Octubre 2007

Nombre____

1. Dados los siguientes puntos en el espacio $(1,0,3);(2,-1,0);(0,-1,1);(-1,0,1)$.

   a) Considere los tres primeros puntos. ¿ Estos tres puntos son coplanares ? ¿ por qué ? De ser coplanares,

Solución: *Tres puntos en el espacio definen un plano, por lo tanto siempre serán coplanares*

1) Encuentre el área del triángulo que tiene por vértices esos tres puntos

Solución: *Para ello seleccionamos uno de los puntos como un vértice privilegiado (digamos* $(2,-1,0)$*) respecto al cual construirémos dos vectores que representan dos de los lados del triángulo. Esto es*

$$\vec{a} = (1,0,3) - (2,-1,0) \leftrightarrow \vec{a} = -1\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

y

$$\vec{b} = (0,-1,1) - (2,-1,0) \leftrightarrow \vec{b} = -2\hat{\imath} + \hat{k}$$

con lo cual, el área del vértice será la mitad del área del paralelogramo que tiene por lados estos dos vectores. Es decir

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{a}\times\vec{b}\| \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}-5\hat{\jmath}+2\hat{k} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\|\hat{\imath}-5\hat{\jmath}+2\hat{k}\| = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

2) Encuentre la ecuación del plano que los contiene

Solución: *La ecuación del plano vendrá dada por*

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0$$

donde

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}, \quad \vec{r}_1 = \hat{\imath} + 3\hat{k}, \quad \vec{r}_2 = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath}, \quad \vec{r}_3 = -\hat{\jmath} + \hat{k},$$

con lo cual la ecuación del plano queda como

$$\begin{vmatrix} (x-1) & y & (z-3) \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow -(x-1)+5y-2(z-3) = 0 \quad \Rightarrow x-5y+2z = 7$$

(4 puntos)

b) Considere los cuatro puntos ¿ Estos cuatro puntos son coplanares ? ¿ por qué ? De NO ser coplanares, encuentre la distancia del cuarto punto al posible plano que contiene a los otros tres. (2 puntos)

Solución: *Para verificar si el cuarto punto está en el plano, verificamos si cumple la ecuación que lo define*

$$(-1) - 5(0) + 2(1) \neq 7$$

los cuatro puntos no son coplanares. Para calcular la distancia del cuarto punto al plano construyo el vector unitario normal al plano

$$\vec{n}_P = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k} \right) d = \vec{n}_P \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k} \right) \cdot \left(-3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} \right)$$

con lo cual la distancia al cuarto punto será

$$d = \vec{n}_P \cdot \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{30}} \left(\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k} \right) \cdot \left(-3\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} \right) = -\frac{6}{\sqrt{30}}$$

2. Considere los siguientes tres vectores

$$\vec{w}_1 = \hat{\imath} + 3\hat{k} \quad \vec{w}_2 = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} \quad \vec{w}_3 = -\hat{\jmath} + \hat{k}$$

a) ¿ Forman una base para $\mathbb{R}^3$? Explique detalladamente

Solución: *Son linealmente independientes, estos es*

$$\alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2 + \gamma \vec{w}_3 = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

que se comprueba directamente al resolver

$$\begin{array}{cccc} \alpha & +2\beta & & = 0 \\ & -3\beta & -\gamma & = 0 \\ 3\alpha & & +\gamma & = 0 \end{array}$$

b) Si es que forman base, exprese el vector $\vec{a} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ en la posible base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

Solución: *Como son linealmente independientes, forman base, con lo cual cualquier vector puede ser expresado como combinación lineal de estos tres. Eso es:*

$$\vec{a} = \alpha \vec{w}_1 + \beta \vec{w}_2 + \gamma \vec{w}_3 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha & +2\beta & & = 1 \\ & -3\beta & -\gamma & = -3 \\ 3\alpha & & +\gamma & = 3 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ \\ \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = 2 \end{array} \right.$$

(4 puntos)

3. Utilizando la notación de índices muestre si se cumple la siguiente identidad
$\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) + \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b}$

Solución:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \epsilon^{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}a^l b^m) = (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l)\partial_j(a^l b^m) = \partial_m(a^i b^m) - \partial_l(a^l b^i)$$

expandiendo la derivada

$$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = b^m\partial_m(a^i)+a^i\partial_m(b^m)-b^i\partial_l(a^l)-a^l\partial_l(b^i) \equiv (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b}$$

(3 puntos)

4. La trayectoria de un punto en el plano vista por un observador 1 es

$$\vec{r}_1(t) = 5\cos 3t^2\ \hat{\imath} + 5\,\mathrm{sen}\, 3t^2\ \hat{\jmath}$$

   a) Exprese las aceleraciones radiales y tangenciales de esta partícula

Solución: *Es claro que la partícula describe un movimiento circular donde* $\theta(t) = 3t^2$

$$\vec{r}(t) = 5\hat{u}_r \quad \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = 5\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta = 30t\ \hat{u}_\theta \quad \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = 30\ \hat{u}_\theta - 30t\ \hat{u}_r$$

   b) Considere ahora un segundo observador, el cual describe una trayectoria respecto al primero representada por

$$\vec{r}_{21}(t) = (t^3 - 4t)\hat{\imath} + (t^2 + 4t)\ \hat{\jmath}$$

   Encuentre las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula medidos respecto al segundo observador

Solución: *La trayectoria de la partícula respecto al segundo observador será*

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_{21}(t) = 5\cos 3t^2\ \hat{\imath} + 5\,\mathrm{sen}\, 3t^2\ \hat{\jmath} - ((t^3 - 4t)\hat{\imath} + (t^2 + 4t)\ \hat{\jmath})$$

con lo cual

$$\vec{r}_2(t) = (5\cos 3t^2 - (t^3 - 4t))\hat{\imath} + (5\,\mathrm{sen}\, 3t^2 - (t^2 + 4t))\hat{\jmath}$$

entonces

$$\vec{v}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2(t)}{\mathrm{d}t} = (30t\ \cos 3t^2 - (3t^2 - 4))\hat{\imath} + (30t\ \mathrm{sen}\, 3t^2 - (2t + 4))\hat{\jmath}$$

y

$$\vec{a}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_2(t)}{\mathrm{d}t} = (30\ \cos 3t^2 - 180t^t\ \mathrm{sen}\, 3t^2 - 6t)\hat{\imath} + (30\ \mathrm{sen}\, 3t^2 - 180t^2\ \cos 3t^2 - 2)\hat{\jmath}$$

(6 puntos)

5. El campo de fuerzas del oscilador armónico anisótropo bidimensional se escribe como

$$\vec{F} = -k_1 x \hat{\imath} + k_2 y \hat{\jmath}$$

Encuentre el trabajo realizado, $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ a lo largo de las siguientes trayectorias

Solución: *En general*

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{(1,1)}^{(4,4)} (\mathrm{d}x\ \hat{\imath} + \mathrm{d}y\ \hat{\jmath}) \cdot \left(-k_1 x \hat{\imath} + k_2 y \hat{\jmath}\right) = -\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}x\ k_1 x + \int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}y\ k_2 y$$

a) $(1,1) \to (4,1) \to (4,4)$

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F} = -\int_{(1,1)}^{(4,1)} \mathrm{d}x\ k_1 x + \int_{(4,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}y\ k_2 y = -\left.\frac{1}{2} k_1 x^2\right|_1^4 + \left.\frac{1}{2} k_2 y^2\right|_1^4 = \frac{15}{2}(k_2 - k_1)$$

b) $(1,1) \to (1,4) \to (4,4)$

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{(1,1)}^{(1,4)} \mathrm{d}y\ k_2 y - \int_{(1,4)}^{(4,4)} \mathrm{d}x\ k_1 x = \left.\frac{1}{2} k_2 y^2\right|_1^4 - \left.\frac{1}{2} k_1 x^2\right|_1^4 = \frac{15}{2}(k_2 - k_1)$$

c) $(1,1) \to (4,4)$ para $x = y$

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_1^4 \mathrm{d}x\ (k_2 - k_1)\, x = \left.\frac{1}{2}(k_2 - k_1)\, x^2\right|_1^4 = \frac{15}{2}(k_2 - k_1)$$

(6 puntos)