

Formulario de Métodos Matemáticos 1

Coordenadas Curvilíneas *

L. A. Núñez**

*Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela. y
Centro Nacional de Cálculo Científico Universidad de Los Andes
(CECALCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Octubre 2007 Versión α 2.1

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Discreción Derivativa | 2 |
| 2. Curvas y parámetros | 4 |
| 3. Coordenadas Curvilíneas Generalizadas | 6 |
| 3.1. Coordenadas generalizadas, vectores y formas | 7 |
| 3.2. Velocidades y Aceleraciones | 7 |
| 3.3. Coordenadas Cartesianas | 8 |
| 3.4. Coordenadas Cilíndricas | 9 |
| 3.5. Coordenadas Esféricas | 10 |
| 3.6. Otros Sistemas Coordinados | 12 |
| 3.6.1. Coordenadas Toroidales | 12 |
| 3.6.2. Coordenadas Elipsoidales | 13 |
| 4. Vectores, Tensores, Métrica y Transformaciones | 14 |
| 4.1. Transformando Vectores | 14 |
| 4.2. Transformando Tensores | 16 |

* **ADVERTENCIA:** El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un **FORMULARIO** y de ninguna manera sustituye a los libros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.

** e-mail: nunez@ula.ve Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

1. Discreción Derivativa

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bien esa característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su dirección, su sentido o todo junto o separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y constante en otra.

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} = \tilde{a}^k |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle_{(t)} = \hat{a}^k(t) |\hat{\mathbf{e}}_k\rangle$$

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable $|a\rangle_{(t)} \iff \vec{a}(t)$ uno rápidamente piensa en establecer un cociente incremental

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|a\rangle_{(t+\Delta t)} - |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} \\ &\Downarrow \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \end{aligned}$$

La misma propuesta se cumplirá para las formas diferenciales ${}_{(t)}\langle a|$. Como siempre, las propiedades de esta operación serán

$$\begin{aligned} \frac{d(|a\rangle_{(t)} + |b\rangle_{(t)})}{dt} &= \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} + \frac{d(|b\rangle_{(t)})}{dt} \\ \frac{d(\alpha(t) |a\rangle_{(t)})}{dt} &= \frac{d(\alpha(t))}{dt} |a\rangle_{(t)} + \alpha(t) \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} \\ \frac{d({}_{(t)}\langle a| |b\rangle_{(t)})}{dt} &= \left(\frac{d({}_{(t)}\langle a|)}{dt} \right) |b\rangle_{(t)} + \langle a|_{(t)} \left(\frac{d(|b\rangle_{(t)})}{dt} \right) \end{aligned}$$

Ahora bien, esto implica que

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} \implies \frac{d(|a\rangle_{(t)})}{dt} = \frac{d(a^k(t) |\mathbf{e}_k\rangle_{(t)})}{dt} = \frac{d a^k(t)}{dt} |\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} + a^k(t) \frac{d(|\mathbf{e}_k\rangle_{(t)})}{dt}$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que sean constantes y otros con bases variables. Así, el radio vector posición de una partícula genera los vectores velocidad y aceleración.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \implies \vec{v}(t) = \frac{d(\vec{r}(t))}{dt} \implies \vec{a}(t) = \frac{d(\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d^2(\vec{r}(t))}{dt^2}$$

ahora bien

$$\vec{r} \equiv |r\rangle = r_P |\mathbf{u}_r\rangle = x_P |\mathbf{i}\rangle + y_P |\mathbf{j}\rangle + z_P |\mathbf{k}\rangle \quad \text{con } |\mathbf{u}_r\rangle = \cos \theta |\mathbf{i}\rangle + \sin \theta |\mathbf{j}\rangle$$

si suponemos que la partícula describe un movimiento entonces

$$\left. \begin{array}{l} r_P = r_P(t) \\ \theta = \theta(t) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right. ; \quad |\mathbf{u}_r\rangle = |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} ; \quad \begin{array}{l} |\mathbf{i}\rangle = \text{const} \\ |\mathbf{j}\rangle = \text{const} \\ |\mathbf{k}\rangle = \text{const} \end{array}$$

con lo cual

$$\frac{d(|\mathbf{u}_r\rangle)}{dt} = \frac{d(\cos\theta(t)|\mathbf{i}\rangle + \text{sen}\theta(t)|\mathbf{j}\rangle)}{dt} = -(\text{sen}\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt}|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}|\mathbf{j}\rangle$$

$$\frac{d(|\mathbf{u}_\theta\rangle)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \underbrace{[-(\text{sen}\theta(t))|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta(t)|\mathbf{j}\rangle]}_{|\mathbf{u}_\theta\rangle} = \frac{d\theta(t)}{dt}|\mathbf{u}_\theta\rangle$$

ya que

$$\| |\mathbf{u}_r\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{u}_r | \mathbf{u}_r \rangle} = \sqrt{[\cos\theta(t)\langle \mathbf{i} | + \text{sen}\theta(t)\langle \mathbf{j} |][\cos\theta(t)|\mathbf{i}\rangle + \text{sen}\theta(t)|\mathbf{j}\rangle]} = 1$$

$$\| |\mathbf{u}_\theta\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{u}_\theta \rangle} = \sqrt{[-(\text{sen}\theta(t))\langle \mathbf{i} | + \cos\theta(t)\langle \mathbf{j} |][-(\text{sen}\theta(t))|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta(t)|\mathbf{j}\rangle]} = 1$$

y

$$\langle \mathbf{u}_r | \mathbf{u}_\theta \rangle = \langle \mathbf{u}_\theta | \mathbf{u}_r \rangle = [-(\text{sen}\theta(t))\langle \mathbf{i} | + \cos\theta(t)\langle \mathbf{j} |][\cos\theta(t)|\mathbf{i}\rangle + \text{sen}\theta(t)|\mathbf{j}\rangle] = 0$$

Más aún

$$\frac{d(|\mathbf{u}_\theta\rangle)}{dt} = \frac{d(-(\text{sen}\theta(t))|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta(t)|\mathbf{j}\rangle)}{dt} = -(\cos\theta(t)|\mathbf{i}\rangle + \text{sen}\theta(t)|\mathbf{j}\rangle) = -\frac{d\theta(t)}{dt}|\mathbf{u}_r\rangle$$

Con lo cual, una partícula que describe un movimiento genérico vendrá descrita en coordenadas cartesianas por

$$\vec{r} \equiv |r\rangle = x_P(t)|\mathbf{i}\rangle + y_P(t)|\mathbf{j}\rangle + z_P(t)|\mathbf{k}\rangle$$

y su velocidad será

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(|r\rangle)}{dt} = \frac{d(x_P(t)|\mathbf{i}\rangle + y_P(t)|\mathbf{j}\rangle + z_P(t)|\mathbf{k}\rangle)}{dt} \\ &= \frac{d(x_P(t))}{dt}|\mathbf{i}\rangle + \frac{d(y_P(t))}{dt}|\mathbf{j}\rangle + \frac{d(z_P(t))}{dt}|\mathbf{k}\rangle = v_{xP}(t)|\mathbf{i}\rangle + v_{yP}(t)|\mathbf{j}\rangle + v_{zP}(t)|\mathbf{k}\rangle \end{aligned}$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{d(v_{xP}(t))}{dt}|\mathbf{i}\rangle + \frac{d(v_{yP}(t))}{dt}|\mathbf{j}\rangle + \frac{d(v_{zP}(t))}{dt}|\mathbf{k}\rangle = a_{xP}(t)|\mathbf{i}\rangle + a_{yP}(t)|\mathbf{j}\rangle + a_{zP}(t)|\mathbf{k}\rangle$$

Mientras que en coordenadas polares será

$$\vec{r} \equiv |r\rangle = r_P(t)|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} \implies \vec{v}(t) = \frac{d(r(t)_P|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)})}{dt} = \frac{d(r(t)_P)}{dt}|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + r(t)_P \frac{d(|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)})}{dt}$$

con lo cual la velocidad

$$\vec{v}(t) = v_r(t)_P|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + r(t)_P \frac{d\theta(t)}{dt}|\mathbf{u}_\theta\rangle$$

y la aceleración

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d(\vec{v}(t))}{dt} = \frac{d\left(\frac{dr(t)_P}{dt} |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + r(t)_P \frac{d\theta(t)}{dt} |\mathbf{u}_\theta\rangle\right)}{dt} = \frac{d\left(v_r(t)_P |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\right)}{dt} + \frac{d\left(r(t)_P \frac{d\theta(t)}{dt} |\mathbf{u}_\theta\rangle\right)}{dt} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\left(\frac{dr(t)_P}{dt}\right)}{dt} |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + \frac{dr(t)_P}{dt} \frac{d\left(|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\right)}{dt} \\ &\quad + \frac{dr(t)_P}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} |\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)} + r(t)_P \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} |\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)} + r(t)_P \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{d\left(|\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)}\right)}{dt} \\ \vec{a}(t) &= \left\{ \frac{d\left(\frac{dr(t)_P}{dt}\right)}{dt} - r(t)_P \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 \right\} |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + \left\{ 2 \frac{dr(t)_P}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} + r(t)_P \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right\} |\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)}\end{aligned}$$

Claramente para el caso de un movimiento circular

$$r = R = \text{const} \implies \frac{dR}{dt} = 0 \implies \begin{cases} \vec{r}(t) = R |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} \\ \vec{v}(t) = R \frac{d\theta(t)}{dt} |\mathbf{u}_\theta\rangle \\ \vec{a}(t) = -R \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2 |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + R \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} |\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)} \end{cases}$$

De aquí podemos ver claramente que velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ son ortogonales. La velocidad, $\vec{v}(t)$, siempre es tangente a la trayectoria $\vec{r}(t)$ y en este caso la trayectoria es una circunferencia. En general el vector

$$\vec{r}_{med} = \sum_i \Delta \vec{r}(t_i) = \sum_i (\vec{r}(t_i + \Delta t_i) - \vec{r}(t_i)) \implies \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \Delta \vec{r}(t_i) = \int d\vec{r}(t) = \vec{r}(t)$$

es decir $d\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \Delta \vec{r}(t_i)$ es tangente a la trayectoria. Es claro que

$$d\vec{r}(t) = d[x_P(t) |\mathbf{i}\rangle + y_P(t) |\mathbf{j}\rangle + z_P(t) |\mathbf{k}\rangle] \equiv \left(\frac{\partial x_P(t)}{\partial t} |\mathbf{i}\rangle + \frac{\partial y_P(t)}{\partial t} |\mathbf{j}\rangle + \frac{\partial z_P(t)}{\partial t} |\mathbf{k}\rangle \right) dt$$

2. Curvas y parámetros

Podemos generalizar esta afirmación y considerar un parámetro genérico λ , en este caso

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(x_P(\lambda), y_P(\lambda), z_P(\lambda)) \implies \\ d\vec{r}(x_P(\lambda), y_P(\lambda), z_P(\lambda)) &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_P(\lambda)} \frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_P(\lambda)} \frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_P(\lambda)} \frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial \lambda} \right) d\lambda \\ &= \left(\frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_P(\lambda)} + \frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_P(\lambda)} + \frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_P(\lambda)} \right) d\lambda\end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{d(\bullet)}{d\lambda} = \frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_P(\lambda)} + \frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_P(\lambda)} + \frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial(\bullet)}{\partial z_P(\lambda)}$$

con lo cual podemos considerar las cantidades $\left(\frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial \lambda}, \frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial \lambda}, \frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial \lambda}\right)$ como las componentes del vector, $d\vec{r}(\lambda)$, (y en general del operador $\frac{d(\bullet)}{d\lambda}$) tangente a la trayectoria parametrizada con λ .

Más aún las cantidades $\left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_P(\lambda)}, \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_P(\lambda)}, \frac{\partial(\bullet)}{\partial z_P(\lambda)}\right)$ serán los vectores base en esas coordenadas.

Así al considerar coordenadas generalizadas $(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}\rangle &= \vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)) \\ &\Downarrow \\ d\vec{r}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)) &= \frac{\partial q^1(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1(\lambda)} + \frac{\partial q^2(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2(\lambda)} + \frac{\partial q^3(\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3(\lambda)} \\ &\Updownarrow \\ \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{d\lambda} &= \frac{\partial q^1(\lambda)}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1(\lambda)}}_{|q^1\rangle} + \frac{\partial q^2(\lambda)}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2(\lambda)}}_{|q^2\rangle} + \frac{\partial q^3(\lambda)}{\partial \lambda} \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3(\lambda)}}_{|q^3\rangle} \end{aligned}$$

donde $\left\{|q^1\rangle = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1(\lambda)}, |q^2\rangle = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2(\lambda)}, |q^3\rangle = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3(\lambda)}\right\}$ son la base de vectores.

Por otro lado el módulo del vector $\|d\vec{r}(\lambda)\|$ representará la longitud de arco ds para esa curva. Por consiguiente

$$\begin{aligned} ds^2 = \langle d\mathbf{r}(\lambda) | d\mathbf{r}(\lambda) \rangle &= \frac{d\langle d\mathbf{r}(\lambda) |}{d\lambda} \frac{d|d\mathbf{r}(\lambda)\rangle}{d\lambda} (d\lambda)^2 = \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} \frac{\partial \langle d\mathbf{r}(\lambda) |}{\partial q^i} \frac{\partial q^j}{\partial \lambda} \frac{\partial |d\mathbf{r}(\lambda)\rangle}{\partial q^j} (d\lambda)^2 \\ &= \frac{\partial \langle d\mathbf{r}(\lambda) |}{\partial q^i} \frac{\partial |d\mathbf{r}(\lambda)\rangle}{\partial q^j} \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial \lambda} d\lambda}_{dq^i} \underbrace{\frac{\partial q^j}{\partial \lambda} d\lambda}_{dq^j} = \frac{\partial \langle d\mathbf{r}(\lambda) |}{\partial q^i} \frac{\partial |d\mathbf{r}(\lambda)\rangle}{\partial q^j} dq^i dq^j \end{aligned}$$

donde $\frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda}$ es el vector tangente a la curva. Dado que

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = \underbrace{\bar{g}_{ij} dq^i dq^j}_{\bar{g}_{ij}} = \frac{\partial \langle d\mathbf{r}(\lambda) |}{\partial q^i} \frac{\partial |d\mathbf{r}(\lambda)\rangle}{\partial q^j} dq^i dq^j$$

identificamos claramente

$$\frac{\partial \langle d\mathbf{r}(\lambda) |}{\partial q^i} \frac{\partial |d\mathbf{r}(\lambda)\rangle}{\partial q^j} \equiv \bar{g}_{ij}$$

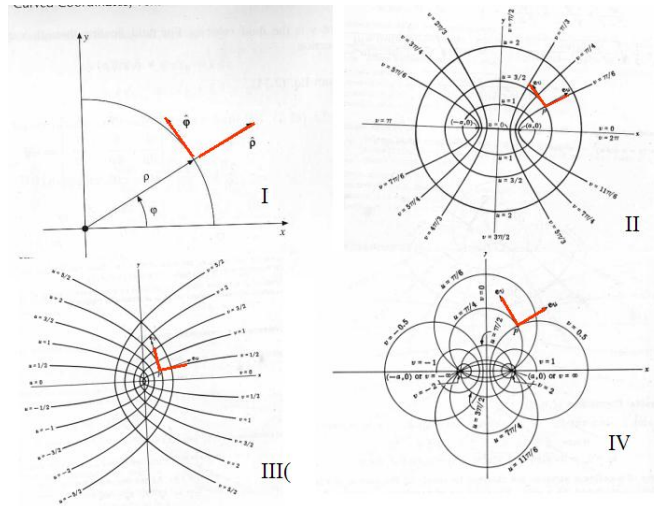


Figura 1: Coordenadas Curvilíneas en 2D.

Cuadrante I, coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sen \varphi$; $z = z$

Cuadrante II, coordenadas cilíndricas elípticas $x = a \cosh u \cos v$; $y = a \sinh u \sen v$; $z = z$

Cuadrante III coordenadas cilíndricas parabólicas $x = \frac{1}{2}(u - v^2)$; $y = uv$; $z = z$

Cuadrante IV coordenadas cilíndricas bipolares $x^2 + (y - a \cot u)^2 = a^2 \csc^2 u$; $(x - a \frac{\sinh v}{\cosh v})^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 v}$; $z = z$

3. Coordenadas Curvilíneas Generalizadas

Como hemos visto siempre se podrá definir un sistema de coordenadas generalizadas (q^1, q^2, q^3) tales que

$$|\mathbf{r}\rangle = \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(q^1, q^2, q^3) \implies d\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^3} dq^3 \implies$$

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j \equiv d\tilde{\mathbf{r}} \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^i} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^j} dq^i dq^j \implies \begin{cases} g_{ij} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^j} \\ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^j} \right\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^j} \end{cases}$$

genere una tríada de vectors base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ ortonormales de vectores unitarios tales que

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^1}; \quad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^2}; \quad |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^3};$$

los cuales son vectores tangentes a las curvas que define el radio vector $|\mathbf{r}\rangle$. Claramente si el sistema es ortogonal los factores de escala son importantes para su categorización

$$h_1 = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^1} \right\|; \quad h_2 = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^2} \right\|; \quad y \quad h_3 = \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^3} \right\|;$$

con lo cual podemos definir el elemento de línea como

$$ds^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 = \frac{\partial \langle \mathbf{dr}(\lambda) |}{\partial q^i} \frac{\partial \langle \mathbf{dr}(\lambda) \rangle}{\partial q^j} dq^i dq^j = g_{ij} dq^i dq^j$$

Es decir que identificamos la métrica como

$$h_1 = \frac{\partial x}{\partial q^1} = \frac{\partial x_1}{\partial q^1} = \sqrt{g_{11}}; \quad h_2 = \frac{\partial y}{\partial q^2} = \frac{\partial x_2}{\partial q^2} = \sqrt{g_{22}}; \quad h_3 = \frac{\partial z}{\partial q^3} = \frac{\partial x_3}{\partial q^3} = \sqrt{g_{33}}.$$

De tal forma que los casos particulares se recuperan fácilmente.

3.1. Coordenadas generalizadas, vectores y formas

Recordando como construimos el desplazamiento para una base genérica ortogonal, $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$ds^2 = \langle \mathbf{dr} | \mathbf{dr} \rangle = (d \tilde{x}_k \langle \tilde{\mathbf{e}}^k |) (d \tilde{x}^m |\tilde{\mathbf{e}}_m \rangle) = \langle \tilde{\mathbf{e}}^k | \tilde{\mathbf{e}}_m \rangle d \tilde{x}_k d \tilde{x}^m = d \tilde{x}_m d \tilde{x}^m = \tilde{g}_{km} d \tilde{x}^k d \tilde{x}^m$$

Donde hemos utilizado el hecho que la métrica nos permite asociar componentes contravariantes a covariantes y viceversa, es decir establece una relación entre formas y vectores.

Si las bases de formas y vectores son ortogonales la métrica será diagonal y como en general $\left\| \frac{\partial \langle \mathbf{dr}(\lambda) \rangle}{\partial q^j} \right\| \neq 1$, entonces surgen los llamados factores de escala $h_i = g_{ii}$

Entonces, una vez más, una forma $\langle b |$ o, un vector $|a\rangle$ cualquiera puede expresarse como una combinación lineal de formas o vectores base

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \leftrightarrow \quad \langle b| = b_j \langle \mathbf{e}^j| = \tilde{b}_j \langle \tilde{\mathbf{e}}^j|$$

con

$$a^j = \langle \mathbf{e}^j | a \rangle; \quad \tilde{a}^j = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | a \rangle; \quad b_j = \langle b | \mathbf{e}_j \rangle; \quad \text{y} \quad \tilde{b}_j = \langle b | \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle$$

De esta manera las componentes covariantes y contravariantes estarán relacionadas como

$$a_j = g_{jk} a^k \quad \Rightarrow \quad a_i = h_{[i]j} a^{[j]}$$

donde $h_{[i]j} a^{[j]}$ NO indica suma. En otras palabras, en aquellos sistemas de coordenadas en los cuales la métrica es diagonal pero no viene representada por la matriz unidad, subir y bajar índices puede incluir los cambios de escala.

3.2. Velocidades y Aceleraciones

Antes de pasar a analizar los casos particulares haremos un alto para expresar las expresiones de las velocidades y las aceleraciones en coordenadas generalizadas. Para ello recordamos que los vectores velocidad y aceleración se representan como

$$|V\rangle = V^j |\mathbf{e}_j\rangle = \dot{x}^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{V}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = \dot{\tilde{x}}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \text{y} \quad |a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \ddot{x}^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = \dot{\tilde{x}}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$$

respectivamente. Para determinar las expresiones de estos vectores en cualquier sistema de coordenadas, es suficiente con encontrar las expresiones de sus componentes contravariantes o covariantes. Como sabemos, podremos encontrar una a partir de las otras con la ayuda de la métrica del sistema de coordenadas.

Entonces, el vector velocidad en la base cartesiana se puede expresar como

$$|V\rangle = V_x |\hat{i}\rangle + V_y |\hat{j}\rangle + V_z |\hat{k}\rangle = \dot{x} |\hat{i}\rangle + \dot{y} |\hat{j}\rangle + \dot{z} |\hat{k}\rangle = \dot{x}^j |\mathbf{e}_j\rangle = \dot{q}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \text{con} \quad |\mathbf{e}_1\rangle = |\hat{i}\rangle; \quad |\mathbf{e}_2\rangle = |\hat{j}\rangle; \quad \text{y} \quad |\mathbf{e}_3\rangle = |\hat{k}\rangle,$$

claramente las componentes contravariantes del vector velocidad en un sistema de coordenadas generalizado son $V^j = \dot{q}^j$

Para encontrar las componentes covariantes recordamos que para cualquier base generalizada de vectores o formas se expresan en término de la base cartesiana (de vectores o formas) como

$$|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} |\mathbf{e}_i\rangle \quad \text{y} \quad \langle \tilde{\mathbf{e}}^i | = \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \langle \mathbf{e}^j |$$

Entonces las componentes covariantes del vector velocidad en una base generalizada será

$$\tilde{V}_j = \langle V | \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = (\dot{x}_m \langle \tilde{\mathbf{e}}^m |) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} |\mathbf{e}_i\rangle \right) = \dot{x}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^j} = \dot{x}_m \frac{\frac{\partial x^m}{\partial t}}{\frac{\partial q^j}{\partial t}} = \dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial \left(\frac{V_m V^m}{2} \right)}{\partial \dot{q}^j}$$

Con lo cual resulta fácil expresar las componentes covariantes una vez que conocemos el módulo del vector expresado en ese sistema de coordenadas. El cual siempre viene expresado a partir del diferencial

$$d|\mathbf{r}\rangle \Rightarrow \frac{d|\mathbf{r}\rangle}{dt}$$

Para encontrar la expresión para la aceleración se procede de manera análoga.

$$\tilde{a}_j = \langle a | \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = (\ddot{x}_m \langle \tilde{\mathbf{e}}^m |) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^j} |\mathbf{e}_i\rangle \right) = \ddot{x}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^j} \equiv \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_m \frac{\partial x^m}{\partial q^j} \right) - \dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial q^j}$$

y otra vez

$$\frac{\partial x^m}{\partial q^j} = \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \dot{q}^j} \Rightarrow \tilde{a}_j = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial \dot{q}^j} \right) - \dot{x}_m \frac{\partial \dot{x}^m}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left(\frac{\dot{x}_m \dot{x}^m}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\dot{x}_m \dot{x}^m}{2} \right)$$

y finalmente

$$\tilde{a}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j} \left(\frac{V_m V^m}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{V_m V^m}{2} \right)$$

3.3. Coordenadas Cartesianas

El primer caso, el más trivial, lo constituyen las coordenadas cartesianas. Vale decir

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (x, y, z)$$

$$|\mathbf{r}\rangle = x |\mathbf{i}\rangle + y |\mathbf{j}\rangle + z |\mathbf{k}\rangle = \tilde{\mathbf{r}} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(x, y, z) \implies d\tilde{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial z} \right) dz = dx |\mathbf{i}\rangle + dy |\mathbf{j}\rangle + dz |\mathbf{k}\rangle$$

cosecuentemente

$$\begin{aligned} h_x &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right\| = 1 & |\tilde{\mathbf{e}}_x\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = |\mathbf{i}\rangle \\ h_y &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = 1 & \text{y} & \quad |\tilde{\mathbf{e}}_y\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = |\mathbf{j}\rangle ; \\ h_z &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| = 1 & |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = |\mathbf{k}\rangle \end{aligned}$$

El elemento de línea viene definido como

$$(ds)^2 = (h_1 dx)^2 + (h_2 dy)^2 + (h_3 dz)^2 \iff ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

y el tensor métrico será

$$g_{11} = g_{xx} = 1; \quad g_{22} = g_{yy} = 1; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

El hecho que para el caso de las coordenadas cartesianas $h_x = h_y = h_z = 1$ significará que las tomaremos como coordenadas base respecto a las cuales expresaremos las demás.

3.4. Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se expresan como

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (\rho, \varphi, z)$$

$$|\mathbf{r}\rangle = x(\rho, \varphi) |\mathbf{i}\rangle + y(\rho, \varphi) |\mathbf{j}\rangle + z |\mathbf{k}\rangle \iff \tilde{\mathbf{r}} = x(\rho, \varphi) \hat{i} + y(\rho, \varphi) \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\rho, \varphi, z) \implies d\tilde{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \rho} \right) d\rho + \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial z} \right) dz$$

y estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordenadas cartesianas

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \\ y &= y(\rho, \varphi) = \rho \sen \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} dx &= \cos \varphi d\rho - \rho \sen \varphi d\varphi \\ dy &= \sen \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi \\ dz &= dz \end{aligned}$$

con lo cual es fácil identificar

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \cos \varphi \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \sen \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = -\rho \sen \varphi \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right); \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array} \right)$$

y de allí

$$h_\rho = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial (x(\rho, \varphi) \hat{i} + y(\rho, \varphi) \hat{j} + z \hat{k})}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{i} + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{j} \right\|$$

$$h_\rho = \|\cos \varphi \hat{i} + \sen \varphi \hat{j}\| = 1$$

y del mismo modo

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial (x(\rho, \varphi) \hat{i} + y(\rho, \varphi) \hat{j})}{\partial \varphi} \right\| = \rho; \quad h_z = \left\| \frac{\partial (z) \hat{k}}{\partial z} \right\| = 1.$$

mientras que los vectores unitarios serán

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbf{e}}_\rho\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{i} + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{j} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ |\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{i} + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{j} \right) = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}; \\ |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial (x(\rho, \varphi) \hat{i} + y(\rho, \varphi) \hat{j} + z \hat{k})}{\partial z} = \hat{k} \end{aligned}$$

El elemento de línea viene definido como

$$(ds)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2 \iff ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

y el tensor métrico será

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

3.5. Coordenadas Esféricas

Para construir el sistema de coordenadas esféricas

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (r, \varphi, \theta)$$

$$\mathbf{r} = x(r, \varphi, \theta) \mathbf{i} + y(r, \varphi, \theta) \mathbf{j} + z(r, \varphi, \theta) \mathbf{k} = x(r, \varphi, \theta) \hat{i} + y(r, \varphi, \theta) \hat{j} + z(r, \varphi, \theta) \hat{k}$$

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \varphi, \theta) \implies d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right) d\theta$$

y estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordenadas cartesianas

$$\left. \begin{aligned} x &= x(r, \varphi, \theta) = r \cos \varphi \sin \theta \\ y &= y(r, \varphi, \theta) = r \sin \varphi \sin \theta \\ z &= z(r, \varphi, \theta) = r \cos \theta \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} dx &= \cos \varphi \sin \theta dr - r \sin \varphi \sin \theta d\varphi + r \cos \varphi \cos \theta d\theta \\ dy &= \sin \varphi \sin \theta dr + r \cos \varphi \sin \theta d\varphi + r \sin \varphi \cos \theta d\theta \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

con lo cual es fácil identificar

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial x(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = \cos \varphi \sin \theta \\ \frac{\partial y(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = \sin \varphi \sin \theta \\ \frac{\partial z(r, \varphi, \theta)}{\partial r} = \cos \theta \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial x(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \sin \theta \\ \frac{\partial y(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \sin \theta \\ \frac{\partial z(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial x(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} = r \cos \varphi \cos \theta \\ \frac{\partial y(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} = r \sin \varphi \cos \theta \\ \frac{\partial z(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} = -r \sin \theta \end{array} \right)$$

y de allí

$$h_r = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = \left\| \frac{\partial (x(r, \varphi, \theta) \hat{i} + y(r, \varphi, \theta) \hat{j} + z(r, \varphi, \theta) \hat{k})}{\partial r} \right\|$$

$$h_r = \left\| \frac{\partial x(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \hat{i} + \frac{\partial y(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \hat{j} + \frac{\partial z(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \hat{k} \right\|$$

$$h_r = \left\| \cos \varphi \sen \theta \hat{i} + \sen \varphi \sen \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \right\| = \sqrt{\cos^2 \varphi \sen^2 \theta + \sen^2 \varphi \sen^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$$

y del mismo modo

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial (x(r, \varphi, \theta) \hat{i} + y(r, \varphi, \theta) \hat{j} + z(r, \varphi, \theta) \hat{k})}{\partial \varphi} \right\| = \left\| \frac{\partial x(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} \hat{i} + \frac{\partial y(r, \varphi, \theta)}{\partial \varphi} \hat{j} \right\|$$

$$h_\varphi = \left\| -r \sen \varphi \sen \theta \hat{i} + r \cos \varphi \sen \theta \hat{j} \right\| = \sqrt{(r \sen \varphi \sen \theta)^2 + (r \cos \varphi \sen \theta)^2} = r \sen \theta$$

Finalmente,

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial (x(r, \varphi, \theta) \hat{i} + y(r, \varphi, \theta) \hat{j} + z(r, \varphi, \theta) \hat{k})}{\partial \theta} \right\|$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial x(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \hat{i} + \frac{\partial y(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \hat{j} + \frac{\partial z(r, \varphi, \theta)}{\partial \theta} \hat{k} \right\|$$

$$h_\theta = \left\| r \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + r \sen \varphi \cos \theta \hat{j} - \sen \theta \hat{k} \right\|$$

$$h_\theta = \sqrt{(r \cos \varphi \cos \theta)^2 + (r \sen \varphi \cos \theta)^2 + (r \sen \theta)^2} = r$$

mientras que los vectores unitarios serán

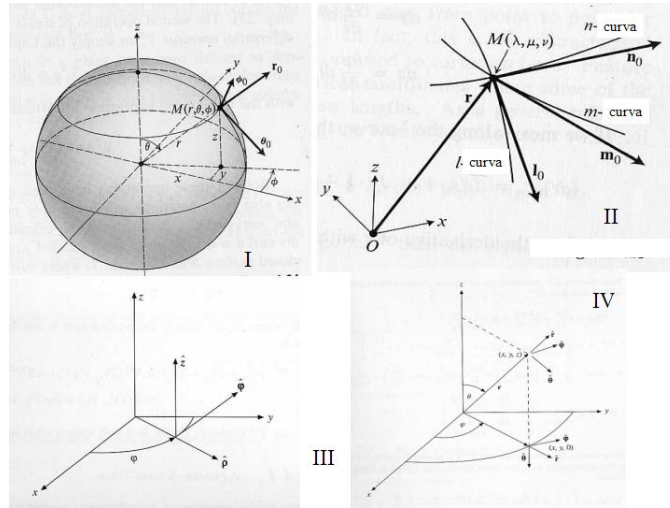
$$|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \varphi \sen \theta \hat{i} + \sen \varphi \sen \theta \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{r \sen \theta} (-r \sen \varphi \sen \theta \hat{i} + r \cos \varphi \sen \theta \hat{j}) \quad ;$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\theta\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} (r \cos \varphi \cos \theta \hat{i} + r \sen \varphi \cos \theta \hat{j} - \sen \theta \hat{k})$$

El elemento de línea viene definido como

$$(ds)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2 \iff ds^2 = dr^2 + r^2 \sen^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$



El tensor métrico será

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{33} = g_{\theta\theta} = r^2.$$

Por completitud, enumeraremos algunos otros sistemas de coordenadas y dejaremos al lector la labor de calcular los vectores unitarios y la métrica del espacio expresada en estas coordenadas.

3.6. Otros Sistemas Coordenados

3.6.1. Coordenadas Toroidales

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (\lambda, \mu, \alpha); \quad |\mathbf{r}\rangle = x(\lambda, \mu, \alpha)\hat{i} + y(\lambda, \mu, \alpha)\hat{j} + z(\lambda, \mu, \alpha)\hat{k}$$

con

$$x = x(\lambda, \mu, \alpha) = r \cos \alpha; \quad \text{con } r = \frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda + \cos \mu}$$

$$y = y(\lambda, \mu, \alpha) = r \sin \alpha$$

$$z = z(\lambda, \mu, \alpha) = r \frac{\sin \mu}{\cosh \lambda + \cos \mu}$$

con lo cual los vectores unitarios serán

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\lambda\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial \lambda} \right\|} \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial \lambda} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial (x(\lambda, \mu, \alpha)\hat{i} + y(\lambda, \mu, \alpha)\hat{j} + z(\lambda, \mu, \alpha)\hat{k})}{\partial \lambda} \right\|} \frac{\partial (x(\lambda, \mu, \alpha)\hat{i} + y(\lambda, \mu, \alpha)\hat{j} + z(\lambda, \mu, \alpha)\hat{k})}{\partial \lambda}$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\mu\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial \mu} \right\|} \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial \mu} = \quad ;$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\alpha\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial \alpha} \right\|} \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial \alpha} =$$

$$\frac{\partial \langle \mathbf{r} \rangle}{\partial \lambda} = \frac{\partial \left(\left(\frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda + \cos \mu} \right) \cos \alpha \right)}{\partial \lambda} \hat{i} + \frac{\partial \left(\left(\frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda + \cos \mu} \right) \sin \alpha \right)}{\partial \lambda} \hat{j} + \frac{\partial \left(\left(\frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda + \cos \mu} \right) \frac{\sin \mu}{\cosh \lambda + \cos \mu} \right)}{\partial \lambda} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \langle \mathbf{r} \rangle}{\partial \lambda} = \left(\frac{\cosh \lambda \cos \mu + 1}{\cosh^2 \lambda + 2 \cosh \lambda \cos \mu + \cos^2 \mu} \right) (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}) - \frac{\sin \mu (\cosh^2 \lambda - \cosh \lambda \cos \mu - 2)}{\cosh^3 \lambda + 3 \cosh^2 \lambda \cos \mu + 3 \cosh \lambda \cos^2 \mu + \cos^3 \mu}$$

la métrica queda como

$$ds^2 = r^2 \left(\frac{d\lambda^2 + d\mu^2}{\sinh^2 \lambda} \right)$$

Las superficies $\lambda = const$ representan toros alrededor del eje z ; las superficies $\mu = const$ son esferas con centro sobre el eje z ; y finalmente las superficies $\alpha = const$ son planos que contiene al eje z

3.6.2. Coordenadas Elipsoidales

Dados tres números a, b y c ; con $a > b > c > 0$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + \alpha} + \frac{y^2}{b^2 + \alpha} + \frac{z^2}{c^2 + \alpha} = 1$$

representa las superficies cuádricas¹ homofocales (es decir, con el mismo foco u origen en $(x = 0, y = 0, z = 0)$). Dependiendo del valor del parámetro α , estas ecuaciones representarán superficies

| | | |
|----------------------------|----|------------------------|
| Elipsoides | si | $\alpha > -c^2$ |
| Hiperboloides de una hoja | si | $-c^2 > \alpha > -b^2$ |
| Hiperboloides de dos hojas | si | $-b^2 > \alpha > -c^2$ |

Esto quiere decir que por cada punto (x, y, z) del espacio, pasan tres superficies cuádricas (dependiendo del valor de α). Conocidos a, b y c y el punto, $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$, los valores de α vienen dados por las raíces de la ecuación cúbica

$$\frac{x^2}{a^2 + \alpha} + \frac{y^2}{b^2 + \alpha} + \frac{z^2}{c^2 + \alpha} = 1 \quad \implies \quad \alpha^3 + \Delta \alpha^2 + \Phi \alpha + \Omega = 0$$

con

$$\Delta = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\Phi = (b^2 + c^2) x_0^2 + (a^2 + c^2) y_0^2 + (a^2 + b^2) z_0^2 - a^2 b^2 - (a^2 + b^2) c^2$$

$$\Omega = x_0^2 b^2 c^2 + y_0^2 a^2 c^2 + z_0^2 a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2$$

Las raíces de esta ecuación ($\alpha_1 = \lambda; \alpha_2 = \mu; \alpha_3 = \nu$) definen las coordenadas elipsoidales del punto $(x, y, z) = (x(\lambda, \mu, \nu), y(\lambda, \mu, \nu), z(\lambda, \mu, \nu))$

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (\lambda, \mu, \nu); \quad \langle \mathbf{r} \rangle = x(\lambda, \mu, \nu) \hat{i} + y(\lambda, \mu, \nu) \hat{j} + z(\lambda, \mu, \nu) \hat{k}$$

¹Nótese que la proyección de estas superficies en el plano (x, y) representan curvas cónicas homofocales

y la ley de transformación queda como

$$x = x(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}$$

$$y = y(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}}$$

$$z = z(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - b^2)(c^2 - a^2)}}$$

por cual la métrica será

$$ds^2 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)} d\lambda^2 + \frac{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)}{4(a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu)} d\mu^2 + \frac{(\nu - \mu)(\nu - \lambda)}{4(a^2 + \nu)(b^2 + \nu)(c^2 + \nu)} d\nu^2$$

4. Vectores, Tensores, Métrica y Transformaciones

Nos toca ahora construir expresiones de vectores y tensores a partir de sus leyes de transformación, hemos dicho que los vectores y los tensores son independiente del sistema de coordenadas (la base) en la cual se exprese.

4.1. Transformando Vectores

Así si dada dos bases de vectores coordenados $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$ para el espacio vectorial \mathfrak{R}^3 Entonces, se cumple que:

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \implies \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{e}^i | a \rangle = a^i \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}^i | a \rangle = \tilde{a}^i \end{array} \right\} \implies \tilde{a}^i = a^j \langle \tilde{\mathbf{e}}^i | \mathbf{e}_j \rangle \iff \tilde{a}^i = \underbrace{\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}}_{\langle \tilde{\mathbf{e}}^i | \mathbf{e}_j \rangle} a^j$$

con ello de cartesianas a cilíndricas

$$x = x(r, \varphi) = \rho \cos \varphi; \quad y = y(r, \varphi) = \rho \sen \varphi; \quad z = z$$

de lo cual se deriva

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \cos \varphi \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \sen \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = -\rho \sen \varphi \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right); \quad y \quad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array} \right)$$

Entonces dados

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = a_x |\mathbf{i}\rangle + a_y |\mathbf{j}\rangle + a_z |\mathbf{k}\rangle$$

$$|a\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = a_r |\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle + a_\varphi |\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle + a_z |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

con

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\rho\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{i} + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \hat{j} = \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{i} + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \hat{j} \right) = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j};$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial (x(\rho, \varphi)\hat{i} + y(\rho, \varphi)\hat{j} + z\hat{k})}{\partial z} = \hat{k}$$

Si tenemos en concreto un vector $|a\rangle = 5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle$ quisiéramos conocer su expresión en coordenadas cilíndricas. Hay que hacer la acotación que existe una familia de sistemas de coordenados cilíndricos parametrizados por el ángulo φ y NO un único sistema coordenado. Obviamente se puede especificar el sistema coordenado y entonces tendremos un conjunto de componentes definido. Así la familia de componentes en cilíndricas del vector $|a\rangle$ serán

$$\tilde{a}^j = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | a \rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | (\tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle) = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | (a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle)$$

con lo cual al expresar los vectores base

$$\tilde{a}^1 = a_\rho = \langle \tilde{\mathbf{e}}_\rho | (5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle) = (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) \cdot (5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) = 5 \cos \varphi + 4 \sin \varphi$$

$$\tilde{a}^2 = a_\varphi = \langle \tilde{\mathbf{e}}_\varphi | (5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle) = (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) \cdot (5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) = -5 \sin \varphi + 4 \cos \varphi$$

$$\tilde{a}^3 = a_z = \langle \tilde{\mathbf{e}}_z | (5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle) = \langle \mathbf{k} | (5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle) = 3$$

con lo cual

$$|a\rangle = 5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle = (5 \cos \varphi + 4 \sin \varphi) |\tilde{\mathbf{e}}_\rho\rangle + (-5 \sin \varphi + 4 \cos \varphi) |\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle + 3 |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

donde es claro que existen infinitos sistemas cilíndricos parametrizados por el ángulo φ , digamos

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_\rho = 5 \cos\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) + 4 \sin\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{25}{41}\sqrt{41} + \frac{16}{41}\sqrt{41} = \sqrt{41} \\ a_\varphi = -5 \sin\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) + 4 \cos\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) = -\left(\frac{20}{41}\sqrt{41}\right) + \left(\frac{20}{41}\sqrt{41}\right) = 0 \\ a_z = 3 \end{cases}$$

con lo cual hemos alineado el eje $|\tilde{\mathbf{e}}_\rho\rangle$ a lo largo del vector $|a\rangle$. Ese es un sistema de coordenadas cilíndrico muy particular.

4.2. Transformando Tensores

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio vectorial. Consideremos el siguiente tensor

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\} \implies T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir es un tensor que hemos expresado en coordenadas cartesianas y queremos pasarlo a cilíndricas. Para ello recordamos que

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x^1 = x = x(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \\ x^2 = y = y(\rho, \varphi) = \rho \operatorname{sen} \varphi \\ x^3 = z = z \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}^1 = \rho = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tilde{x}^2 = \varphi = \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \tilde{x}^3 = z = z \end{array} \right. \end{array} \right.$$

con lo cual

$$\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^1} = \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\rho} & \frac{\cos \varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \operatorname{sen} \varphi & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial y}{\partial \rho} = \operatorname{sen} \varphi & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} = \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \operatorname{sen} \varphi & 0 \\ \operatorname{sen} \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \Rightarrow \tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\frac{\text{sen } \varphi}{\rho} & \frac{\cos \varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_j^i \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\frac{\text{sen } \varphi}{\rho} & \frac{\cos \varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \text{sen } \varphi & 0 \\ \text{sen } \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} -\cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi \text{sen } \varphi + 3 & \rho \text{sen } \varphi \cos \varphi - 2\rho + 3\rho \cos^2 \varphi & 3 \cos \varphi + 4 \text{sen } \varphi \\ \frac{\cos \varphi \text{sen } \varphi + 3 \cos^2 \varphi - 1}{\rho} & -3 \cos \varphi \text{sen } \varphi + \cos^2 \varphi + 2 & -3 \frac{\text{sen } \varphi}{\rho} + 4 \frac{\cos \varphi}{\rho} \\ \cos \varphi + 2 \text{sen } \varphi & -\rho \text{sen } \varphi + 2\rho \cos \varphi & 2 \end{pmatrix}$$

Si suponemos que el origen del sistema de coordenadas cilindrico está en el vector anterior. Esto es

$$|a\rangle = 5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) = 0,67474 \text{ rad} \end{cases}$$

y entonces

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} 3,8537 & 2,0303 & 4,8414 \\ 0,20569 & 1,1463 & 0,19512 \\ 2,0303 & 6,0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos una nueva base

$$\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\} \Rightarrow \begin{cases} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle \\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle \\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathbf{e}}^1 | \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^1 | \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^1 | \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = 1 \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}^2 | \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^2 | \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 2 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^2 | \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = 2 \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}^3 | \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^3 | \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = 2 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^3 | \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = 3 \end{pmatrix}$$

para ese mismo espacio \mathfrak{R}^3 encontraremos una nueva expresión que toma T_j^i en esa base. Igualmente encontraremos las expresiones para los siguientes tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$. Nótese que esta nueva base **no es ortogonal**, $\langle \tilde{\mathbf{e}}^k | \tilde{\mathbf{e}}_i \rangle \neq \delta_i^k$, con lo cual no se cumplen muchas cosas entre ellas $|\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle \langle \tilde{\mathbf{e}}^k| \neq 1$

Para encontrar la expresión \tilde{T}_j^i expresamos los vectores base $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ en término de la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \implies \begin{cases} |\mathbf{e}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle \\ |\mathbf{e}_2\rangle = |\mathbf{j}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle \\ |\mathbf{e}_3\rangle = |\mathbf{k}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle \end{cases}$$

recordamos que un vector genérico

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \implies$$

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \tilde{a}^1 |\mathbf{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 (|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle) + \tilde{a}^3 (|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle + |\mathbf{e}_3\rangle)$$

con lo cual

$$a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = (\tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3) |\mathbf{e}_1\rangle + (\tilde{a}^2 + \tilde{a}^3) |\mathbf{e}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\mathbf{e}_3\rangle$$

y como

$$\left. \begin{array}{l} a^1 = \tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^3 = \tilde{a}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \tilde{a}^k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} = 1; & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} = 1; \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} = 1; \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} = 0; & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} = 1; \end{cases}$$

Es de hacer notar que dado que la base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ se tiene que

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \Rightarrow \langle \mathbf{e}^i | a \rangle = a^j \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = a^j \delta_j^i = a^i = \tilde{a}^k \langle \mathbf{e}^i | \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} = \langle \mathbf{e}^i | \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle$$

El mismo procedimiento se puede aplicar para expresar el vector $|a\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$

$$|a\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 (|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle) + a^3 (|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{a}^1 = a^1 - a^2 \\ \tilde{a}^2 = a^2 - a^3 \\ \tilde{a}^3 = a^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{a}^k = a^i \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} = 1; & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} = -1; & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} = 0; \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} = 0; & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} = 1; & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^3} = -1; \\ \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^1} = 0; & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial \tilde{x}^3}{\partial x^3} = 1; \end{cases}$$

Nótese que, como era de esperarse,

$$\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j} = \delta_j^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con las expresiones matriciales para las transformaciones, estamos en capacidad de calcular, componente a componente, las representación del tensor en la nueva base con lo cual

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^1 &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^1} T_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} T_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} T_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} T_3^1 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} T_1^2 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} T_2^2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} T_3^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} T_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} T_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} T_3^3 \right) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^1 &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^1} T_j^i = 1 \cdot (1 T_1^1 + 0 T_2^1 + 0 T_3^1) \\ &\quad - 1 \cdot (1 T_1^2 + 0 T_2^2 + 0 T_3^2) \\ &\quad + 0 (1 T_1^3 + 0 T_2^3 + 0 T_3^3) \end{aligned}$$

$$\tilde{T}_1^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^1} T_j^i = T_1^1 - T_1^2 = 2 - 2 = 0$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^2} T_j^i &= \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} T_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} T_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} T_3^1 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} T_1^2 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} T_2^2 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} T_3^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} T_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} T_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} T_3^3 \right) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^2} T_j^i &= 1 \cdot (1 T_1^1 + 1 T_2^1 + 0 T_3^1) \\ &\quad - 1 \cdot (1 T_1^2 + 1 T_2^2 + 0 T_3^2) \\ &\quad + 0 (1 T_1^3 + 1 T_2^3 + 0 T_3^3) \end{aligned}$$

$$\tilde{T}_2^1 = \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^1} T_j^i = (T_1^1 + T_2^1) - (T_1^2 + T_2^2) = (2 + 1) - (2 + 3) = -2$$

se puede continuar término a término o realizar la multiplicación de las matrices $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$, T_j^i y $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$ provenientes de la transformación de componentes de tensores. Vale decir

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

hay que resaltar un especial cuidado que se tuvo en la colocación de las matrices para su multiplicación. Si bien en la expresión $\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i$ las cantidades $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$ son números y no importa el orden con el cual se multipliquen, cuando se colocan como matrices debe respetarse la “concatenación interna de índices”. Esto es cuando querramos expresar \tilde{T}_m^k como una matriz, donde el índice contravariante k indica filas y el índice covariante m las columnas, fijamos primero estos índices y luego respetamos la “concatenación índices” covariantes con los contravariantes. Esta es la convención para expresar la multiplicación de matrices en la notación de índices². Esto es

$$\tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} T_j^i \quad \Longrightarrow \quad \tilde{T}_m^k = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$$

Ahora los objetos $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}$, T_j^i y $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$ pueden ser sustituidos (en sus puestos correspondientes) por su representación matricial.

Con lo cual hemos encontrado la representación matricial \tilde{T}_m^k de las componentes del tensor \mathcal{T} en la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_1^1 = 0 & \tilde{T}_2^1 = -2 & \tilde{T}_3^1 = -3 \\ \tilde{T}_1^2 = 1 & \tilde{T}_2^2 = 2 & \tilde{T}_3^2 = 4 \\ \tilde{T}_1^3 = 1 & \tilde{T}_2^3 = 3 & \tilde{T}_3^3 = 5 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la expresión para \tilde{T}_{km} recordamos que $\tilde{T}_{km} = \tilde{g}_{kn} \tilde{T}_m^n$ es decir, requerimos las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico \tilde{g}_{kn} que genera esta base. Para ello recordamos que para una base genérica, $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno,

²Quizá una forma de comprobar si los índices está bien concatenados se observa si se “bajan” los índices contravariantes pero se colcan de antes que los covariantes. Esto es $T_j^i \rightarrow T_{ij}$ Así la multiplicación de matrices queda representada por $C_j^i = A_k^i B_j^k \rightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$ y aquí es claro que índices consecutivos están “concatenados” e indican multiplicación

podemos definir la expresión de un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos tensor métrico como

$$\mathbf{g} \begin{bmatrix} |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle & |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = \tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} \implies \tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} = \mathbf{g} [|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle] \equiv \langle \tilde{\mathbf{e}}_i | \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle \equiv \langle \tilde{\mathbf{e}}_j | \tilde{\mathbf{e}}_i \rangle$$

$$\mathbf{g} \begin{bmatrix} \langle \tilde{\mathbf{e}}^i | & \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} = \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ji} \implies \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ji} = (\tilde{g}_{ij})^{-1}$$

Es de hacer notar que la representación matricial para la métrica covariante g_{ij} de una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ es siempre diagonal. Esto es

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{i} \rangle = 1; & g_{12} &= \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{j} \rangle = 0; & g_{13} &= \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{k} \rangle = 0; \\ g_{21} &= \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{j} | \mathbf{i} \rangle = 0; & g_{22} &= \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{j} | \mathbf{j} \rangle = 1\tilde{n}; & g_{23} &= \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{j} | \mathbf{k} \rangle = 0; \\ g_{31} &= \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_1 \rangle = \langle \mathbf{k} | \mathbf{i} \rangle = 0; & g_{32} &= \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{k} | \mathbf{j} \rangle = 0; & g_{33} &= \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_3 \rangle = \langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = 1; \end{aligned}$$

con lo cual

$$\left. \begin{aligned} \langle T_m^n \rangle \\ \langle T_{km} \rangle \equiv \langle g_{kn} T_m^n \rangle \\ \langle T^{nm} \rangle \equiv \langle g^{nk} T_k^n \rangle \end{aligned} \right\} \implies \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

donde hemos denotado $\langle \bullet \rangle$ como la representación matricial del objeto

Para el caso de la base genérica no ortonormal $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ tenemos dos formas de calcular el tensor (las componentes covariantes y contravariantes) del tensor métrico. La primera es la forma directa

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{i} \rangle = 1; & \tilde{g}_{12} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle \mathbf{i} | (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) \rangle = 1; \\ \tilde{g}_{21} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = \langle (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) | \mathbf{i} \rangle = 1; & \tilde{g}_{22} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) | (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) \rangle = 2 \\ \tilde{g}_{31} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \tilde{\mathbf{e}}_1 \rangle = \langle (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) | \mathbf{i} \rangle = 1; & \tilde{g}_{32} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \tilde{\mathbf{e}}_2 \rangle = \langle (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) | (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) \rangle = 2; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{13} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = \langle \mathbf{i} | (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) \rangle = 1; \\ \tilde{g}_{23} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = \langle (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) | (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) \rangle = 2 \\ \tilde{g}_{33} &= \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \tilde{\mathbf{e}}_3 \rangle = \langle (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) | (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) \rangle = 3 \end{aligned}$$

consecuentemente

$$\tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \implies \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ji} = (\tilde{g}_{ij})^{-1} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La otra forma de calcular la métrica correspondiente la base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ y transformarla a la base no ortonormal $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle\}$ esto es

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} g_{ij} \implies \tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}$$

La métrica para el la base ortonormal será diagonal y además $g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}$, con lo cual

$$g_{ij} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g^{ij} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_j^i \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

y

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

nótese para conservar la convención de índices y matrices hemos representado que hemos traspuesto la matriz correspondiente a $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}$. La razón, como dijimos arriba es

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \longrightarrow \tilde{g}_{km} = \Pi_{ik} g_{ij} \Pi_{jm} \longrightarrow \tilde{g}_{km} = \bar{\Pi}_{ki} g_{ij} \Pi_{jm}$$

Para poder representar multiplicación de matrices los índices deben estar consecutivos, por tanto hay que trasponer la representación matricial para poder multiplicarlas.

Ya estamos en capacidad de obtener las representaciones matriciales para los tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$.

$$\langle \tilde{T}_i^j \rangle = \langle \tilde{T}_j^i \rangle^T \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \langle \tilde{T}_i^j \rangle$$

$$\langle \tilde{T}_{km} \rangle = \langle \tilde{g}_{kn} \tilde{T}_m^n \rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \langle \tilde{T}_{km} \rangle$$

$$\langle \tilde{T}^{kn} \rangle = \langle \tilde{T}_m^n \tilde{g}^{mk} \rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -13 \\ 7 & 13 & 17 \\ 9 & 17 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \langle \tilde{T}^{km} \rangle$$

Referencias

- [1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) QA300 A66C3 1972
- [2] Arfken, G. B., Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [3] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analysis** (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [4] Denery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

- [5] Gel'fand, I.M. (1961) **Lectures on Linear Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).
- [6] Lovelock, D, y Rund, H. (1975) **Tensors, Differential Forms & Variational Principles** (*John Wiley Interscience, Nueva York*).
- [7] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)
- [8] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)