Octubre 2007

Nombre____

1. ¿ Cuál de los siguientes polinomios:

   a) $x^2 - 2x + 1$;
   b) $x^4 + 1$;
   c) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$;

   pertenece al subespacio de $\mathcal{P}$ generado por:
   $|\mathbf{x1}\rangle = x^3 + 2x + 1$; $\quad |\mathbf{x2}\rangle = x^2 - 2$; $\quad |\mathbf{x3}\rangle = x^3 + x$; (3 puntos)

Solución: En general

$$\forall\ |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{S}_3 \quad \Rightarrow |\mathbf{v}\rangle = \alpha|\mathbf{x1}\rangle + \beta|\mathbf{x2}\rangle + \gamma|\mathbf{x3}\rangle \qquad \text{si en principio} \qquad |\mathbf{v}\rangle \leftrightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Entonces

$$|\mathbf{v}\rangle = \alpha|\mathbf{x1}\rangle + \beta|\mathbf{x2}\rangle + \gamma|\mathbf{x3}\rangle \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha + \gamma & = a_3 \\ \beta & = a_2 \\ 2\alpha + \gamma & = a_1 \\ \alpha - 2\beta & = a_0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha & = a_1 - a_3 \\ \beta & = a_2 \\ \gamma & = 2a_3 - a_1 \\ a_1 - a_3 - 2a_2 & = a_0 \end{array} \right.$$

Es decir, los coeficientes de los polinomios que pertenezcan a este subespacio, $\mathbf{S}_3$, deberán cumplir con $a_1 - a_3 - 2a_2 = a_0$ y ninguno lo cumple.

2. Las matrices σ_x, σ_y, σ_z se conocen con el nombre de matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Muestre si las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{1}$ son linealmente independientes (3 ptos.).
   b) ¿ Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas $2x2$? ¿ por qué ? Si forman base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   en términos de esa base (3ptos)

Solución: Una vez más

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implica

$$\left.\begin{array}{rl} \gamma+\delta & = 0 \\ \alpha - i\beta & = 0 \\ \alpha + i\beta & = 0 \\ -\gamma+\delta & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Con lo cual son linealmente independientes, entonces formn base y cualquier matriz, 2×2 compleja podrá expresarse como combinación lineal de ellas. Esto es

$$\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left.\begin{array}{rl} \gamma+\delta & = 3 \\ \alpha - i\beta & = i \\ \alpha + i\beta & = 5 \\ -\gamma+\delta & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \delta & = 2 \\ \alpha & = \frac{1}{2}(5+i) \\ \beta & = \frac{1}{2}(1-i5) \\ \gamma & = 1 \end{array}\right.$$

3. Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = a\,|\mathbf{i}\rangle + b\,|\mathbf{j}\rangle\,; \qquad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = c\,|\mathbf{i}\rangle + d\,|\mathbf{j}\rangle$$

a) Encuentre la expresión para un vector genérico $\vec{v} = |\mathbf{v}\rangle = v_x\,|\mathbf{i}\rangle + v_y\,|\mathbf{j}\rangle$ en estas coordenadas (2 ptos.)

Solución Para encontrar la expresión para $\vec{v} = |\mathbf{v}\rangle = v_x\,|\mathbf{i}\rangle + v_y\,|\mathbf{j}\rangle$ encontramos las expresiones de los vectores de la base canónica $\{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle\}$, en términos de la base genérica $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\}$. Esto es

$$|\mathbf{i}\rangle = \frac{d}{da-bc}\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle - \frac{b}{da-bc}\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle \qquad |\mathbf{j}\rangle = \frac{c}{cb-da}\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle - \frac{b}{cb-da}\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle$$

con lo cual

$$\vec{v} = |\mathbf{v}\rangle = \left(\frac{v_x d - v_y c}{da-bc}\right)|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle - \left(\frac{v_x b - v_y a}{da-bc}\right)|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle$$

b) Suponga ahora una base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\}$ y un tensor concreto expresado en la base canónica $\{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle\}$,

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle\,; \qquad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\mathbf{i}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\,|\mathbf{j}\rangle\,; \qquad T^i_j = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión matricial para el tensor $\tilde{T}_{ij}$[1] (6 ptos.)

Solución Para encontrar la expresión del tensor $\tilde{T}_{ij}$ recordemos como transforman las componentes de los tensores y los vectores, vale decir

$$\tilde{T}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}T^m_n \equiv \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m}T^m_n\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{a}^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}a^l$$

Donde las matrices de transformación, $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m}$ y $\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}$ pueden ser identificadas de las expresiones

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle \quad \text{y} \quad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{i}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{j}\rangle$$

las cuales constituyen la ley de transformación. Es claro que

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^l}a^l = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1}a^1 + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2}a^2 \quad \text{como } |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle \Rightarrow 1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \quad \text{y} \quad 0 = \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1}$$

del mismo modo

$$|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{i}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{j}\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ 1 = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1}}_{=0}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

es decir

$$-\frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = -1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} = \sqrt{2}$$

entonces

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \\ \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, para determinar lo otra matriz de transformación, $\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j}$, se puede encontrar la matriz inversa a $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m}$ o se encuentraN las expresiones de los vectores de la base canónica $\{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle\}$, en términos de la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\}$ y ser procede a identificar los términos de la matriz tal y como hicimos anteriormente. Es mas sencillo calcular la inversa, por lo tanto

$$\frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

[1] **Ayuda** dada una mantriz genérica $A^i_j = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, su inversa será $\begin{pmatrix} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{pmatrix}$

Entonces

$$\tilde{T}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^m} T^m_n \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{im} \tilde{T}^m_j \quad \text{donde} \quad \tilde{g}_{kl} = \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^l} g_{mn} \quad \text{con} \quad g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, término a término tendremos que

$$\tilde{g}_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} g_{22} = 1 \; ; \qquad \tilde{g}_{12} = \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} g_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tilde{g}_{21} = \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} g_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \qquad \tilde{g}_{22} = \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} g_{22} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Finalmente

$$\tilde{T}_{11} = \tilde{g}_{1j} \tilde{T}^j_1 = \tilde{g}_{11} \tilde{T}^1_1 + \tilde{g}_{12} \tilde{T}^2_1 = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = 3 + 1 = 4$$

$$\tilde{T}_{21} = \tilde{g}_{2j} \tilde{T}^j_1 = \tilde{g}_{21} \tilde{T}^1_1 + \tilde{g}_{22} \tilde{T}^2_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} 3 + \sqrt{2} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tilde{T}_{12} = \tilde{g}_{1j} \tilde{T}^j_2 = \tilde{g}_{11} \tilde{T}^1_2 + \tilde{g}_{12} \tilde{T}^2_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} 5 = 3\sqrt{2}$$

$$\tilde{T}_{22} = \tilde{g}_{2j} \tilde{T}^j_2 = \tilde{g}_{21} \tilde{T}^1_2 + \tilde{g}_{22} \tilde{T}^2_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 5 = \frac{11}{2}$$

4. Es espacio de Minkowski, $\mathcal{M}^4$, es un espacio pseudoeuclideano tetradimensional, vale decir un espacio vectorial respecto a la suma y a la multiplicación por un escalar equivalente a un espacio euclideano, $\mathcal{E}$, en el cual hemos definido un producto interno de tal forma que

$$|\mathbf{x}\rangle = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \qquad \rightarrow \qquad \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = y^0 x^0 - y^1 x^1 - y^2 x^2 - y^3 x^3$$

a) ¿ Será una buena definición de producto interno de espacios euclideanos ? ¿ por qué ? (2ptos)

Solución No, ya que $\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$ puedes ser menor o igual a cero y eso no est'a permitido en la definici'on de producto interno para espacios euclideanos.

b) ¿ Si aceptamos esta definición de producto interno, cuál será la (o las) consecuencia(s) en las definiciones de norma y distancia para estos espacios ? (2ptos)

Solución Tendremos normas para vectores y distancias entre vectores nulas y negativas

5. Dados T^i_j y $a^i \in E^3$ con

$$T_{ij} = T^i_j = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{a} = 6i_1 + 9i_2 - 5i_3 \qquad \text{con } a^i \equiv a_i$$

a) Calcule $T^i_j a_i$ y $T^i_j a^j$ (2 ptos)

Solución

$$T^i_j a_i = a_i T^i_j = (6, 9, -5) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (47, 31, 27)$$

$$T^i_j a^j = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 49 \\ 21 \end{pmatrix}$$

b) Si ahora $\vec{b} = -3i_1 + 5i_2 + 4i_3$ Calcule $T^i_j a_i b^j, T^i_j b_i b^j$. (2 ptos)

Solución

$$T^i_j a_i b^j = a_i T^i_j b^j = (6, 9, -5) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (47, 31, 27) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 122$$

$$T^i_j b_i b^j = b_i T^i_j b^j = (-3, 5, 4) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (8, 24, 32) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 224$$

c) Construya y muestre las partes simétrica S_{ij} y antisimétrica A_{kl} del tensor T^i_j (3 ptos)

Solución

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Calcule $S^i_j a_i b^j$, $A^i_j a_i b^j$, $S^i_j a_i a^j$, $A^i_j b_i b^j$ (2 ptos)

Solución

$$S^i_j a_i b^j = a_i S^i_j b^j = (6, 9, -5) \begin{pmatrix} 5 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (31, 40, 24) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 203$$

$$A^i_j a_i b^j = a_i A^i_j b^j = (6, 9, -5) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (16, -9, 3) \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 81$$

$$S^i_j a_i a^j = a_i S^i_j a^j = (6, 9, -5) \begin{pmatrix} 5 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 4 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = (31, 40, 24) \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} = 426$$

$$A^i_j b_i b^j = b^i A_{ij} b^j = 0$$