Métodos Matemáticos 1
Tarea 7
Análisis Vectorial

1. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$.

2. La ecuación de equilibrio hidrostático para una distribución material esféricamente simética es

$$\vec{\nabla} P (r) + \rho (r) \vec{\nabla} \varphi (r) = 0$$

donde $P (r)$ es el perfil de presiones, $\rho (r)$ el de la densidad y $\varphi (r)$ el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

3. Dado $\vec{r} = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}$ con $\|\vec{r}\| = r = cte$, $f (r)$ un campo escalar bien comportado y $\vec{a}$ y $\vec{c}$ vectores constantes, muestre si las siguientes igualdades son ciertas:

   a) $\vec{\nabla} r = \hat{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$; $\quad \vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{r} f (r)) = \vec{a} f (r) + (\vec{a} \cdot \vec{r}) f' (r) \hat{\mathbf{u}}_r$

   b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} f (r)) = 3 f (r) + r f' (r)$; $\quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = 4 (\vec{a} \cdot \vec{r})$
   $\vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{c}) = \vec{\nabla} \cdot ((\vec{c} \cdot \vec{r}) \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})$; $\quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{c}) = -2 (\vec{a} \cdot \vec{c})$

   c) Encuentre los enteros n tales que $\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = 3$

   d) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times (f (r) \vec{r}) = 0$; $\quad \vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c}$; $\quad \vec{\nabla} \times (\vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{r})) = \vec{a} \times \vec{c}$
   $\vec{\nabla} \times ((\vec{c} \times \vec{r}) \times \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{c}$

   e) $\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) \cdot \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) f (r) = r^2 \Delta f (r) - r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ con $\Delta f (r) \equiv \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) f (r)$

4. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los siguientes campos.

   a) $\vec{a} = \frac{1}{2} (-y\ \hat{\imath} + x\ \hat{\jmath})$

   b) $\vec{a} = (xy + 1) \hat{\imath} + \left(\frac{1}{2} x^2 + x + 2\right) \hat{\jmath}$

5. Encuentre el rotor y el flujo para el campo vectorial

$$\vec{a} = \left(x^2 + y - 4\right) \hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} + \left(2xz + z^2\right) \hat{\mathbf{k}}$$

a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z > 0$

6. Muesre que el vector, $\vec{A} (\vec{r})$, solución a la ecuación

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - k^2 \vec{A} = 0 \qquad \Rightarrow \left(\vec{\nabla} + k^2\right) \vec{A} = 0$$

con la condición solenoidal $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. La ecuación $\left(\vec{\nabla} + k^2\right) \vec{A} = 0$ se conoce como la ecuación de Helmholtz.

7. En mecánica clásica la cantidad de movimiento viene definida como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Para pasar a mec'anica cuántica se asocia $\vec{r}$ y $\vec{p}$ con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{X} |\psi\rangle = x \langle \mathbf{r} |\psi\rangle = x\ \psi(\vec{r}) \qquad \langle \mathbf{r}| \mathbf{P}_x |\psi\rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x}\right) \langle \mathbf{r} |\psi\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial x}\psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{Y} |\psi\rangle = y \langle \mathbf{r} |\psi\rangle = y\ \psi(\vec{r}) \qquad \langle \mathbf{r}| \mathbf{P}_y |\psi\rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial y}\right) \langle \mathbf{r} |\psi\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial y}\psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{Z} |\psi\rangle = z \langle \mathbf{r} |\psi\rangle = z\ \psi(\vec{r}) \qquad \langle \mathbf{r}| \mathbf{P}_z |\psi\rangle = \left(-i\hbar\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \langle \mathbf{r} |\psi\rangle = -i\hbar\ \frac{\partial}{\partial z}\psi(\vec{r})$$

En definitiva, en coordenadas cartesianas en la representación de coordenadas $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ tendremos que

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{R} |\psi\rangle = \vec{r}\ \psi(\vec{r}) \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{r}| \mathbf{P}_x |\psi\rangle = -i\hbar\ \vec{\nabla}\ \psi(\vec{r})$$

a) Muestre que en Mecánica cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular son

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{L}_x |\psi\rangle = -i\hbar\ \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(\vec{r})\,; \qquad \langle \mathbf{r}| \mathbf{L}_y |\psi\rangle = -i\hbar\ \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{L}_z |\psi\rangle = -i\hbar\ \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(\vec{r})$$

b) Utilizando las definiciones anteriores muestre que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantindad de movimiento angular cumple con

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = i\hbar \mathbf{L}_z \qquad \text{y en general } \varepsilon_{ijk}\mathbf{L}^i\mathbf{L}^j = i\hbar\mathbf{L}_i \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{L}} \times \tilde{\mathbf{L}} = i\tilde{\mathbf{L}}$$

con $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_x$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_y$; $\mathbf{L}^3 = \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_z$ y $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_x\hat{\imath} + \mathbf{L}_y\hat{\jmath} + \mathbf{L}_z\hat{\mathbf{k}}$

c) Dados dos Operadores Vectoriales $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ que conmtan entre ellos y con $\tilde{\mathbf{L}}$ tales que

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\right] = \left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{L}}\right] = \left[\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}}\right] = 0$$

demuestre entonces que

$$\left[\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}\right] = i\left(\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}\right) \cdot \tilde{\mathbf{L}}$$

8. El campo magnético generado por una corriente I es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}\right)$$

Encuentre un vector potencial magnético, $\vec{A}$, tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$