

# Formulario de Métodos Matemáticos 1

## Espacios Vectoriales Lineales 1:

### Grupos, SubEspacios, Independencia Lineal y Bases para un Espacio Vectorial Lineal\*

L. A. Núñez\*\*

*Centro de Física Fundamental,  
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y  
Centro Nacional de Cálculo Científico Universidad de Los Andes  
(CECALCULA),  
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Versión  $\beta$  Octubre 2004

## Índice

<b>1. Grupos, Campos y Espacios Vectoriales</b>	<b>2</b>
1.1. Grupos . . . . .	2
1.2. Campo . . . . .	3
1.3. Espacios Vectoriales Lineales . . . . .	3
1.3.1. Ejemplos . . . . .	4
1.3.2. Ejercicios . . . . .	5
1.3.3. La importancia de la conceptualización y la notación . . . . .	6
<b>2. Métricas y Espacios Métricos</b>	<b>6</b>
<b>3. Normas y Espacios Normados</b>	<b>7</b>
<b>4. Producto Interno y Espacios de Hilbert</b>	<b>8</b>
4.1. Producto Interno . . . . .	8
4.2. La desigualdad de Cauchy Schwarz . . . . .	9

---

\* **ADVERTENCIA:** El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los libros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.

\*\* e-mail: [nunez@ula.ve](mailto:nunez@ula.ve)      Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

<b>5. Variedades Lineales</b>	<b>12</b>
5.1. Dependencia, independencia lineal	12
5.2. Bases de un Espacio Vectorial	13
5.3. El determinante de Gram	14
5.4. Ortogonalidad y Bases Ortogonales	15
5.5. Ortogonalización	18
5.6. Complementos Ortogonales.	21
5.7. Descomposición ortogonal	21
<b>6. Temas Avanzados</b>	<b>23</b>
6.1. Aproximación de Funciones	23
6.2. El Método de Mínimos Cuadrados	24

# 1. Grupos, Campos y Espacios Vectoriales

## 1.1. Grupos

Considere el siguiente conjunto  $\mathbf{G} = \{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots\}$  y la operación  $\square$  entonces estos elementos forman un grupo abeliano<sup>1</sup> respecto a la operación  $\square$  si  $\forall g_i \in \mathbf{G}$

1. Cerrada respecto a la operación  $\square$ :  $\{g_i, \in \mathbf{G}, g_j \in \mathbf{G}\} \Rightarrow \exists g_k = g_i \square g_j \in \mathbf{G}$
2. Asociativa respecto a la operación  $\square$ :  $g_k \square (g_i \square g_j) = (g_k \square g_i) \square g_j$
3. Existencia de un elemento neutro:  $\exists \mathbf{1} \in \mathbf{G} \ni g_i \square \mathbf{1} = g_i = \mathbf{1} \square g_i$
4. Existencia de un elemento inverso:  $g_i, \in \mathbf{G} \Rightarrow \exists g_i^{-1} \in \mathbf{G} \ni g_i \square g_i^{-1} = g_i^{-1} \square g_i = \mathbf{1}$
5. Conmutativa respecto a la operación  $\square$ :  $g_i \square g_j \equiv g_j \square g_i$

Si sólo se cumplen las cuatro primeras, entonces se dice que simplemente forman grupo respecto a la operación  $\square$ . Se pueden definir subgrupos

**Ejemplos:** Serán grupo:

- Los enteros  $\mathbb{Z} = \{\dots - 3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  respecto a la suma pero no respecto a la multiplicación (excluyendo el cero) por cuanto no existe inverso.
- Los racionales respecto a la suma y a la multiplicación
- Las rotaciones en 2 Dimensiones (2D), sin embargo las rotaciones en 3D forman grupo no-abeliano.

<sup>1</sup>NIELS HENRIK ABEL, (1802-1829 Noruega) Pionero en el desarrollo de diferentes ramas de la matemática moderna, Abel mostró desde su infancia un notable talento para el estudio de las ciencias exactas. Tal predisposición se vería muy pronto confirmada por sus precoces investigaciones sobre cuestiones de álgebra y cálculo integral, en particular sobre la teoría de las integrales de funciones algebraicas (a las que se denominaría abelianas en honor de su formulador) que no habría de publicarse hasta 1841, doce años después de su fallecimiento. En 2002 el gobierno noruego lanzó el premio Abel que llenará el vacío que existe en la premiación Nobel del gobierno sueco, en el cual no existe premiación para la comunidad matemática.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians>

- Dado un grupo de tres elementos,  $\mathbf{G} = \{1, a, b\}$  y la operación  $\square$ , por construcción si queremos que la operación de dos de los elementos provea un tercero distinto, entonces la ÚNICA “tabla de multiplicación” posible será:

$\square$	$\mathbf{1}$	$a$	$b$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$\mathbf{1}$
$b$	$b$	$\mathbf{1}$	$a$

### Ejercicio

1. Sea  $S$  el conjunto de todos los números reales excluyendo  $-1$  y defina la operación  $\square$

$$a \square b = a + b + ab$$

donde  $+$  es la suma estándar entre números reales.

- a) Muestre que  $[S, \square]$  forman grupo
- b) Encuentre la solución en  $S$  para la ecuación  $2 \square x \square 3 = 7$

## 1.2. Campo

Definiremos como un campo como el conjunto  $\mathbf{F} = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots\}$  sobre el cual están definidas dos operaciones suma,  $+$ , y multiplicación,  $\cdot$ , y que satisfacen las siguientes propiedades

1. Forman un grupo abeliano respecto a la suma,  $+$ , con el elemento neutro representado por el cero,  $0$ .
2. Forman un grupo abeliano respecto a la multiplicación,  $\cdot$ . Se excluye el cero,  $0$  y se denota el elemento neutro de la multiplicación como  $\mathbf{1}$ .
3. Es distributiva respecto a la suma,  $+$ : Dados  $f_i, f_j$  y  $f_k$  se tiene que
 
$$f_i \cdot (f_j + f_k) = f_i \cdot f_j + f_i \cdot f_k$$

Ejemplos típicos de campos lo constituyen los racionales  $\mathbb{Q}$ , los números reales  $\mathbb{R}$  y los números complejos

C. Normalmente se refiere estos campos como *Campos Escalares*

## 1.3. Espacios Vectoriales Lineales

Sea el conjunto de objetos  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \dots |\mathbf{v}_i\rangle \dots\}$  se denominará  $\mathbf{V}$  un espacio vectorial lineal y sus elementos  $|\mathbf{v}_i\rangle$  vectores, si existe definida una operación suma,  $\boxplus$ , respecto a la cual los elementos  $|\mathbf{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$  de forman un grupo abeliano y una operación multiplicación por un número escalar de un campo,  $\mathbf{K} = \{\alpha, \beta, \gamma \dots\}$  tal que:

1. La operación suma  $\boxplus$  es cerrada en  $\mathbf{V} : \forall |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
2. La operación suma  $\boxplus$  es conmutativa y asociativa
  - a)  $\forall |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{v}_i\rangle$
  - b)  $\forall |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle)$
3. Existe un único elemento neutro:  $\exists! |\mathbf{0}\rangle \ni |\mathbf{0}\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \quad \forall |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$

4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de  $\mathbf{V}$  :

$$\forall |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \quad \exists |-\mathbf{v}_j\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |-\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{0}\rangle$$

5.  $\alpha(\beta|\mathbf{v}_i\rangle) = (\alpha\beta)|\mathbf{v}_i\rangle$

6.  $(\alpha + \beta)|\mathbf{v}_i\rangle = \alpha|\mathbf{v}_i\rangle + \beta|\mathbf{v}_i\rangle$

7.  $\alpha(|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) = \alpha|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus \alpha|\mathbf{v}_j\rangle$

8.  $\mathbf{1}|\mathbf{v}_i\rangle = |\mathbf{v}_i\rangle$

Es inmediato notar que podemos definir subespacios vectoriales dentro de los espacios vectoriales. Ellos serán aquellos conjuntos de vectores que cumplan con los requisitos anteriores pero además sean cerrado dentro de los esos mismos conjuntos de vectores.

### 1.3.1. Ejemplos

Serán ejemplos de espacios vectoriales

1. Los números reales y complejos con el campo de reales o complejos y definidas las operaciones ordinarias de suma y multiplicación.  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$ ;  $\boxplus \Rightarrow +$ ;  $|\mathbf{v}\rangle \equiv x$ ;  $\mathbf{K} \equiv \mathbb{R}$ .

$$\mathbf{V} \equiv \mathbb{C}; \quad \boxplus \equiv +; \quad |\mathbf{v}_i\rangle \equiv x + iy; \quad \mathbf{K} \equiv \mathbb{R}.$$

Si el campo  $\mathbf{K}$  es el conjunto de los números reales se dirá que es *un espacio vectorial real de números reales* si  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$  y si  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{C}$  se dirá *un espacio vectorial real de números complejos*. Por su parte si  $\mathbf{K} \equiv \mathbb{C}$  diremos que es un espacio vectorial complejo de números reales ( si  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$ ) o complejos (  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{C}$  ). Siempre se asociará el campo de escalares al espacio vectorial. Se dirá que es un espacio vectorial sobre el campo de los reales. Si el campo es real (complejo) se dirá que el espacio vectorial es real (complejo).

2. El espacio  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ , vale decir el producto cartesiano de  $\mathbb{R}$ , cuyos elementos son  $n$ -uplas de números, con la operación suma ordinaria de vectores en  $n$ -dimensionales y la multiplicación por escalares.

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) \\ |\mathbf{x}\rangle \boxplus |\mathbf{y}\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n) \\ \alpha |\mathbf{x}\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

Este espacio vectorial es de dimensión finita. Igualmente, será espacio vectorial  $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$  para el cual los elementos  $x_i \in \mathbb{C}$ . Si para este caso el campo sobre el cual se define el espacio vectorial  $\mathbb{C}^n$  es real, tendremos un espacio vectorial real de números complejos. Es obvio que el caso  $\mathbf{V} \equiv \mathbb{R}$  para el cual  $|\mathbf{x}\rangle_1 = (x_1, 0, 0, \cdots, 0)$  y  $|\mathbf{y}\rangle_1 = (y_1, 0, 0, \cdots, 0)$  o cualquier espacio de vectores formados por las componentes, i.e.  $|\mathbf{x}\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, x_i, \cdots, 0)$  y  $|\mathbf{y}\rangle_i = (0, 0, 0, \cdots, y_i, \cdots, 0)$  formarán subespacios vectoriales dentro de  $\mathbb{R}^n$

3. El espacio  $\mathbf{E}^\infty$  constituido por vectores  $|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$  contables pero con infinitas componentes.

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &= (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots) \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = (y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots) \\ |\mathbf{x}\rangle \boxplus |\mathbf{y}\rangle &\equiv (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n, \cdots) \\ \alpha |\mathbf{x}\rangle &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \cdots, \alpha x_n, \cdots) \end{aligned}$$

con la restricción que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = L \quad \text{con } L \text{ finito}$$

4. Para el conjunto de las matrices  $n \times n$  reales o complejas con el campo  $\mathbf{K}$  real o complejo.

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &= M_{ab} \quad \wedge \quad |\mathbf{y}\rangle = N_{ab} \\ |\mathbf{x}\rangle \boxplus |\mathbf{y}\rangle &\equiv M_{ab} + N_{ab} = (M + N)_{ab} \\ \alpha |\mathbf{x}\rangle &= \alpha M_{ab} = (\alpha M)_{ab} \end{aligned}$$

Es también obvio que se podrán formar subespacios vectoriales cuyos elementos sean matrices de dimensión menor a  $n \times n$

5. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales  $\mathcal{P} = \{a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n, \dots\}$  con  $\boxplus$  la suma ordinaria entre polinomios y la multiplicación ordinaria de polinomios con escalares
6. Espacios Funcionales (de los cuales los polinomios son un caso particular) En estos espacios los vectores serán funciones, la suma será la suma ordinaria entre funciones y la multiplicación por un escalar también será la multiplicación ordinaria de una función por un elemento de un campo

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}\rangle &= f(x) \quad \wedge \quad |\mathbf{g}\rangle = g(x) \\ |\mathbf{f}\rangle \boxplus |\mathbf{g}\rangle &\equiv f(x) + g(x) \equiv (f + g)(x) \\ \alpha |\mathbf{f}\rangle &= (\alpha f)(x) \equiv \alpha f(x) \end{aligned}$$

Con este esquema vemos otros ejemplos

- a) El conjunto de todas las funciones continuas e infinitamente diferenciables, definidas en el intervalo  $[a, b] : \mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$
- b) El conjunto de todas las funciones complejas de variable real,  $\psi(x)$ , definidas en  $[a, b]$ , de cuadrado integrable (es decir para las cuales  $\int_{[a,b]} dx \|\psi(x)\|^2$  sea finita). Este espacio se denomina comúnmente  $\mathcal{L}^2$  y pueden ser definidas en un rango  $[a, b]$  finito o infinito y para más de una variable.

### 1.3.2. Ejercicios

Muestre que también serán espacios vectoriales

1. El conjunto de todas las funciones  $f = f(x)$  definidas en  $x = 1$  con  $f(1) = 0$ . Si  $f(1) = c$ , ¿tendremos igual un espacio vectorial? ¿por qué?
2. Los vectores  $(x, y, z) \in V_3$  tal que sus componentes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

### 1.3.3. La importancia de la conceptualización y la notación

En los ejemplos antes mencionados hemos utilizado para representar un vector abstracto la notación de  $|\mathbf{v}_1\rangle$  y con ellos construimos un espacio vectorial abstracto  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \dots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$ . Un espacio vectorial abstracto será un conjunto de elementos genéricos que satisfacen ciertos axiomas. Dependiendo del conjunto de axiomas tendremos distintos tipos de espacios abstractos. En matemática el concepto de espacios abstracto es reciente (1928) y, aparentemente, se le debe a Maurice Fréchet<sup>2</sup>. La teoría resulta de desarrollar las consecuencias lógicas que resultan de esos axiomas. Los elementos de esos espacios se dejan sin especificar a propósito. Ese vector abstracto puede representar, vectores en  $\mathbb{R}^n$ , matrices  $n \times n$  o funciones continuas. La notación  $|\mathbf{v}_1\rangle$ , que se denomina un *ket* y al cual corresponde un *bra*  $\langle \mathbf{v}_2|$  proviene del vocablo inglés *bracket* que significa corchete y será evidente más adelante cuando construyamos escalares *bracket*  $\langle \mathbf{v}_2| |\mathbf{v}_1\rangle$ . Esta útil notación la ideó Paul Dirac<sup>3</sup>, uno de los físicos más influyentes en el desarrollo de la física del siglo pasado

## 2. Métricas y Espacios Métricos

El siguiente paso en la dotación de propiedades de los espacios lineales lo constituye la idea de métrica o distancia entre sus elementos. El concepto de métrica surge de la generalización de la idea de distancia entre dos puntos de la recta real.

Un Espacio vectorial será métrico si podemos definir una función  $d: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \ni \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$  se cumple que

1.  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \geq 0$  si  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{y}\rangle$
2.  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv d(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{x}\rangle)$
3.  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \leq d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{z}\rangle) + d(|\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle)$  La desigualdad Triangular

Así, diremos que  $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \oplus; d)$  es un espacio vectorial, lineal, métrico.

### Ejemplos

1. Espacios Euclidianos reales  $\mathbb{R}^n$

a) Para  $\mathbb{R}$ , es decir la recta real, la definición de métrica es  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv |x - y|$

b) Para  $\mathbb{R}^2$ , es decir el plano, una definición de métrica es

$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ . También podemos construir otra definición de métrica como  $d_1(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ . Es claro como el mismo espacio vectorial genera varios espacios métricos, dependiendo de la definición de métrica

c) En general para Espacios Euclidianos reales  $\mathbb{R}^n$  una posible definición de métrica será  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$

<sup>2</sup>MAURICE FRÉCHET (1878 Maligny, Yonne, Bourgogne-1973 París, Francia). Versátil Matemático Francés, con importantes contribuciones en Espacios Métricos, Topología y creador del concepto de espacios abstractos.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/>

<sup>3</sup>PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902 Bristol, Inglaterra 1984-Tallahassee, EE.UU) Además de contribuir de manera determinante en la comprensión de la Mecánica Cuántica, es uno de los creadores de la Mecánica Cuántica Relativista la cual ayudó a comprender el papel que juega el espín en las partículas subatómicas. Por sus importantes trabajos compartió con Erwin Schrödinger el Premio Nobel de física en 1933.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/>

2. Espacios Unitarios  $n$ -dimensionales, o Espacios Euclidianos complejos,  $\mathbb{C}^n$ , la definición de distancia puede construirse como

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \text{ y es claro que se recobra la idea de distancia en el plano complejo: } d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv |x - y|$$

3. Para los Espacios Funcionales  $C_{[a,b]}^\infty$  una posible definición de distancia sería

$$d(|\mathbf{f}\rangle, |\mathbf{g}\rangle) \equiv \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

Es importante destacar que las definiciones de distancia arriba propuesta son invariante con traslaciones de vectores. Esto es:  $|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = |\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{a}\rangle \quad \wedge \quad |\tilde{\mathbf{y}}\rangle = |\mathbf{y}\rangle + |\mathbf{a}\rangle$ , entonces  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv d(|\tilde{\mathbf{x}}\rangle, |\tilde{\mathbf{y}}\rangle)$ .

### 3. Normas y Espacios Normados

La idea de distancia, de métrica, es el equipamiento más elemental que uno le puede exigir a un espacio vectorial. Mucho más interesante aún son aquellos espacios vectoriales que están equipados con la idea de norma y a partir de allí se define la idea de distancia. La norma tiene que ver con el “tamaño” del vector y la métrica tiene que ver con la distancia entre vectores. Cuando definimos la métrica a partir de la norma, vinculamos las propiedades algebraicas del espacio con sus propiedades geométricas.

La norma,  $\| |\mathbf{v}_i\rangle \| \equiv n(|\mathbf{v}_i\rangle)$  de un espacio vectorial  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_n\rangle\}$  será una función  $n: \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R} \ni \forall |\mathbf{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$  se cumple que

1.  $n(|\mathbf{v}_i\rangle) \equiv \| |\mathbf{v}_i\rangle \| \geq 0 \quad \text{si} \quad \| |\mathbf{v}_i\rangle \| = 0 \Rightarrow |\mathbf{v}_i\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$
2.  $n(\alpha |\mathbf{v}_i\rangle) \equiv \| \alpha |\mathbf{v}_i\rangle \| = |\alpha| \| |\mathbf{v}_i\rangle \|$
3.  $\| |\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle \| \leq \| |\mathbf{x}\rangle \| + \| |\mathbf{y}\rangle \|$  Desigualdad Triangular.

La definición de norma induce una métrica de la forma  $d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \|$ . Se denota en este caso un espacio vectorial normado como  $(\mathbf{V}, \mathbf{K}, \boxplus; \|\cdot\|)$  y también se le conoce como un Espacio de Banach. El concepto de espacio vectorial normado fue formulado en 1922 de manera independiente por S. Banach<sup>4</sup>, H. Hahn y N Wiener

#### Ejemplos

1. Espacios Euclidianos reales,  $\mathbb{R}^n$  y Espacios Euclidianos Complejos  $\mathbb{C}^n$

Para estos espacios de Banach, la norma se define como

$$\| |\mathbf{x}\rangle \| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es claro que para un espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^3$  se cumple que  $\| |\mathbf{x}\rangle \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  por lo tanto la idea de norma generaliza la noción de “tamaño” del vector  $|\mathbf{x}\rangle$ . También es claro que la definición de distancia se construye a partir de la norma de la forma

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

<sup>4</sup>**Stefan Banach** (1892 Kracovia, Polonia-1945 Lvov, Ucrania) Matemático polaco, uno de los fundadores del Análisis Funcional Moderno, con sus mayores contribuciones a la teoría de espacios topológicos. Hizo también importantes aportes a la teoría de la Medida, Integración y Teoría de conjuntos y Series Ortogonales.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/>

2. Para el Espacio Lineal de matrices  $n \times n$  reales o complejas con el campo  $\mathbf{K}$  real o complejo, una definición de norma es

$$\|M\| = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n |M_{ab}|$$

y la correspondiente definición de distancia

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \|M - N\| = \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n |M_{ab} - N_{ab}|$$

3. Para los Espacios Funcionales  $C_{[a,b]}^\infty$  una posible definición de norma sería:

$$\|\mathbf{f}\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

otra posible definición sería

$$\|\mathbf{f}\| = \left( \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## 4. Producto Interno y Espacios de Hilbert

El siguiente paso en la construcción de espacios vectoriales más ricos es equiparlo con la definición de producto interno y a partir de esta definición construir el concepto de norma y con éste el de distancia. La idea de producto interno generaliza el concepto de producto escalar de vectores en  $\mathbb{R}^3$  en incorpora a los espacios vectoriales abstractos el concepto de ortogonalidad y descomposición ortogonal. Históricamente, la teoría de espacios vectoriales con producto interno es anterior a la teoría de espacios métricos y espacios de Banach y se le debe a D. Hilbert<sup>5</sup>. En su honor, los espacios vectoriales abstractos dotados de producto interno se denominan espacios de Hilbert. Adicionalmente, la semejanza entre la geometría euclidiana y la geométrica de  $\mathbb{R}^n$  ha hecho que espacios en los cuales se puedan definir, distancia, ángulos, a partir de una definición de producto interno, se denominen también espacio Euclidianos.

### 4.1. Producto Interno

En un espacio vectorial abstracto  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_n\rangle\}$  la definición del producto interno de dos vectores se denota como  $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle$  y es una función de  $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{C} \ni \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$ , es decir asocia a ese par de vectores con un elemento del campo escalar. Las propiedades que definen el producto interno son

1.  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq 0 \quad \forall |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V} \quad \text{si} \quad \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$
2.  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle^* \quad \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V}$
3.  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{z} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z} | \mathbf{y} \rangle \quad \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle, |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$
4.  $\langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \quad \wedge \quad \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \quad \forall |\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbf{K}$

<sup>5</sup>David Hilbert (1862 Kaliningrad, Rusia-1943 Göttingen, Alemania) Matemático alemán defensor de la axiomática como enfoque primordial de los problemas científicos. Hizo importantes contribuciones en distintas áreas de la matemática, como invariantes, campos de números algebraicos, análisis funcional, ecuaciones integrales, física matemática y cálculo en variaciones.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/>



$$5. \langle \mathbf{x} | \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0} | \mathbf{x} \rangle = 0$$

A partir de la definición de producto interno se construyen los conceptos de norma y distancia

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} \quad y \quad d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$$

## 4.2. La desigualdad de Cauchy Schwarz

Todo producto interno  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  definido en un espacio vectorial abstracto  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots |\mathbf{v}_n\rangle\}$  cumple con la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

Es claro que  $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \wedge |\mathbf{y}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$  se cumple la igualdad y es trivial la afirmación. Para  $|\mathbf{x}\rangle \wedge |\mathbf{y}\rangle$  cualesquiera procedemos construyendo  $|\mathbf{z}\rangle = \alpha |\mathbf{x}\rangle + \beta |\mathbf{y}\rangle$  con  $|\mathbf{x}\rangle \wedge |\mathbf{y}\rangle$  arbitrarios pero  $\alpha$  y  $\beta$  tendrán valores particulares, por lo tanto

$$\langle \mathbf{z} | \mathbf{z} \rangle \equiv \langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = \langle \alpha \mathbf{x} | \alpha \mathbf{x} \rangle + \langle \alpha \mathbf{x} | \beta \mathbf{y} \rangle + \langle \beta \mathbf{y} | \alpha \mathbf{x} \rangle + \langle \beta \mathbf{y} | \beta \mathbf{y} \rangle \geq 0$$

$$\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \alpha^* \beta \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \beta^* \alpha \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle + |\beta|^2 \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle \geq 0$$

si  $\alpha = \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle$  se tiene que

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \beta^* \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle + |\beta|^2 \geq 0$$

seguidamente seleccionamos  $\beta = -\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$  y por lo tanto  $\beta^* = -\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$  y consecuentemente

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \geq \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = |\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle|^2$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de norma se desprende que

$$\frac{|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle|^2}{\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

por lo tanto podemos definir el “ángulo” entre los vectores abstractos  $|\mathbf{x}\rangle \wedge |\mathbf{y}\rangle$  como

$$\cos \Theta = \frac{|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Más aún, a partir de la definición de norma se obtiene

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle^* + \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle) + \langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle$$

con lo cual hemos generalizado para un espacio vectorial abstracto el teorema del coseno

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \Theta$$

y para el caso que los vectores  $|\mathbf{x}\rangle \wedge |\mathbf{y}\rangle$  sean ortogonales, esto es  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = 0$ , tendremos el teorema de Pitágoras generalizado

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

## Ejemplos

1. Espacios Euclidianos reales,  $\mathbb{R}^n$  y Espacios Euclidianos Complejos  $\mathbb{C}^n$ . Los vectores de estos espacios pueden ser representados por  $|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $\wedge$   $|\mathbf{y}\rangle = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y el **producto interno** queda definido por

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \dots, x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

es claro que esta definición de producto interno coincide, para  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  con la idea de producto escalar convencional, vale decir

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \\ b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ahora bien, el lector puede comprobar que para vectores en  $\mathbb{R}^2$  también se puede proveer una definición de producto interno

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = 2a_x b_x + a_x b_y + a_y b_x + a_y b_y$$

igualmente válida, con lo cual es claro que en un mismo espacio vectorial pueden coexistir. Por su parte la **norma**

$$\| |\mathbf{x}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \dots, x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

La **distancia** también recupera la idea intuitiva de distancia euclidiana

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) \equiv \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y} | \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$$

$$d(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

El teorema del coseno queda como

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right) \cos \Theta$$

mientras que Pitágoras, queda como

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2$$

obvio que para  $\mathbb{R}^2$  tanto el teorema del coseno como el teorema de Pitágoras retoman su forma tradicional. Finalmente la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa

$$|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \| |\mathbf{x}\rangle \| \| |\mathbf{y}\rangle \| \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

2. Para los Espacios de Funciones continuas  $\mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$  una posible definición de **producto interno** sería

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{t \in [a,b]} dx f^*(x) g(x)$$

de la cual se deriva la expresión para la **norma**

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle = \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2$$

la **distancia** entre funciones quedará definida como

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \equiv \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| \equiv \sqrt{\langle \mathbf{f} - \mathbf{g} | \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{f} | \mathbf{f} \rangle - \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle - \langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle^* + \langle \mathbf{g} | \mathbf{g} \rangle}$$

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sqrt{\int_{t \in [a,b]} dx |f(x) - g(x)|^2} \Rightarrow$$

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sqrt{\int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 - 2 \operatorname{Re} \left( \int_{t \in [a,b]} dx f^*(x) g(x) \right) + \int_{t \in [a,b]} dx |g(x)|^2}$$

Los teoremas del coseno puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_{t \in [a,b]} dx |f(x) + g(x)|^2 &= \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 + \int_{t \in [a,b]} dx |g(x)|^2 \\ &+ 2 \left( \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t \in [a,b]} dx |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos \Theta \end{aligned}$$

donde

$$\cos \Theta = \frac{\int_{t \in [a,b]} dx f^*(x) g(x)}{\left( \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{t \in [a,b]} dx |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

y como era de esperarse el teorema de Pitágoras queda

$$\int_{t \in [a,b]} dx |f(x) + g(x)|^2 = \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 + \int_{t \in [a,b]} dx |g(x)|^2$$

para funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  ortogonales, mientras que para este caso, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se expresa

$$\left| \int_{t \in [a,b]} dx f^*(x) g(x) \right|^2 \leq \left( \int_{t \in [a,b]} dx |f(x)|^2 \right) \left( \int_{t \in [a,b]} dx |g(x)|^2 \right)$$

## 5. Variedades Lineales

### 5.1. Dependencia, independencia lineal

Siguiendo la misma línea de razonamiento generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ . Así

$$|\mathbf{0}\rangle = C_1 |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + C_n |\mathbf{v}_n\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{v}_i\rangle,$$

Podemos afirmar que

- Si esta ecuación se cumple para algún conjunto de  $\{C_i\}$  no nulos, se dirá que el conjunto de vectores correspondiente  $\{|\mathbf{v}_i\rangle\}$  son **linealmente dependientes**.
- por el contrario, si esta ecuación **sólo** puede ser satisfecha para todos los  $C_i = 0$ , entonces se dirá que el conjunto de vectores correspondiente  $\{|\mathbf{v}_i\rangle\}$  son **linealmente independientes**.

Por ejemplo, dados tres vectores en  $\mathbb{R}^4$

$$|\mathbf{v}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El criterio de independencia lineal se cumple si  $|\mathbf{0}\rangle = C_1 |\mathbf{v}_1\rangle + C_2 |\mathbf{v}_2\rangle + C_3 |\mathbf{v}_3\rangle$  y todos los  $\{C_i\}$  son nulos. Esto es

$$\begin{array}{rclcl} C_1 & +2C_2 & -C_3 & = & 0 \\ 3C_1 & & +C_3 & = & 0 \\ -C_1 & +C_2 & & = & 0 \\ 2C_1 & +3C_2 & & = & 0 \end{array}$$

de donde es claro ver que la única solución posible implica  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ .

**Ejemplos** Si consideramos el espacio vectorial  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \dots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$  serán ejemplos de **independencia lineal**:

- $|\mathbf{v}_k\rangle \equiv f(t) = t^k$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$  es claro que un polinomio de grado  $n+1$ , no podrá ser expresado en términos un polinomio de grado  $n$ . en otras palabras,  $t^{n+1} \neq \sum_{i=0}^n \tilde{C}_i t^i$
- $|\mathbf{v}_k\rangle \equiv f(t) = e^{a_k t}$  con  $a_1, a_2, a_3, \dots$  coeficientes constantes. También salta a la vista que no podremos expresar una de esas funciones exponenciales como combinación lineal

Si consideramos  $|\mathbf{v}_1\rangle \equiv f(t) = \cos^2 t$ ,  $|\mathbf{v}_2\rangle = \sin^2 t$  y  $|\mathbf{v}_3\rangle = 1$  es claro que  $|\mathbf{v}_1\rangle$ ,  $|\mathbf{v}_2\rangle$ , y  $|\mathbf{v}_3\rangle$  son **linealmente dependientes** por cuanto  $|\mathbf{v}_1\rangle + |\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{v}_3\rangle$ . Nótese que si

$$|\mathbf{v}_1\rangle = \cos t, \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \sin t \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}_3\rangle = 1,$$

entonces  $|\mathbf{v}_1\rangle$ ,  $|\mathbf{v}_2\rangle$ , y  $|\mathbf{v}_3\rangle$  serán vectores **linealmente independientes**.

Consideremos ahora otros ejemplos y determinemos ¿cuál o cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en  $\mathcal{P}^3$  son linealmente independientes ?

1.  $|\mathbf{x}_1\rangle = 1$ ;  $|\mathbf{x}_2\rangle = x - 1$ ;  $|\mathbf{x}_3\rangle = x^2$ ;  $|\mathbf{x}_4\rangle = x^2 + 2x + 1$ ;  
Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar  $|\mathbf{x}_4\rangle = 3|\mathbf{x}_1\rangle + 2|\mathbf{x}_2\rangle + |\mathbf{x}_3\rangle$
2.  $|\mathbf{x}_1\rangle = 2x$ ;  $|\mathbf{x}_2\rangle = x^2 + 1$ ;  $|\mathbf{x}_3\rangle = x + 1$ ;  $|\mathbf{x}_4\rangle = x^2 - 1$ ;  
Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar  $|\mathbf{x}_4\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle + |\mathbf{x}_2\rangle - 2|\mathbf{x}_3\rangle$
3.  $|\mathbf{x}_1\rangle = x(x - 1)$ ;  $|\mathbf{x}_2\rangle = x$ ;  $|\mathbf{x}_3\rangle = x^3$ ;  $|\mathbf{x}_4\rangle = 2x^3 - x^2$ ;  
Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar  $|\mathbf{x}_4\rangle = -|\mathbf{x}_1\rangle + |\mathbf{x}_2\rangle + 2|\mathbf{x}_3\rangle$

## 5.2. Bases de un Espacio Vectorial

Ahora bien, dado un espacio vectorial  $\mathbf{V} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$ , encontramos que el conjunto de  $\{|\mathbf{v}_n\rangle\}$  es linealmente dependiente, entonces siempre es posible despejar uno de los vectores en términos de los demás, vale decir

$$|\mathbf{v}_n\rangle = \bar{C}_1 |\mathbf{v}_1\rangle + \bar{C}_2 |\mathbf{v}_2\rangle + \bar{C}_3 |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \bar{C}_{n-1} |\mathbf{v}_{n-1}\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{C}_i |\mathbf{v}_i\rangle,$$

seguidamente se procede a comprobar si  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_{n-1}\rangle\}$  son linealmente independientes, es decir si  $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = \cdots = \bar{C}_{n-1} = 0$ . En caso de no serlo se procede otra vez a despejar uno de los vectores en términos de los anteriores y a aplicar el criterio de independencia lineal,

$$|\mathbf{v}_{n-1}\rangle = \tilde{C}_1 |\mathbf{v}_1\rangle + \tilde{C}_2 |\mathbf{v}_2\rangle + \tilde{C}_3 |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \tilde{C}_{n-2} |\mathbf{v}_{n-2}\rangle = \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{C}_i |\mathbf{v}_i\rangle,$$

$$i\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = \cdots = \tilde{C}_{n-1} = 0.?$$

se repite este procedimiento hasta encontrar un conjunto  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_{n-j}\rangle\}$  de vectores linealmente independientes. Esto es  $i\check{C}_1 = \check{C}_2 = \check{C}_3 = \cdots = \check{C}_{n-j} = 0$ ! y por lo tanto

$$|\mathbf{v}_{n-j+1}\rangle = \check{C}_1 |\mathbf{v}_1\rangle + \check{C}_2 |\mathbf{v}_2\rangle + \check{C}_3 |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \check{C}_{n-j} |\mathbf{v}_{n-i}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \check{C}_i |\mathbf{v}_i\rangle,$$

$$\check{C}_1 = \check{C}_2 = \check{C}_3 = \cdots = \check{C}_{n-j} = 0.?$$

$i\check{C}_1 = \check{C}_2 = \check{C}_3 = \cdots = \check{C}_{n-j} = 0$ ! y por lo tanto

$$|\mathbf{0}\rangle = \check{C}_1 |\mathbf{v}_1\rangle + \check{C}_2 |\mathbf{v}_2\rangle + \check{C}_3 |\mathbf{v}_3\rangle \cdots + \check{C}_{n-j} |\mathbf{v}_{n-j}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} \check{C}_i |\mathbf{v}_i\rangle,$$

En este caso diremos que  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_{n-j}\rangle\}$  es una base para  $\mathbf{V}$ . La dimensión de  $\mathbf{V}$  sera el conjunto de vectores linealmente independientes, que para este caso es  $n - j$ . Así se puede comprobar que, dado  $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$  entonces

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^{n-j} C_i |\mathbf{v}_i\rangle, \quad \forall |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$$

y el conjunto  $\{C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-j}\}$  es único. Diremos que el número mínimo de vectores,

$$|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_{n-j}\rangle$$

que expanden  $\mathbf{V}$  conforman una base de ese espacio vectorial, y que el número finito de escalares  $\{C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-j}\}$  constituyen las componentes de  $|\mathbf{x}\rangle$  relativas a la base  $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, \dots, |\mathbf{v}_{n-j}\rangle$ . Del ejemplo anterior se puede concretar la siguiente definición

A un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial,

$$\mathcal{B} = \{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \dots, |\mathbf{v}_n\rangle\} \in \mathbf{V},$$

se les denominará base de ese espacio  $\mathbf{V}$  si los  $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \dots, |\mathbf{v}_n\rangle$  son linealmente independientes y expanden  $\mathbf{V}$ . El espacio vectorial se denominará de dimensión finita si la base es finita y de dimensión infinita si, por el contrario su base es infinita.

Es fácil darse cuenta que si  $\mathbf{V}$  lo expanden  $n$  vectores linealmente independientes, cualquier otro vector  $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$  será linealmente dependiente. Igualmente fácilmente demostrable que todas las bases de un espacio vectorial  $\mathbf{V}$ , de dimensión finita, tendrán el mismo número de elementos y ese número de elemento será la dimensión del espacio.

Adicionalmente, puede ser que dentro de un espacio vectorial  $\mathbf{V}$  se puedan encontrar subespacios y dentro de esos subespacios un conjunto de vectores base. Vale decir  $\forall |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$  :

$$|\mathbf{x}\rangle = \underbrace{C_1 |\mathbf{v}_1\rangle \dots + C_{n-j} |\mathbf{v}_{n-j}\rangle}_{\mathbf{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1} |\mathbf{v}_{n-j+1}\rangle \dots + C_{n-k} |\mathbf{v}_{n-k}\rangle}_{\mathbf{S}_2} + \underbrace{C_{n-k+1} |\mathbf{v}_{n-k+1}\rangle \dots + C_n |\mathbf{v}_n\rangle}_{\mathbf{S}_3}$$

Entonces  $|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle + |\mathbf{x}_2\rangle + |\mathbf{x}_3\rangle$  con  $|\mathbf{x}_1\rangle \in \mathbf{S}_1$ ;  $|\mathbf{x}_2\rangle \in \mathbf{S}_2$ ;  $|\mathbf{x}_3\rangle \in \mathbf{S}_3$ , entonces diremos que  $\mathbf{V}$  es la suma directa de  $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$  y  $\mathbf{S}_3$  y lo denotaremos como  $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \mathbf{S}_3$

### 5.3. El determinante de Gram

Existe una forma directa de comprobar la independencia lineal de una conjunto de vectores  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \dots, |\mathbf{v}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ , y es como sigue: dado  $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$  entonces

$$|\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{v}_i\rangle, \Rightarrow \begin{cases} C_1 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle + C_2 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle + C_3 \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle + \dots + C_n \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_n \rangle & = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{x} \rangle \\ C_1 \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle + C_2 \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle + C_3 \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle + \dots + C_n \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_n \rangle & = \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{x} \rangle \\ \vdots & \vdots \\ C_1 \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_1 \rangle + C_2 \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_2 \rangle + C_3 \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_3 \rangle + \dots + C_n \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_n \rangle & = \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{x} \rangle \end{cases}$$

donde las  $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  son las incógnitas, por lo cual para que este sistema tenga solución se impone que

$$\begin{vmatrix} \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_3 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_3 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_3 \rangle & \dots & \langle \mathbf{v}_n | \mathbf{v}_n \rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto es que el determinante de Gram<sup>6</sup> distinto de cero implica que el conjunto  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \dots, |\mathbf{v}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$  es linealmente independiente. La inversa también es cierta.

<sup>6</sup>Jorgen Pedersen Gram (1850-1916 Dinamarca) Matemático Danés, que alternaba su actividad de gerente de una importante compañía de seguros con las matemáticas (Probabilidad, Análisis Numérico y Teoría de Números). Es conocido mayormente por el método de ortogonalización, pero se presume que no fue él quien primero lo utilizó. Aparentemente fue ideado por Laplace y utilizado también por Cauchy en 1836. Gram murió arrollado por una bicicleta a la edad de 61 años.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians>

**Ejemplos**

- $\mathbf{V}^n$  tendrá dimensión  $n$  y una de las posibles bases  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle \cdots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$  será

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1\rangle &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ |\mathbf{v}_2\rangle &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ |\mathbf{v}_3\rangle &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ |\mathbf{v}_{n-j}\rangle &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

Esta base se conoce con el nombre de base canónica.

- El espacio de polinomios,  $\mathcal{P}^n$ , de grado  $g \leq n$  tendrá como una de las posibles bases al conjunto  $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ , por que cualquier polinomio de grado  $\leq n$  podrá ser expresado como combinación lineal de estos  $n+1$  vectores. Más aún, el espacio de **todos** los polinomios,  $\mathcal{P}^\infty$ , tendrá como una posible base al conjunto de funciones  $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n \dots\}$ . En este caso  $\mathcal{P}^\infty$  será infinito dimensional.

**5.4. Ortogonalidad y Bases Ortogonales**

En un espacio vectorial con producto interno, dos vectores  $|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle$  serán ortogonales si su producto interno se anula

$$|\mathbf{u}_1\rangle \perp |\mathbf{u}_2\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

Se denomina un conjunto ortogonal de vectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  si

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij} \|\mathbf{u}_j\|^2 \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y con} \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

y se denominará conjunto ortonormal si  $\|\mathbf{u}_j\|^2 = 1$ .

Un conjunto ortogonal de vectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$  es linealmente independiente, más aún, para el caso particular de un espacio euclidiano,  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  conforman una base ortogonal para  $\mathbf{V}$ . La demostración es sencilla. Para un determinado espacio vectorial una combinación lineal de los  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  se anula.

$$\sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle = |\mathbf{0}\rangle \Rightarrow \begin{cases} \langle \mathbf{u}_1 | [\sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{1i} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2 | [\sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{2i} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ \langle \mathbf{u}_3 | [\sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{3i} = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_n | [\sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle] = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \delta_{ni} = 0 \Rightarrow C_n = 0 \end{cases}$$

con lo cual es claro que  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  son linealmente independientes. Si la dimensión de  $\mathbf{V}$ , es  $n$ ,  $\dim \mathbf{V} = n$  y tenemos  $n$  vectores linealmente independientes, entonces esos  $n$  vectores  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle \cdots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  forman una base ortogonal para  $\mathbf{V}$ , y por lo tanto las componentes de un vector en esa base se pueden expresar de manera simple.

$$\forall |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V} \quad |\mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle \Rightarrow \langle \mathbf{u}_j | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{u}_j | \left[ \sum_{i=1}^n C_i |\mathbf{u}_i\rangle \right] \Rightarrow C_j = \frac{\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{u}_j | \mathbf{u}_j \rangle}$$

En el caso de un conjunto ortonormal de vectores  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle \cdots, |\mathbf{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}^n$  con  $\|\mathbf{e}_j\|^2 = 1$ , las componentes de cualquier vector quedan determinadas de una forma todavía más simple y con consecuencias

mucho más impactantes

$$\| |e_j\rangle \|^2 = 1 \Rightarrow C_j = \langle e_j | x \rangle \Rightarrow |x\rangle = \sum_{i=1}^n C_i |e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle |e_i\rangle \equiv \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| \right)}_{\mathbf{1}} |x\rangle$$

por lo tanto es bueno recalcar la relación de cierre

$$\sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| = \mathbf{1}$$

con lo cual es trivial demostrar la fórmula de Parseval.

$$\forall |x\rangle |y\rangle \in \mathbf{V} \quad \langle y | x \rangle \equiv \langle y | \left( \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| \right) |x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle y | e_i \rangle \langle e_i | x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle y | e_i \rangle \langle x | e_i \rangle^*$$

la cual se concreta para el caso de  $|x\rangle \equiv |y\rangle$  en la generalización del Teorema de Pitágoras

$$\langle x | x \rangle \equiv \| |x\rangle \|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x | e_i \rangle|^2$$

### Ejemplos

- **Funciones Trigonómicas:** Uno de los ejemplos más emblemáticos es el caso de las funciones continuas, reales de variable real y definidas en  $[0, 2\pi]$ ,  $C_{[0,2\pi]}^\infty$ , con lo cual el producto interno viene definido por  $\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} dx f(x) g(x)$  ésto es el conjunto de funciones  $\{ |u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle, \dots \}$  representadas por

$$|u_0\rangle = 1, \quad |u_{2n-1}\rangle = \cos nx \quad \text{y} \quad |u_{2n}\rangle = \sin nx, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

Es claro que  $\{ |u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, \dots, |u_n\rangle, \dots \}$  es un conjunto de funciones ortogonales por cuanto

$$\langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm} \| |u_n\rangle \|^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \| |u_n\rangle \|^2 & \text{si } n = m \end{cases} \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx \sin nx \sin mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos nx \sin mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos nx \cos mx = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx = 2\pi & \text{si } n = m = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx \cos^2 nx = \pi & \text{si } i = j = 2l - 1 \\ \int_0^{2\pi} dx \sin^2 nx = \pi & \text{si } i = j = 2l \end{cases}$$

con  $l = 1, 2, 3, \dots$  también. Por lo tanto, podremos construir una base ortonormal de funciones  $\{ |e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle, \dots \}$  de la forma

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |e_{2n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad \text{y} \quad |e_{2n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx.$$



Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$  puede expresarse en términos de esta base como

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i |\mathbf{e}_i\rangle \quad \Rightarrow \quad C_i = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{f} \rangle = \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) = a_0 & \text{si } i = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos nx = a_{2n-1} & \text{si } i = 2n - 1 \\ \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin nx = a_{2n} & \text{si } i = 2n \end{cases}$$

donde los  $C_i$  son los coeficientes de Fourier

- Otro de los ejemplos típicos lo constituye los llamados polinomios de Legendre. Polinomios  $P_n(x)$  definidos en el intervalo  $[-1, 1]$  y generados a partir de la Fórmula de Rodrigues<sup>7</sup>

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con  $P_0(x) = 1$ . Los polinomios de Legendre son solución de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2) y'' - 2x y' + \lambda(\lambda + 1) y = 0$$

$\lambda$	Ecuación de Legendre	Solución
0	$(1 - x^2) y'' - 2x y' = 0$	$y_0(x) = 1$
1	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 2 y = 0$	$y_1(x) = x$
2	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 6 y = 0$	$y_0(x) = 1 - 3x^2$
3	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 12 y = 0$	$y_1(x) = x - \frac{5}{3}x^3$
4	$(1 - x^2) y'' - 2x y' + 20 y = 0$	$y_0(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$

Es fácil comprobar que los polinomios de Legendre  $|\mathbf{P}_\alpha\rangle = P_\alpha(x)$  son mutuamente ortogonales con un producto interno definido como

$$\langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm}$$

con norma definida por

$$\|\mathbf{P}_n\|^2 = \langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}$$

Cualquier función en el intervalo  $[-1, 1]$  puede ser expresada en esa base.

$$f(x) = |\mathbf{F}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} |\mathbf{P}_k\rangle$$

Varios ejemplos ilustrarán esta aplicación. Si  $f(x)$  es un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\mathbf{P}_k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

<sup>7</sup>Benjamin Olinde Rodrigues (1794 Burdeos, Francia - 1851, París Francia) Banquero, Matemático y activista político solcialista Francés durante la Revolución Francesa. De origen judío, y cuyas contribuciones fundamentales como la fórmula para la generación de Polinomios de Legendre, permanecieron olvidadas por mucho tiempo.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians>

no se requiere hacer ninguna integral por cuanto los coeficientes  $a_n$  se determinan a través de un sistema de ecuaciones algebraicas. Para el caso de  $f(x) = x^2$  tendremos

$$f(x) = x^2 = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$$

$$f(x) = x^2 = a_0 + a_1x + \frac{1}{2}a_2(3x^2 - 1)$$

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$$

Quedará como ejercicio demostrar que para el caso de

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle}{\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{P}_k \rangle} |\mathbf{P}_k\rangle = \frac{2}{3}P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}$$

con

$$\langle \mathbf{P}_k | \mathbf{F} \rangle = \int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}}P_k(x)dx$$

### 5.5. Ortogonalización

Hemos visto que un conjunto de vectores ortogonales forman base para un espacio vectorial. Ahora bien, siempre es posible construir un conjunto de vectores ortogonales a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Es método de “ortogonalización” se conoce como el método de Gram-Schmidt<sup>8</sup>, en honor de estos dos matemáticos alemanes que NO inventaron el método, el cual al parecer se le debe al matemático francés P.S. Laplace.

Dado un conjunto de vectores linealmente independientes,  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \dots, |\mathbf{v}_n\rangle\}$  que expanden un espacio Euclídiano de dimensión finita,  $E^n$ . Entonces siempre se puede construir un conjunto ortogonal de vectores,  $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \dots, |\mathbf{u}_n\rangle\}$  que también expandan  $E^n$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_1\rangle &\equiv |\mathbf{v}_1\rangle \\ |\mathbf{u}_2\rangle &\equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle && \ni \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ |\mathbf{u}_3\rangle &\equiv |\mathbf{v}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle && \ni \begin{cases} \langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \end{cases} \\ |\mathbf{u}_4\rangle &\equiv |\mathbf{v}_4\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 | \mathbf{u}_3 \rangle}{\langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_3 \rangle} |\mathbf{u}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 | \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle && \ni \begin{cases} \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_3 \rangle = 0 \end{cases} \\ \vdots & && \vdots \\ |\mathbf{u}_n\rangle &\equiv |\mathbf{v}_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{v}_n | \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_i \rangle} |\mathbf{u}_i\rangle && \ni \begin{cases} \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_3 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}_4 | \mathbf{u}_{n-1} \rangle = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Erhard Schmidt (1876, Estonia-1959 Alemania). Matemático Alemán fundador del primer instituto de matemáticas aplicadas de Berlín. Alumno de Hilbert, Schmidt hizo sus mayores contribuciones en Ecuaciones Integrales y Teoría de Funciones en el Espacio de Hilbert.

Más detalles <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians>

Así siempre es posible construir una base ortonormal a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes. Esta base ortogonal será única en  $E^n$ , si existe otra sus vectores serán proporcionales, Más aún, cada espacio vectorial  $\mathbf{V}^n$  de dimensión finita tendrá una base ortogonal asociada.

### Ejemplos

- El subespacio de  $\mathbf{V}^4$  expandido por los siguientes vectores

$$|\mathbf{v}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tendrá una base ortogonal asociada dada por

$$|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle =$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\frac{9}{12}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix};$$

y la base ortonormal asociada será

$$|\mathbf{e}_1\rangle = \frac{|\mathbf{u}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle}} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{e}_2\rangle = \frac{|\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle}} = \left( \frac{\sqrt{12}}{12} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$|\mathbf{e}_3\rangle = \frac{|\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_3 \rangle} = \left( \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

- Para el caso de  $\mathbb{R}^2$  es muy claro. Si tenemos dos vectores  $|\mathbf{v}_1\rangle$  y  $|\mathbf{v}_2\rangle$  linealmente independientes,

$$|\mathbf{v}_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{v}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

elegimos  $|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle$  entonces,  $|\mathbf{u}_2\rangle$  vendrá dado por

$$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle \Rightarrow |\mathbf{u}_2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tal y como se esperaba, el otro vector ortogonal es el canónico.

- Si consideramos el espacio de polinomios,  $\mathcal{P}^n$ , de grado  $g \leq n$  definidos en el intervalo  $[-1, 1]$  Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto  $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$  con el producto interno viene definido por  $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x) g(x)$ . Por lo tanto, se procede a construir una base ortogonal de la forma

$$|\mathbf{u}_0\rangle \equiv |\mathbf{v}_0\rangle = 1$$

$$|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{v}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u}_0 \rangle}{\langle \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_0 \rangle} |\mathbf{u}_0\rangle = t$$

$$\langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{u}_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx t = 0; \quad \langle \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_0 \rangle}{\langle \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_0 \rangle} |\mathbf{u}_0\rangle = t^2 - \frac{1}{3}$$

$$\langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^2 = \frac{2}{3}; \quad \langle \mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^3 = 0;$$

$$\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^2 = \frac{2}{3}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{v}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle} |\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_0 \rangle}{\langle \mathbf{u}_0 | \mathbf{u}_0 \rangle} |\mathbf{u}_0\rangle = t^3 - \frac{3}{5}t$$

$$\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_0 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^3 = 0; \quad \langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_1 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^4 = \frac{2}{5}$$

$$\langle \mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx t^3 (t^2 - \frac{1}{3}) = 0; \quad \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle = \int_{-1}^1 dx (t^2 - \frac{1}{3})^2 = \frac{8}{45}$$

⋮

Podemos resumir

$ \mathbf{v}_1\rangle$	$ \mathbf{u}_1\rangle$	$ \mathbf{e}_1\rangle$
1	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$t$	$t$	$\sqrt{\frac{3}{2}}t$
$t^2$	$(t^2 - \frac{1}{3})$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1)$
$t^3$	$(t^3 - \frac{3}{5}t)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5t^3 - 3t)$
$t^4$	$(t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35})$	$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35t^4 - 30t^2 + 3)$
⋮	⋮	⋮

### 5.6. Complementos Ortogonales.

Sea un subespacio  $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$  un elemento  $|\bar{\mathbf{v}}_i\rangle \in \mathbf{V}$  se dice ortogonal a  $\mathbf{S}$  si  $\langle \mathbf{s}_k | \bar{\mathbf{v}}_i \rangle = 0 \quad \forall |\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S}$ ,  $|\bar{\mathbf{v}}_i\rangle$  es decir, es ortogonal a todos los elementos de  $\mathbf{S}$ . El conjunto  $\{|\bar{\mathbf{v}}_1\rangle, |\bar{\mathbf{v}}_2\rangle, |\bar{\mathbf{v}}_3\rangle, \dots, |\bar{\mathbf{v}}_m\rangle\}$  de todos los elementos ortogonales a  $\mathbf{S}$ , se denomina  $S$ -perpendicular y se denota como  $\mathbf{S}^\perp$ . Es fácil demostrar que  $\mathbf{S}^\perp$  es un subespacio, aún si  $\mathbf{S}$  no lo es.

### 5.7. Descomposición ortogonal

Dado  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \dots, |\mathbf{v}_n\rangle, \dots\}$  un Espacio Euclidiano  $\mathbf{V}$  y un subespacio de  $\mathbf{V}$  con dimensión finita,  $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$  y  $\dim \mathbf{V} = \mathbf{m}$ . Entonces  $\forall |\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V}$  se puede expresar como suma de dos vectores  $|\mathbf{s}_k\rangle \in$

$\mathbf{S} \wedge |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$ . Esto es

$$|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \quad |\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S} \wedge |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$$

Más aún, la norma de  $|\mathbf{v}_k\rangle$  se calcula a través del teorema de Pitágoras generalizado

$$\| |\mathbf{v}_k\rangle \|^2 = \| |\mathbf{s}_k\rangle \|^2 + \| |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \|^2$$

La demostración es sencilla. Primero se prueba que la descomposición ortogonal  $|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp$  es siempre posible. Para ello recordamos que  $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$  es de dimensión finita, por lo tanto existe una base ortonormal  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \dots, |\mathbf{e}_m\rangle\}$  para  $\mathbf{S}$ . Esto es, dado un  $|\mathbf{v}_k\rangle$  definimos los elementos  $|\mathbf{s}_k\rangle$  y  $|\mathbf{s}_k\rangle^\perp$  como siguen

$$|\mathbf{s}_k\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i \rangle |\mathbf{e}_i\rangle \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_k\rangle^\perp = |\mathbf{v}_k\rangle - |\mathbf{s}_k\rangle$$

Nótese que  $\langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i \rangle |\mathbf{e}_i\rangle$  es la proyección de  $|\mathbf{v}_k\rangle$  a lo largo de  $|\mathbf{e}_i\rangle$  y  $|\mathbf{s}_k\rangle$  se expresa combinación lineal de la base de  $\mathbf{S}$ . Por lo tanto está en  $\mathbf{S}$ . Por otro lado,

$${}^\perp \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_k - \mathbf{s}_k | \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i \rangle - \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i \rangle - \left[ \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j | \right] |\mathbf{e}_i\rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \perp |\mathbf{e}_j\rangle$$

lo cual indica que  $|\mathbf{s}_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$ .

Pero, podemos ir un poco más allá. La descomposición  $|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp$  es única en  $\mathbf{V}$ . Para ello suponemos que existen dos posibles descomposiciones, vale decir

$$|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \quad \wedge \quad |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{t}_k\rangle + |\mathbf{t}_k\rangle^\perp \quad \text{con } |\mathbf{s}_k\rangle \wedge |\mathbf{t}_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \wedge |\mathbf{t}_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp$$

Por lo tanto

$$|\mathbf{v}_k\rangle - |\mathbf{v}_k\rangle = (|\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp) - (|\mathbf{t}_k\rangle + |\mathbf{t}_k\rangle^\perp) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle = |\mathbf{t}_k\rangle^\perp - |\mathbf{s}_k\rangle^\perp$$

Pero  $|\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle \in \mathbf{S}$ , por lo tanto ortogonal a todos los elementos de  $\mathbf{S}^\perp$  y  $|\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle = |\mathbf{t}_k\rangle^\perp - |\mathbf{s}_k\rangle^\perp$  con lo cual  $|\mathbf{s}_k\rangle - |\mathbf{t}_k\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$  que es el único elemento que es ortogonal a el mismo y en consecuencia la descomposición  $|\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp$  es única. Finalmente, con la definición de norma

$$\| |\mathbf{v}_k\rangle \|^2 = \| |\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \|^2 = (\langle \mathbf{s}_k | + \langle \mathbf{s}_k |^\perp) (|\mathbf{s}_k\rangle + |\mathbf{s}_k\rangle^\perp) = \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{s}_k \rangle + \langle \mathbf{s}_k | \mathbf{s}_k \rangle^\perp \| |\mathbf{s}_k\rangle \|^2 + \| |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \|^2$$

Así, dado  $\mathbf{S}^m$  un subespacio de  $\mathbf{V}$  de dimensión finita y dado un  $|\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V}$  el elemento

$$|\mathbf{s}_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \ni \quad |\mathbf{s}_k\rangle = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{v}_k | \mathbf{e}_i \rangle |\mathbf{e}_i\rangle$$

será la proyección de  $|\mathbf{v}_k\rangle$  en  $\mathbf{S}$ .

Dado un vector  $|\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V}$  y un subespacio de  $\mathbf{V}$  con dimensión finita,  $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$  y  $\dim \mathbf{V} = m$ , entonces la distancia de  $|\mathbf{x}\rangle$  a  $\mathbf{S}^m$  es la norma de la componente de  $|\mathbf{x}\rangle$ , perpendicular a  $\mathbf{S}^m$ .

## 6. Temas Avanzados

### 6.1. Aproximación de Funciones

Sea  $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle, \dots, |\mathbf{v}_n\rangle, \dots\}$  un Espacio Euclidiano  $\mathbf{V}$  y un subespacio de  $\mathbf{V}$  con dimensión finita,  $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$  y  $\dim \mathbf{V} = \mathbf{m}$ , y sea un elemento  $|\mathbf{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ . La proyección de  $|\mathbf{v}_i\rangle$  en  $\mathbf{S}^m$ ,  $|\mathbf{s}_i\rangle$ , será el elemento de  $\mathbf{S}^m$  más próximo a  $|\mathbf{v}_i\rangle$ . En otras palabras

$$\| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \| \leq \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \| \quad \forall |\mathbf{t}_i\rangle \in \mathbf{S}$$

La demostración se sigue así

$$|\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle = (|\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle) - (|\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle) \quad \Rightarrow \quad \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2 = \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \|^2 + \| |\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2$$

ya que  $|\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle = |\mathbf{s}_k\rangle^\perp \in \mathbf{S}^\perp \quad \wedge \quad |\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \in \mathbf{S}$ , y vale el teorema de Pitágoras generalizado. Ahora bien, como

$$\| |\mathbf{s}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \|^2 \geq \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \|^2 \quad \Rightarrow \quad \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{t}_i\rangle \| \geq \| |\mathbf{v}_i\rangle - |\mathbf{s}_i\rangle \|^2$$

#### Ejemplos

- Desarrollemos la aproximación de funciones continuas, reales de variable real y definidas en  $[0, 2\pi]$ ,  $\mathcal{C}_{[0, 2\pi]}^\infty$ , mediante funciones Trigonómicas y con el producto interno definido por  $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} dx f(x) g(x)$ . Hemos visto que para este espacio vectorial tenemos una base ortonormal definida por

$$|\mathbf{e}_0\rangle = \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad |\mathbf{e}_{2n-1}\rangle = \varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \quad \text{y}$$

$$|\mathbf{e}_{2n}\rangle = \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx.$$

Por lo tanto cualquier función definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$  puede expresarse en términos de esta base como

$$|\mathbf{f}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i |\mathbf{e}_i\rangle \quad \text{con}$$

$$C_i = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{f} \rangle = \int_0^{2\pi} dx f(x) \varphi_i(x) = \begin{cases} \int_0^{2\pi} dx f(x) = a_0 & \text{si } i = 0 \\ \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos nx = a_{2n-1} & \text{si } i = 2n - 1 \\ \int_0^{2\pi} dx \sin nx f(x) = a_{2n} & \text{si } i = 2n \end{cases}$$

donde los  $C_i$  son los coeficientes de Fourier. Es decir, cualquier función puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

con

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos kx \quad \wedge \quad b_k = \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin kx$$

Es claro que para la aproximación de funciones por funciones Trigonómicas cuyos coeficientes son los coeficientes de Fourier constituyen la mejor aproximación. Por lo tanto, de todas las funciones  $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{C}_{[0,2\pi]}^\infty$  las funciones trigonométricas,  $\mathcal{T}(x)$  minimizan la desviación cuadrática media

$$\int_0^{2\pi} dx (f(x) - \mathcal{P}(x))^2 \geq \int_0^{2\pi} dx (f(x) - \mathcal{T}(x))^2$$

## 6.2. El Método de Mínimos Cuadrados

Una de las aplicaciones más importantes en la aproximación de funciones es el método de mínimos cuadrados. La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física,  $C$  a partir de un conjunto de medidas experimentales:  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ . La intención es encontrar en el mejor valor de  $C$  a partir de ese conjunto de datos experimentales.

Para ello asociamos el conjunto de medidas  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  con las componentes de un vector  $|\mathbf{x}\rangle$  en  $\mathbb{R}^n$ . Así

$$|\mathbf{x}\rangle = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \wedge \quad C|\mathbf{y}\rangle = (C, C, C, \dots, C)$$

Por lo tanto si la mejor aproximación de  $C|\mathbf{y}\rangle$ , que llamaremos  $C'|\mathbf{y}\rangle$ , será la proyección perpendicular de  $|\mathbf{x}\rangle$  (las medidas) sobre el subespacio generado por  $|\mathbf{y}\rangle$ . Esto es

$$C' = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \dots + x_n}{n}$$

que no es otra cosa que el promedio aritmético de las medidas. Es claro que la proyección perpendicular de  $|\mathbf{x}\rangle$  sobre  $|\mathbf{y}\rangle$  hace mínimo la distancia entre el subespacio perpendicular generado por  $|\mathbf{y}\rangle$  y el vector  $|\mathbf{x}\rangle$ . Es decir hace mínimo el cuadrado de esa distancia

$$[d(|\mathbf{x}\rangle, C'|\mathbf{y}\rangle)]^2 = \langle \mathbf{x} - C'\mathbf{y} | \mathbf{x} - C'\mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i - C')^2$$

Es claro que este problema se puede generalizar si se desea medir dos (o  $n$ ) cantidades. Para el caso de dos cantidades extendemos la dimensión del espacio. Por lo tanto, los resultados experimentales se acumularán en un vector de  $2n$  dimensiones

$$|\mathbf{x}\rangle = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n})$$

mientras que los vectores que representan las cantidades más aproximadas serán

$$C'_1|\mathbf{y}_1\rangle = \left( \underbrace{C'_1, C'_1, C'_1, \dots, C'_1}_n, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_n \right) \quad \wedge \quad C'_2|\mathbf{y}_2\rangle = (0, 0, 0, \dots, 0, C'_2, C'_2, C'_2, \dots, C'_2)$$

Ahora  $\{|\mathbf{y}_1\rangle, |\mathbf{y}_2\rangle\}$  expanden un subespacio vectorial sobre el cual  $|\mathbf{x}\rangle$  tiene como proyección ortogonal  $C'_1|\mathbf{y}_1\rangle + C'_2|\mathbf{y}_2\rangle$  y consecuentemente  $|\mathbf{x} - C'_1\mathbf{y}_1 - C'_2\mathbf{y}_2\rangle$  será perpendicular a  $\{|\mathbf{y}_1\rangle, |\mathbf{y}_2\rangle\}$ , por lo tanto

$$C'_1 = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y}_1 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_1 \rangle} = \frac{x_{11} + x_{12} + x_{13}, \dots + x_{1n}}{n} \quad \wedge \quad C'_2 = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y}_2 \rangle}{\langle \mathbf{y}_2 | \mathbf{y}_2 \rangle} = \frac{x_{21} + x_{22} + x_{23}, \dots + x_{2n}}{n}$$

La consecuencia más conocida de esta aproximación de funciones es el “ajuste” de un conjunto de datos experimentales  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$  a la ecuación de una recta  $y = cx$ . En este caso, el planteamiento del problema se reduce a encontrar el vector  $C'|\mathbf{x}\rangle$  en el subespacio  $\mathbf{S}(|\mathbf{x}\rangle)$  esté lo más cercano posible al vector  $|\mathbf{y}\rangle = C|\mathbf{x}\rangle$ . Por lo tanto  $\|C'\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$  será lo menor posible y  $|C'\mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle$  será perpendicular a  $\mathbf{S}(|\mathbf{x}\rangle)$ , por lo tanto

$$\langle \mathbf{x} | C'\mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \dots + x_ny_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \dots + x_n^2}$$



**Ejemplo** Si el conjunto de datos experimentales es  $\{(1, 2), (3, 2), (4, 5), (6, 6)\}$  ¿cuál es la recta que ajusta más acertadamente a estos puntos? La ecuación queda como

$$|\mathbf{y}\rangle = c |\mathbf{x}\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow c' = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \frac{2 + 6 + 20 + 36}{1 + 9 + 16 + 36} = \frac{32}{31}$$

Ahora bien, se puede generalizar esta procedimiento cuando se tiene que una cantidad  $y$  que es una combinación lineal desconocida de un conjunto de cantidades

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + \cdots + C_m x_m$$

En este caso se ejecutarán  $n$  experimentos con  $n > m$  y el conjunto de medidas experimentales serán

$$(y_1, x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1m}; y_2, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2m}; y_3, x_{31}, x_{32}, x_{33}, \cdots, x_{3m}; \cdots, y_n, x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{nm})$$

y a partir de ellas generamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= C'_1 x_{11} + C'_2 x_{12} + C'_3 x_{13}, \cdots + C'_m x_{1m} \\ y_2 &= C'_1 x_{21} + C'_2 x_{22} + C'_3 x_{23}, \cdots + C'_m x_{2m} \\ y_3 &= C'_1 x_{31} + C'_2 x_{32} + C'_3 x_{33}, \cdots + C'_m x_{3m} \\ &\vdots \\ y_n &= C'_1 x_{n1} + C'_2 x_{n2} + C'_3 x_{n3}, \cdots + C'_m x_{nm} \end{aligned}$$

en el cual las incógnitas  $\{C'_1, C'_2, C'_3, \cdots, C'_m\}$  hacen que el lado derecho de las ecuaciones antes mencionadas sean los más próximas a las  $\{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$  por lo tanto si consideramos los vectores

$$|\mathbf{x}_1\rangle = (x_{11}, \cdots, x_{1n}); |\mathbf{x}_2\rangle = (x_{21}, \cdots, x_{2n}); \cdots |\mathbf{x}_m\rangle = (x_{m1}, \cdots, x_{mn}); |\mathbf{y}\rangle = (y_{m1}, \cdots, y_n)$$

por lo tanto los  $\{|\mathbf{x}_1\rangle, |\mathbf{x}_2\rangle, \cdots, |\mathbf{x}_m\rangle\}$  expanden el subespacio  $\mathbf{S}(|\mathbf{x}_1\rangle, |\mathbf{x}_2\rangle, \cdots, |\mathbf{x}_m\rangle)$  donde está la aproximación de  $|\mathbf{y}\rangle$ . Por lo tanto la distancia de este subespacio al vector  $|\mathbf{y}\rangle$ , será mínimo. Esto es

$$[d(\mathbf{S}(C'_i |\mathbf{x}_i\rangle), |\mathbf{y}\rangle)]^2 = \langle \mathbf{S}(C'_i |\mathbf{x}_i\rangle) - \mathbf{y} | \mathbf{S}(C'_i |\mathbf{x}_i\rangle) - \mathbf{y} \rangle$$

y por lo tanto  $|\mathbf{S}(C'_i |\mathbf{x}_i\rangle) - \mathbf{y}\rangle$  será ortogonal a

$$\langle \mathbf{x}_j | \mathbf{S}(C'_i |\mathbf{x}_i\rangle) - \mathbf{y} \rangle \equiv \langle \mathbf{x}_i | \sum_{i=1}^m C'_i |\mathbf{x}_i\rangle - \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, m$$

por lo tanto podemos construir el sistema de ecuaciones normales para la aproximación que hemos considerado:

$$\begin{aligned} C'_1 \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_1 \rangle + C'_2 \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2 \rangle + C'_3 \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_3 \rangle + \cdots + C'_m \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_m \rangle &= \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{y} \rangle \\ C'_1 \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1 \rangle + C'_2 \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_2 \rangle + C'_3 \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_3 \rangle + \cdots + C'_m \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_m \rangle &= \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{y} \rangle \\ &\vdots \\ C'_1 \langle \mathbf{x}_m | \mathbf{x}_1 \rangle + C'_2 \langle \mathbf{x}_m | \mathbf{x}_2 \rangle + C'_3 \langle \mathbf{x}_m | \mathbf{x}_3 \rangle + \cdots + C'_m \langle \mathbf{x}_m | \mathbf{x}_m \rangle &= \langle \mathbf{x}_m | \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

donde, tal y como se ha señalado, las incógnitas son las  $\{C'_1, C'_2, C'_3, \cdots, C'_m\}$

**Ejemplos**

- Se sospecha que una determinada propiedad de un material cumple con la ecuación  $y = ax_1 + bx_2$ . Si al realizar un conjunto de medidas experimentales obtenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_3 \\ x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} y_4 \\ x_{41} \\ x_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es claro que tenemos un subespacio de  $m = 2$  dimensiones y hemos hecho  $n = 4$  veces el experimento. Por lo tanto los vectores considerados arriba serán

$$|\mathbf{x}_1\rangle = (1, 2, 1, 1); \quad |\mathbf{x}_2\rangle = (2, 1, 1, -1); \quad |\mathbf{y}\rangle = (15, 12, 10, 0)$$

por lo tanto

$$\left. \begin{matrix} 7a + 4b = 49 \\ 4a + 7b = 52 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{45}{11} \\ b = \frac{56}{11} \end{cases} \Rightarrow 11y = 45x_1 + 56x_2$$

- Se puede extender el razonamiento anterior y generar un ajuste lineal cuadrático. Esto es, el ajuste lineal es en los coeficiente, pero la funcionalidad de la ley a la cual queremos ajustar los datos puede ser un polinomio de cualquier orden. Ese es el caso de una parábola que ajusta al siguiente conjunto de puntos

$$\{(0, 1), (1, 3), (2, 7), (3, 15)\} \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$$

Las ecuaciones toman la forma de

$$\begin{aligned} 1 &= 0 + 0 + c \\ 3 &= a + b + c \\ 7 &= 4a + 2b + c \\ 15 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

y los vectores construidos a partir de los datos experimentales serán

$$|\mathbf{x}_1\rangle = (0, 1, 4, 9); \quad |\mathbf{x}_2\rangle = (0, 1, 2, 3); \quad |\mathbf{x}_3\rangle = (1, 1, 1, 1); \quad |\mathbf{y}\rangle = (1, 3, 7, 15)$$

las ecuaciones normales para este sistema son

$$\left. \begin{matrix} 136 = 98a + 36b + 14c \\ 62 = 36a + 14b + 6c \\ 26 = 14a + 6b + 4c \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = \frac{113}{5} \\ c = -\frac{32}{5} \end{cases} \Rightarrow y = -6x^2 + \frac{113}{5}x - \frac{32}{5}$$

**Ejercicios** Al medir la temperatura a lo largo de una barra material obtenemos los siguientes valores

$x_i$ (cm)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
$T_i$ (°C)	14,6	18,5	36,6	30,8	59,2	60,1	62,2	79,4	99,9

Encuentre, mediante el método de los mínimos cuadrados los coeficientes que mejor ajustan a una recta  $T = ax + b$

## Referencias

- [1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) QA300 A66C3 1972
- [2] Arfken, G. B., Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [3] Cohen-Tannoudji, C., Diu B. y Laloë (1977) **Quantum Mechanics** Vol 1 (*John Wiley Interscience, Nueva York*)
- [4] Gelfand, I.M. (1961) **Lectures on Linear Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).
- [5] Jordan, T.F. (1969) **Linear Operator for Quantum Mechanics** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).
- [6] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)