Enero 2008

Nombre____

1. Dada una función
$$\frac{zx^2}{x^2+y^2+z^2}$$
Calcule el Laplaciano de esa función en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas. En base a los resultados ¿ qué puede concluir ? (4 ptos)

Solución El campo $\Psi(x,y,z) = \nabla^2_{(x,y,x)}\phi(x,y,x)$ es un campo escalar así que dará igual calcular el Laplaciano en coordenadas cartesianas (lo hemos denotado $\nabla^2_{(x,y,x)}\phi(x,y,x)$) y trasformarlo a esféricas o transformar $\phi(x,y,x) \to \phi(r,\theta,\varphi)$ y luego calcular el laplaciano en esféricas $\nabla^2_{(r,\theta,\varphi)}\phi(r,\theta,\varphi)$. Veamos:

En cartesianas
$$\Psi(x,y,z) = \nabla^2_{(x,y,x)}\phi(x,y,x) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{zx^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2z\left(z^2-4x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Transformando a esféricas
$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \qquad z = r\cos\varphi$$

tendremos
$$\Psi(x,y,z) \to \Psi(r,\theta,\varphi) = -\frac{2\cos\theta}{r}\left(5\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta - 1\right)$$

Por otro lado
$$\phi(x,y,x) \to \phi(r,\theta,\varphi) = r\cos\theta\,\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta$$

entonces
$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\left(r\cos\theta\,\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta\right)$$

finalmente
$$\Psi(r,\theta,\varphi) = \nabla^2_{(r,\theta,\varphi)}\phi(r,\theta,\varphi) = -\frac{2\cos\theta}{r}\left(5\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta - 1\right)$$

2. Dado un campo vectorial en coordenadas cilíndricas $\vec{A} = z\hat{\mathbf{u}}_\rho + \rho\hat{\mathbf{u}}_z$

   a) Encuentre su expresión en coordenadas cartesianas (1pt)

Solución Como sabemos que

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad z = z \quad \hat{\mathbf{u}}_\rho = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\jmath} \quad \hat{\mathbf{u}}_z \equiv \hat{\mathbf{k}}$$

Entonces es directo

$$\vec{A} = z\hat{\mathbf{u}}_\rho + \rho\hat{\mathbf{u}}_z = \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\imath} + \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\jmath} + \sqrt{x^2+y^2}\hat{\mathbf{k}}$$

b) Calcule la expresión de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en coordendas cartesianas (3 pts)

Solución Como igual nos lo piden más abajo, el resultado será el mismo (transformado) y, además, el vector $\vec{A}$ luce como más simple en cilíndricas procedemos en esas coordenadas. La expresión del rotor en cilíndricas es

$$\nabla_{(\rho,\varphi,z)} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{u}}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\mathbf{u}}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{\mathbf{u}}_z$$

es inmediato darse cuenta que se anula y como $\nabla_{(\rho,\varphi,z)} \times \vec{A} = 0$ es una ecuación vectorial, vale en todos los sistemas de coordenadas. Por lo tanto se anula también cartesianas $\nabla_{(x,y,z)} \times \vec{A} = 0$.

c) Calcule la expresión de $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ en coordendas cilíndricas (3 pts)

Solución $\nabla_{(\rho,\varphi,z)} \times \vec{A} = 0$

d) ¿ qué puede concluir ? (2pts)

Solución Que $\nabla_{(\rho,\varphi,z)} \times \vec{A} = 0$ es una ecuación vectorial, vale en todos los sistemas de coordenadas: $\nabla_{(\rho,\varphi,z)} \times \vec{A} = \nabla_{(x,y,z)} \times \vec{A} = 0$

3. Las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo en el vacío (en ausencia de cargas eléctricas, corrientes, medios dieléctricos o magnéticos) se escriben como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Considere una función escalar ϕ y una vectorial $\vec{A}$ de tal forma que estén relacionadas con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de la forma $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Exprese, de la manera más simple posible las ecuaciones de Maxwell en término de los potenciales escalares ϕ y vectoriales $\vec{A}$ (4 ptos).

Solución Sustituyendo las ecuaciones de los potenciales $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ en las ecuaciones de Maxwell tendremos la primera y la tercera se anulan idénticamente y no podemos extraer información. Esto es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$$

y

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = 0$$

Mientras que para la segunda ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = 0$$

y la cuarta

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

desarrollando la expresión $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e intercambiando el orden de $\vec{\nabla}$ y $\dfrac{\partial}{\partial t}$ nos queda

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0$$

Más aún estas ecuaciones son fácilmente desacoplables si

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}^2\phi - \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ \\ \vec{\nabla}^2\vec{A} - \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

4. La Ecuación de Navier Stokes para un fluido incompresible puede escribirse como

$$-\vec{\nabla} \times \left(\vec{\mathbf{v}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\right) = \frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}}\right)$$

Para un campo de velocidades en coordenadas cilíndricas $\vec{\mathbf{v}} = v(\rho)\hat{\mathbf{u}}_z$, muestre que

a) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\mathbf{v}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{v}}\right)\right) = 0$ (3pts)

Solución El rotor en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\nabla_{(r,\varphi,z)}\times\vec{A}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{u}}_\rho+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\mathbf{u}}_\varphi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{u}}_z$$

es inmediato darse cuenta que

$$\vec{\nabla}\times v(\rho)\hat{\mathbf{u}}_z=-\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\hat{\mathbf{u}}_\varphi\Rightarrow\vec{\mathbf{v}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{v}}\right)=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{u}}_\rho & \hat{\mathbf{u}}_\varphi & \hat{\mathbf{u}}_z\\ 0 & 0 & v(\rho)\\ 0 & -\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho} & 0\end{vmatrix}=v(\rho)\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\hat{\mathbf{u}}_\rho$$

con lo cual es claro, otra vez, de la expresión del rotor en coordenadas cilíndricas que

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\mathbf{v}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{v}}\right)\right)=\vec{\nabla}\times\left(v(\rho)\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\hat{\mathbf{u}}_\rho\right)=0$$

b)

$$\frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{v}}\right)=0\quad\Rightarrow\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho}=0\qquad\text{(3pts)}$$

Solución Una véz más

$$\nabla^2\left(\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{v}}\right)=\nabla^2\left(\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\hat{\mathbf{u}}_\varphi\right)=\left(\nabla^2-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\right)=\left(\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\right)$$

con lo cual queda demostrado...

c) y que tiene como solución $v=v_0+C\rho^2$ (2pts)

Solución Al sustituir es inmediato comprobarlo

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^3 v(\rho)}{\partial\rho^3}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial v(\rho)}{\partial\rho}\right)=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\left(v_0+C\rho^2\right)}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^3\left(v_0+C\rho^2\right)}{\partial\rho^3}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\left(v_0+C\rho^2\right)}{\partial\rho}\right)=0$$