Métodos Matemáticos 1
Tarea 6
Coordenadas Curvilíneas

1. Considere las siguientes leyes de transformación entre coordenada $(x,y,z) \rightarrow (u,v,z)$

$$xy = u \quad x^2 - y^2 = v \quad z = z$$

   a) Para $z = cte$ grafique las coordenadas (x,y) y explique qué significan estas coordenadas
   b) Construya la tríada de vectores unitarios $|\mathbf{u}\rangle, |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{z}\rangle$ ¿ es ese sistema levógiro ($\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} = -\overrightarrow{\mathbf{z}}$) o destrógiro ($\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{z}}$) ?
   c) Dado un vector $|\mathbf{a}\rangle = 5|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle + 6|\mathbf{z}\rangle$ encuentre su expresión en el sistema cartesiano $(|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle)$
   d) Considere ahora un tensor cartesiano

$$T^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   Encuentre su expresión $\tilde{T}_{ij}$ en la base coordenada (u,v,z)
   e) Considere ahora otra familia de sistemas de coordenadas cilíndricas (ρ,φ,z)

$$x = \rho\cos\varphi \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad z = z$$

   Encuentre la expresión para el vector $|\mathbf{a}\rangle = 5|\mathbf{u}\rangle + |\mathbf{v}\rangle + 6|\mathbf{z}\rangle$ en la base $(|\rho\rangle, |\varphi\rangle, |\mathbf{k}\rangle)$

2. Considere el espacio de Minkowski con un elemento de línea escrito en coordenadas "cartesianas", como

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\,\mathrm{d}t^2 \;+\; \mathrm{d}x^2 \;+\; \mathrm{d}y^2 \;+\; \mathrm{d}z^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

. Considere también un cuadrivector en coordenadas "cartesianas" $u^\mu \equiv (u^0 = 1, u^1 = 1, u^2 = 0, u^3 = 0)$

   a) Encuentre la expresión para este cuadrivector en coordenadas "esféricas"

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\,\mathrm{d}t^2 \;+\; \mathrm{d}r^2 \;+\; r^2(\mathrm{d}\theta^2 \;+\; \mathrm{sen}^2\,\theta \mathrm{d}\varphi^2) \equiv \tilde{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

   b) Encuentre la expresión para el módulo del cuadrivector $u^\mu u_\mu$ en coordenadas "esféricas"
   c) Considere las siguientes coordenadas

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\,\mathrm{d}v^2 \;+\; \mathrm{d}v\mathrm{d}r \;+\; r^2(\mathrm{d}\theta^2 \;+\; \mathrm{sen}^2\,\theta \mathrm{d}\varphi^2) \equiv \bar{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

   Encuentre las expresiones para $\bar{u}^\mu = (\bar{u}^0, \bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$ y $\bar{u}_\mu = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$
   d) Finalmente considere el siguiente sistema de coordenadas

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -\,\mathrm{d}t^2 \;+\; \frac{1}{1+kt}\left(\mathrm{d}r^2 \;+\; r^2(\mathrm{d}\theta^2 \;+\; \mathrm{sen}^2\,\theta \mathrm{d}\varphi^2)\right) \equiv \hat{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \qquad k = const$$

   Encuentre la expresión para el cuadrivector $\hat{u}^\mu$ en estas coordenadas coordenadas