Métodos Matemáticos 1
Tarea 4
Espacios Lineales
Fecha de entrega 25 de Abril

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenada cartesianas los definimos como $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$ y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\left\langle \mathbf{e}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \delta^i_j$ con $i,j = 1,2,3$, esto es:

$\left\langle \mathbf{e}^i \,\|\mathbf{e}_j\right\rangle$	$\hat{\imath}$	$\hat{\jmath}$	$\hat{\mathtt{k}}$
$\hat{\imath}$	1	0	0
$\hat{\jmath}$	0	1	0
$\hat{\mathtt{k}}$	0	0	1

con $i,j = 1,2,3$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 + a^i |\mathbf{q}_i\rangle = a_0 + a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$$

con $\alpha = 0,1,2,3$ y donde las a^icon $i = 1,2,3$ son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la a^0, también números reales, se le llama componente escalar[1]. Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton[2] a mediados del siglo XIX. Por decirlo de alguna manera, son híbridos. o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Basándonos en este esquema podemos definir la "tabla de multiplicación" para los cuaterniones cartesianos como

$\|\mathbf{q}'_i\rangle \odot \|\mathbf{q}_j\rangle$	$\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$
$\|\mathbf{q}'_1\rangle$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$	$-\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$	$-\|\mathbf{q}_2\rangle$
$\|\mathbf{q}'_2\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$-\|\mathbf{q}_3\rangle$	$-\mathbf{1}$	$\|\mathbf{q}_1\rangle$
$\|\mathbf{q}'_3\rangle$	$\|\mathbf{q}_3\rangle$	$\|\mathbf{q}_2\rangle$	$-\|\mathbf{q}_1\rangle$	$-\mathbf{1}$

Nótese que por el hecho que $|\mathbf{q}_j\rangle \odot |\mathbf{q}_j\rangle = -1 \Rightarrow |\mathbf{q}_1\rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle = |\mathbf{q}_2\rangle \odot |\mathbf{q}_2\rangle = |\mathbf{q}_3\rangle \odot |\mathbf{q}_3\rangle = -1$, se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo) donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre. Esto es

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 \underbrace{|\mathbf{q}_0\rangle}_{\mathbf{1}} + a^j |\mathbf{q}_j\rangle = a^0 + \underbrace{a^1 |\mathbf{q}_1\rangle + a^2 |\mathbf{q}_2\rangle + a^3 |\mathbf{q}_3\rangle}_{\text{“parte compleja”}}$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternión como $|\mathbf{b}\rangle^{\maltese} = b^0 |\mathbf{q}_0\rangle - b^j |\mathbf{q}_j\rangle$ con $j = 1,2,3$. Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternión cambia el signo de su "parte compleja vectorial". Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones como

$$\left.\begin{array}{l} |\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \\ \\ |\mathbf{b}\rangle = b^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathbf{c}\rangle = c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = |\mathbf{a}\rangle + |\mathbf{b}\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|\mathbf{q}_\alpha\rangle \Rightarrow \qquad c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por $\alpha |\mathbf{c}\rangle = \alpha c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$ es decir se multiplica el escalar por cada componente.

[1]Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^3 c^j |\mathbf{q}_j\rangle$. Es decir hemos supuesto que $|\mathbf{q}_0\rangle \equiv 1$, la unidad en los números reales. Adicionalmente, nótese que los índices griegos $\alpha, \beta, \cdots$ toman los valores $0,1,2,3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j,k,l = 1,2,3$.

[2]Para más detalles y de los cuaterniones pueden consultar http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html

1. Compruebe si los Cuaterniones, $|\mathbf{a}\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a una operación esa suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbf{R}^3$ en coordenada cartesianas. ¿ Cuaterniones $|\mathbf{a}\rangle$ son vectores, pseudovectores o ninguna de las anteriores ? Explique por qué.

2. Dados dos cuaterniones $|\mathbf{b}\rangle \equiv \left(b^0, \vec{b}\right)$ y $|\mathbf{r}\rangle \equiv \left(r^0, \vec{r}\right)$ entonces, el producto entre cuaterniones $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle$ podrá representarse como

$$|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle \longleftrightarrow \left(d^0, \vec{d}\right) = \left(b^0 d^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}, d^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r}\right)$$

donde $\cdot$ y $\times$ corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales. de siempre, respectivamente.
Más aún, ahora con índices, dados $|\mathbf{b}\rangle = b^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$ y $|\mathbf{r}\rangle = r^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$, compruebe si su producto de $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle$ puede ser siempre escrito de la forma

$$|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle = a\,|\mathbf{q}_0\rangle + \tilde{S}^{ij}\delta_i^0\,|\mathbf{q}_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k\,|\mathbf{q}_i\rangle$$

donde a representa un escalar; $S^{(ij)}\delta_i^0$ tres cantidades (recuerde que los índices latinos toman los siguiente valores $j,k,l = 1,2,3.$) y donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$ que la cantidad S^{ij} es simétrica y por lo tanto $\left(S^{ij}\delta_i^0 + S^{ji}\delta_i^0\right)|\mathbf{q}_j\rangle$ Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y $k : A^{[jk]i} \to A^{jki} = -A^{kji} \to \left(A^{jki}b_j c_k - A^{kji}b_j c_k\right)|\mathbf{q}_i\rangle$. Identifique las cantidades $a, S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$ en término de las componentes de los cuaterniones
¿ el producto de cuaterniones $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{a}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores ?. Explique por qué.

3. Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas $2x2$ del tipo

$$|\mathbf{b}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

donde z, w son números complejos y $\bar{w}$ y $\bar{z}$ sus complejos conjugados

4. Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es, la matriz unitaria $4x4$ y

$$|\mathbf{q}_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{q}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{q}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\langle \mathbf{a}\,|\mathbf{b}\rangle = |\mathbf{a}\rangle^{\maltese} \odot |\mathbf{b}\rangle$$

6. Modifique un poco la definición anterior de tal forma que se tenga la

$$(\mathbf{a}\,|\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\left[\langle \mathbf{a}\,|\mathbf{b}\rangle - |\mathbf{q}_1\rangle \odot \langle \mathbf{a}\,|\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle\right]$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma $|\mathbf{f}\rangle = f^0 + f^1\,|\mathbf{q}_1\rangle$ es un número complejo convencional.

7. Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones

$$n(|\mathbf{b}\rangle) = \| |\mathbf{a}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{a} \, |\mathbf{a}\rangle} = \sqrt{|\mathbf{a}\rangle^{\maltese} \odot |\mathbf{a}\rangle}$$

8. Comprebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|\mathbf{a}\rangle} = \frac{|\mathbf{a}\rangle^{\maltese}}{\| |\mathbf{a}\rangle \|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|\mathbf{a}\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$

9. Compruebe si los Cuaterniones $|\mathbf{a}\rangle$ forman un grupo respecto a una operación multiplicación $\odot$.

10. Los vectores en $\Re^3$ en coordenada cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones donde la parte escalar es nula $v^0 = 0 \rightarrow |v\rangle = v^j \, |\mathbf{q}_j\rangle$ .Compruebe si el siguiente producto conserva la norma

$$|v'\rangle = \overline{|\mathbf{a}\rangle} \odot |v\rangle \odot |\mathbf{a}\rangle$$

Estos es $\| |v'\rangle \|^2 = \left(v^{1\prime}\right)^2 + \left(v^{2\prime}\right)^2 + \left(v^{3\prime}\right)^2 \equiv \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2 = \| |v\rangle \|^2$