\rangle$ también será autovector de $\mathbf{A}$ con el mismo autovalor $a$.

*Demostración* La demostración es sencilla

$$\mathbf{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \quad \Longrightarrow \mathbf{B}(\mathbf{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle) \quad \Longrightarrow \mathbf{BA}|\psi\rangle = \mathbf{A}(\mathbf{B}|\psi\rangle) = a(\mathbf{B}|\psi\rangle)$$

Ahora bien, de esta situación se pueden distinguir un par de casos:

- si el autovalor $a$ es no degenerado los autovectores asociados con este autovalor son, por definición, colineales con $|\psi\rangle$. Por lo tanto $\mathbf{B}|\psi\rangle$, será necesariamente colineal con $|\psi\rangle$. La conclusión a esta afirmación es que NECESARIAMENTE $|\psi\rangle$ es autovector de $\mathbf{B}$
- si el autovalor $a$ se degenerado, $\mathbf{B}|\psi\rangle \in S_a$, es decir $\mathbf{B}|\psi\rangle$ está en el autoespacio $S_a$ con lo cual $S_a$ es globalmente invariante bajo la acción de $\mathbf{B}$.

**Teorema** Si dos observables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de $\mathbf{A}$ para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\left\langle \psi^1 \right| \mathbf{B} |\psi_2\rangle = 0$

Demostración Si $\mathbf{A}|\psi_1\rangle = a_1|\psi_1\rangle$ y $\mathbf{A}|\psi_2\rangle = a_2|\psi_2\rangle$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \psi^1 \right| [\mathbf{A}, \mathbf{B}] |\psi_2\rangle = \left\langle \psi^1 \right| \mathbf{AB} - \mathbf{BA} |\psi_2\rangle = \left(\left\langle \psi^1 \right| \mathbf{A}\right) \mathbf{B} |\psi_\mathbf{2}\rangle - \left\langle \psi^\mathbf{1} \right| \mathbf{B} (\mathbf{A} |\psi_2\rangle) \\ &= a_1 \left\langle \psi^1 \right| \mathbf{B} |\psi_2\rangle - a_2 \left\langle \psi^1 \right| \mathbf{B} |\psi_2\rangle = (a_1 - a_2) \left\langle \psi^1 \right| \mathbf{B} |\psi_2\rangle \quad \Longrightarrow \left\langle \psi^1 \right| \mathbf{B} |\psi_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

**Teorema** Si dos observables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, operadores Hermíticos, conmutan, $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = 0$, los autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ comunes a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ constituyen una base ortonormal para $V^n$.

*Demostración* Denotemos los autovectores de $\mathbf{A}$ como $\left|\psi_{i\ (\mu)}\right\rangle$, de tal modo

$$\mathbf{A}\left|\psi_{i\ (\mu)}\right\rangle = a_i\left|\psi_{i\ (\mu)}\right\rangle \quad \text{donde } i = 1,2,..,n-k_n \quad \text{y } \mu = 1,2,..,k_n$$

$k_n$ indica el orden de la degeneración de un determinado autovalor $a_n$. Dado que $\mathbf{A}$ es un observable los $\left|\psi_{i\ (\mu)}\right\rangle$ forman base los Claramente,

$$\left\langle\psi^{i\ (\mu)}\right.\left|\psi_{j\ (\nu)}\right\rangle = \delta^i_j\delta^\mu_\nu$$

y dado que los elementos de matriz $\left\langle\psi^{i\ (\mu)}\right|\mathbf{B}\left|\psi_{j\ (\nu)}\right\rangle = \delta^i_j$ esto quiere decir que los elementos $\left\langle\psi^{i\ (\mu)}\right|\mathbf{B}\left|\psi_{j\ (\nu)}\right\rangle = B^{i\ (\mu)}_{j\ (\nu)}$ serán nulos para $i \neq j$ pero no podemos decir nada *a priori* para el caso $\mu \neq \upsilon$ y $i = j$. Entonces, al ordenar la base, en general

$$\left|\psi_{1\ (1)}\right\rangle, \left|\psi_{1\ (2)}\right\rangle, \cdots \left|\psi_{1\ (k_1)}\right\rangle, \left|\psi_{2\ (1)}\right\rangle, \left|\psi_{2\ (2)}\right\rangle, \cdots, \left|\psi_{2\ (k_2)}\right\rangle, \cdots, \left|\psi_{3\ (1)}\right\rangle, \cdots \left|\psi_{n-k_n\ (1)}\right\rangle$$

para el caso que consideraremos será

$$\left|\psi_{1\ (1)}\right\rangle, \left|\psi_{1\ (2)}\right\rangle, \left|\psi_{1\ (3)}\right\rangle, \left|\psi_{2\ (1)}\right\rangle, \left|\psi_{2\ (2)}\right\rangle, \left|\psi_{3\ (1)}\right\rangle, \left|\psi_{4\ (1)}\right\rangle, \left|\psi_{4\ (2)}\right\rangle, \left|\psi_{5\ (1)}\right\rangle$$

y la representación matricial de $\mathbf{B}$ en esa base, $\left\langle\psi^{i\ (\mu)}\right|\mathbf{B}\left|\psi_{j\ (\nu)}\right\rangle$, tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques

$$\begin{pmatrix}
B^{1\ (1)}_{1\ (1)} & B^{1\ (1)}_{1\ (2)} & B^{1\ (1)}_{1\ (3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B^{1\ (2)}_{1\ (1)} & B^{1\ (2)}_{1\ (2)} & B^{1\ (2)}_{1\ (3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B^{1\ (3)}_{1\ (1)} & B^{1\ (3)}_{1\ (2)} & B^{1\ (3)}_{1\ (3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & B^{2\ (1)}_{2\ (1)} & B^{2\ (1)}_{2\ (2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & B^{2\ (2)}_{2\ (1)} & B^{2\ (2)}_{2\ (2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{3\ (1)}_{3\ (1)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{4\ (1)}_{4\ (1)} & B^{4\ (1)}_{4\ (2)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{4\ (2)}_{4\ (1)} & B^{4\ (2)}_{4\ (2)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B^{5\ (1)}_{5\ (1)}
\end{pmatrix}$$

Tal y como hemos mencionado los subespacios: $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, y $\mathcal{E}_4$ corresponden a los autovalores degenerados $a_1, a_2$, y $a_4$ (de orden $3, 2$ y $2$ respectivamente).
Una vez más surgen dos casos a analizar

- Si $a_n$ es un autovalor no degenerado, entonces existe un único autovector asociado a este autovalor (la dimensión del autoespacio es 1 esto es $k_j = 1$ y no hace falta). Esto corresponde al ejemplo hipotético de arriba para los autovalores simples $a_3$, y $a_5$

- Si $a_n$ es un autovalor degenerado, entonces existe un conjunto de autovectores asociados a este autovalor $a_n$ (en este caso la dimensión del autoespacio es $k_n$). Como los $\left|\psi_{j\ (\mu)}\right\rangle$ son autovectores de $\mathbf{A}$ su representación matricial seré diagonal a bloques. Ahora bien, como el autoespacio $S_a$ es globalmente invariante bajo la acción de $\mathbf{B}$ y $B^{i\ (\mu)}_{j\ (\mu)} = \left\langle \psi^{i\ (\mu)}\right| \mathbf{B} \left|\psi_{j\ (\mu)}\right\rangle$ es Hermítico, por ser $\mathbf{B}$ Hermítico entonces $\mathbf{B}$ es diagonalizable dentro del bloque que la define. Es decir, se podrá conseguir una base $\left|\chi_{j\ (\mu)}\right\rangle$ tal que la representación matricial de $\mathbf{B}$ en esa base es diagonal

$$B^{i\ (\mu)}_{j} = \left\langle \psi^{i\ (\mu)}\right| \mathbf{B} \left|\psi_{j\ (\mu)}\right\rangle \quad \Longrightarrow \left\langle \chi^{i\ (\mu)}\right| \mathbf{B} \left|\chi_{j\ (\mu)}\right\rangle = \tilde{B}^{i\ (\mu)}_{j\ (\mu)} = b_{j\ (\mu)}\delta^i_j$$

que no es otra cosa que los vectores $\left|\chi_{j\ (\mu)}\right\rangle$ serán autovectores de $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}\left|\chi_{j\ (\mu)}\right\rangle = b_{j\ (\mu)}\left|\chi_{j\ (\mu)}\right\rangle$$

Es importante recalcar que los autovectores $\left|\psi_{j\ (\mu)}\right\rangle$ de $\mathbf{A}$ asociados con un autovalor degenerado NO son necesariamente autovectores de $\mathbf{B}$. Sólo que como $\mathbf{B}$ es Hermítico puede ser diagonalizado dentro del autoespacio.

De ahora en adelante denotaremos los autovectores comunes a dos operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ con distintos autovalores como $\left|u_{i|j\ (\mu)}\right\rangle$ tal que

$$\mathbf{A}\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = a_n\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = b_m\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle$$

donde hemos dejado "espacio" para permitir la degeneración la cual será indicada por el índice $\mu$

La prueba del inverso del teorema anterior es bien simple

**Teorema** Si existe una base de autovectores$\left\{\left|u_{j\ (\mu)}\right\rangle\right\}$ comunes a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan, $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = 0$

*Demostración* Es claro que

$$\mathbf{AB}\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = b_m\mathbf{A}\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = b_m a_n\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle$$
$$\mathbf{BA}\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = a_n\mathbf{B}\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = a_n b_m\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle$$

restando miembro a miembro obtenemos de manera inmedita

$$(\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = (b_m a_n - a_n b_m)\left|u_{n|m\ (\mu)}\right\rangle = 0$$

Definición Diremos que $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\cdots\}$ constituye un conjunto completo de observables que conmuntan si

1. Obviamente los operadores del conjunto conmuntan entre ellos:
   $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = [\mathbf{A},\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{D}] = [\mathbf{B},\mathbf{C}] = [\mathbf{B},\mathbf{D}] = [\mathbf{C},\mathbf{D}] = \cdots = 0$

2. Al especificar el conjunto de autovalores para los operadores $\{a_n, b_m, c_k, d_l, \cdots\}$ se especifica **de manera unívoca** un único autovetor común a todos estos operadores
$$\{a_n, b_m, c_k, d_l, \cdots\} \quad \Longrightarrow \left|u_{n|m|k|l\cdots\ (\mu)}\right\rangle$$

Analicemos el siguiente ejemplo. Considere, que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por una base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ . Definimos dos operadores $\mathbf{L}_z$y $\mathbf{S}$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcc} \mathbf{L}_z|u_1\rangle = |u_1\rangle\,; & \mathbf{L}_z|u_2\rangle = 0; & \mathbf{L}_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle \\ \mathbf{S}|u_1\rangle = |u_3\rangle\,; & \mathbf{S}|u_2\rangle = |u_2\rangle\,; & \mathbf{S}|u_3\rangle = |u_1\rangle \end{array}$$

En la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ las representaciones matriciales para $\mathbf{L}_z, \mathbf{L}_z^2, \mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^2$ serán las siguientes

$$\left\langle u^i\right|\mathbf{L}_z|u_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \left\langle u^i\right|\mathbf{L}_z^2|u_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle u^i\right|\mathbf{S}|u_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\langle u^i\right|\mathbf{S}^2|u_j\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que estas matrices son reales y simétricas y, por lo tanto, son Hermíticas y al ser el espacio de dimensión finita deben ser diagonalizables y sus autovectores formarán base para ese espacio. Por lo tanto, $\mathbf{L}_z, \mathbf{L}_z^2, \mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^2$ son observables.

¿ Cuál será la forma más general de una representación matricial de un operador que conmunte con $\mathbf{L}_z$ ?
Notamos que los vectores de la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ son autovectores para $\mathbf{L}_z$ con autovalores $\{1, 0, -1\}$ con lo cual su representación matricial tiene que ser diagonal. Recuerde que si dos observables $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de $\mathbf{A}$ para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\left\langle \psi^1\right|\mathbf{B}|\psi_2\rangle = 0$, con lo cual

$$\left\langle u^i\right|\mathbf{M}|u_j\rangle = \begin{pmatrix} M_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^3 \end{pmatrix},$$

Si nos planteamos la misma pregunta para $\mathbf{L}_z^2$, tenemos que conocer cuáles son sus autovalores y autovectores.

Consideremos otro ejemplo proveniente de la Mecánica Clásica. Se trata de dos osciladores armónicos, de igual masa, acoplados con resortes con la misma constante elástica $k$[7]. La ecuaciones

[7]Pueden consultar una animación bien interesante y simular en http://qbx6.ltu.edu/s_schneider/physlets/main/coupledosc.shtml

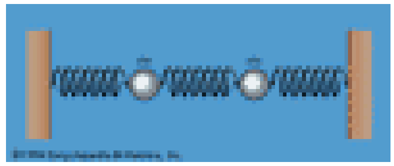

Figura 1: Osciladores armónicos acoplados

de movimiento para este sistema son

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 - k(x_2 - x_1) = 0 \quad \text{y} \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

con lo cual podremos expresar esta ecuación en forma de operadores

$$\mathbf{D}\left|\mathbf{x}\right\rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} m\frac{d^2}{dt^2} + 2k & -k \\ -k & m\frac{d^2}{dt^2} + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0$$

Si pensamos esta ecuación como una ecuación de autovalores, el autovalor es claramene $\lambda = 0$ y como las masas y las constantes elásticas son iguales podemos intercambiar las partículas y la física (las ecuaciones de movimiento) no cambian. Esto se puede expresar matemáticamente como el operador permutación de las partículas

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

Es inmediato comprobar que $[\mathbf{D}, \mathbf{P}] = 0$ con lo cual existirá una combinación lineal de autovectores de $\mathbf{D}$ (asociados con el autovalor $\lambda = 0$ ) los cuales también serán autovectores de $\mathbf{P}$. Para ello procedamos a calcular los autovalores y autovectores de $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}\left|\mathbf{x}\right\rangle = \lambda\left|\mathbf{x}\right\rangle \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \lambda \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\mathbf{u}_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \left|\mathbf{u}_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

fácilmente podemos expresar el vector posición como una combinación lineal de estos dos autovectores de $\mathbf{P}$. Esto es

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

Es claro que

$$\left|\mathbf{u}_1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{y} \qquad \left|\mathbf{u}_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

son autovectores de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{D}$

## Referencias

[1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) `QA300 A66C3 1972`

[2] Arfken, G. B. y Weber, H. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[3] Cohen-Tannoudji, C., Diu B. y Laloë (1977) **Quantum Mechanics** Vol 1 (*John Wiley Interscience, Nueva York*)

[4] Gelfand, I.M. (1961) **Lectures on Linear .Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[5] Jordan, T.F. (1969) **Linear Operator for Quantum Mechanics** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[6] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)