

# Formulario de Métodos Matemáticos 1

## Campos y Operadores Diferenciales\*

L. A. Núñez\*\*

*Centro de Física Fundamental,  
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y  
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,  
(CECALCULA),  
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Enero 2005 Versión  $\alpha$  1.5

## Índice

<b>1. Campos Tensoriales y el Concepto de Campo</b>	<b>3</b>
<b>2. Campos escalares y superficies</b>	<b>6</b>
<b>3. Campos vectoriales y líneas de flujo</b>	<b>7</b>
3.1. Líneas de flujo o curvas integrales . . . . .	8
3.2. Trayectorias ortogonales a las líneas de flujo . . . . .	9
<b>4. Flujo de Campos Vectoriales</b>	<b>10</b>
<b>5. La fauna de los operadores vectoriales</b>	<b>10</b>
5.1. Derivada direccional, diferencial total y gradiente . . . . .	11
5.1.1. Derivada direccional de Campos escalares . . . . .	11
5.1.2. Gradiente y flujo de un campo vectorial . . . . .	14
5.1.3. Gradiente y coordenadas curvilíneas . . . . .	15
5.2. Divergencia y flujo en campos vectoriales . . . . .	16
5.2.1. Divergencia como medida de flujo . . . . .	17

---

\* **ADVERTENCIA:** El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los libros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.

\*\* e-mail: [nunez@ula.ve](mailto:nunez@ula.ve)      Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

5.2.2.	Divergencia y coordenadas curvilíneas . . . . .	19
5.2.3.	Un par de ejemplos . . . . .	20
5.3.	Rotores, líneas de torbellino y Circulación . . . . .	22
5.3.1.	Líneas de torbellino . . . . .	22
5.3.2.	Líneas de campo ortogonales a superficies . . . . .	24
5.3.3.	Circulación de un campo vectorial . . . . .	25
5.3.4.	Rotores y velocidades angulares . . . . .	27
5.3.5.	Rotores y coordenadas curvilíneas . . . . .	28
5.4.	Formulario del Operador <i>nabla</i> , $\vec{\nabla}$ . . . . .	28
5.5.	<i>Nabla</i> dos veces y el Laplaciano . . . . .	29
5.5.1.	Formulario de <i>Nabla</i> dos veces . . . . .	29
5.5.2.	Laplaciano y campos escalares . . . . .	30
5.5.3.	Laplaciano y campos vectoriales . . . . .	31
5.6.	Derivadas Direccionales de Campos Vectoriales . . . . .	31
5.6.1.	El concepto . . . . .	31
5.6.2.	Un ejemplo: el campo de aceleraciones de un fluido . . . . .	32
<b>6.</b>	<b>Integrales y Campos Vectoriales</b> . . . . .	<b>33</b>
6.1.	Resumiendo lo visto . . . . .	33
6.1.1.	Integrales de Campos . . . . .	33
6.1.2.	Integrales de línea . . . . .	34
6.1.3.	Integrales de Superficie . . . . .	35
<b>7.</b>	<b>Campos Vectoriales y Teoremas integrales</b> . . . . .	<b>36</b>
7.1.	Teorema de Gauss . . . . .	36
7.1.1.	Presentación y demostración . . . . .	36
7.1.2.	Expresiones equivalentes para el Teorema de Gauss . . . . .	38
7.1.3.	Ley de Gauss y Campo Eléctrico . . . . .	38
7.1.4.	Discontinuidades y densidades superficiales de carga . . . . .	39
7.1.5.	Teoremas de Green . . . . .	41
7.2.	Teorema de Stokes . . . . .	42
7.2.1.	Presentación y demostración . . . . .	42
7.2.2.	Expresiones equivalentes para el Teorema de Stokes . . . . .	43
7.2.3.	Teorema de Stokes y Fuerzas Conservativas . . . . .	44
7.2.4.	Teorema de Stokes y discontinuidades del campo vectorial . . . . .	44
<b>8.</b>	<b>Teoría de Potencial</b> . . . . .	<b>45</b>
8.1.	Potenciales escalares . . . . .	45
8.2.	Potenciales vectoriales y calibres . . . . .	47
8.3.	Teorema de Green y Potenciales . . . . .	48
8.4.	Teorema de Helmholtz . . . . .	48

## 1. Campos Tensoriales y el Concepto de Campo

Cuando avanzamos en la derivación de vectores vimos vectores que dependían del tiempo. Luego cuando construimos sistemas de coordenadas ortogonales vimos también vectores que variaban en módulo dirección y sentido.

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} = \tilde{a}^k |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle_{(t)} = \hat{a}^k(t) |\hat{\mathbf{e}}_k\rangle$$

Ahora podemos generalizar este concepto a tensores que dependen de una variable escalar

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} [\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \\ & \quad \Downarrow \\ & \mathcal{T} \left[ \begin{array}{ccccccc} |t_i(1)\rangle & |u_j(2)\rangle & & |v_k(m)\rangle & |x^m(1)\rangle & |y^n(2)\rangle & |z^l(n)\rangle \\ \downarrow & \downarrow & , \dots , & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ & , \dots , & \circ & \bullet & \bullet & , \dots , & \bullet \end{array} \right]_{(t)} = T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \end{aligned}$$

$$T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle t^i(1)| \otimes \langle u^j(2)| \otimes \dots \otimes \langle v^k(m)| \otimes |x_m(1)\rangle \otimes |y_n(2)\rangle \otimes \dots \otimes |z_l(n)\rangle$$

$$\tilde{T}_{ij\dots k}^{mn\dots l} \langle \tilde{t}^i(1)|_{(t)} \otimes \langle \tilde{u}^j(2)|_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \tilde{v}^k(m)|_{(t)} \otimes |\tilde{x}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\tilde{y}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes |\tilde{z}_l(n)\rangle_{(t)}$$

$$\tilde{\tilde{T}}_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle \tilde{\tilde{t}}^i(1)|_{(t)} \otimes \langle \tilde{\tilde{u}}^j(2)|_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \tilde{\tilde{v}}^k(m)|_{(t)} \otimes |\tilde{\tilde{x}}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\tilde{\tilde{y}}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes |\tilde{\tilde{z}}_l(n)\rangle_{(t)}$$

al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese. Así tendremos tensores cuyas componentes, en una determinada base, serán variables y en otra no. Mientras que una de las bases será variable y otra no.

Igualmente saltamos al cociente incremental para conocer la velocidad de variación

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T} [\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t+\Delta t)} - \mathcal{T} [\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)}}{\Delta t} \\ & \quad \Updownarrow \\ & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{T} [\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)}}{\Delta t} \\ & \quad \Updownarrow \\ & \frac{d \left( \mathcal{T} [\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \right)}{dt} \end{aligned}$$

si la base es constante, entonces podemos, como en el caso de los vectores, la dependencia funcional y su variación (su derivada) recae sobre sus componentes. Así podemos construir la derivada de las

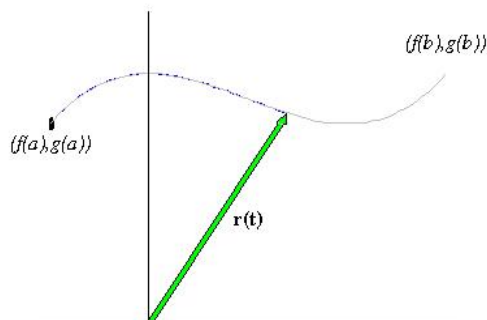


Figura 1: Radio vector posición  $\vec{r}(t)$  en  $\mathbb{R}^2$  que describe paraméricamente una curva.

componentes como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t + \Delta t) - T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)}{\Delta t} = \frac{d(T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t))}{dt}$$

Siguiendo con el proceso de generalización podemos pensar en una dependencia funcional multilineal. Esto es que el argumento de la “función” tensorial otro tensor,

$$\mathcal{T} [o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet] = \mathcal{T} [o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{g[o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]}$$

A ese objeto se le llama *Campo Tensorial*, pero vamos con calma. Analicemos los casos más simples los cuales son los verdaderamente útiles. Como era de esperarse, tendremos varios casos que se pueden construir a partir de esta idea hemos visto funciones que ahora llamaremos campos homogéneos

$$\varphi = \varphi(t) \quad \text{función}$$

$$|r\rangle_{(t)} \iff \vec{r} = \vec{r}(t) \rightsquigarrow r^k(t) \quad \text{vector}$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} [o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \quad \text{tensor}$$

y veremos campos constantes o estacionarios  $\vec{r} \neq \vec{r}(t)$

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) \quad \text{Campo Escalar}$$

$$|a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) \rightsquigarrow a^k(\vec{r}) \quad \text{Campo Vectorial}$$

$$\mathcal{T} = \mathcal{T} [o, o, \dots, o; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\vec{r}) \quad \text{Campo Tensorial}$$

⋮

⋮

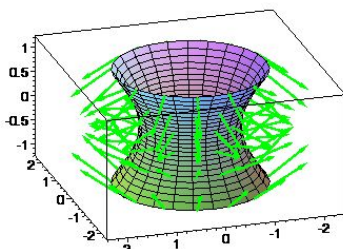


Figura 2: Campo Vectorial en  $\mathbb{R}^3$

campos variables o no estacionarios

$\varphi = \varphi(\vec{r}(t), t)$	Campo Escalar Variable
$ a\rangle_{( r\rangle)} \iff \vec{a} = \vec{a}(\vec{r}(t), t) \rightsquigarrow a^k(\vec{r}(t), t)$	Campo Vectorial
$\mathcal{T} = \mathcal{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{( r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\vec{r}(t), t)$	Campo Tensorial
$\vdots$	$\vdots$

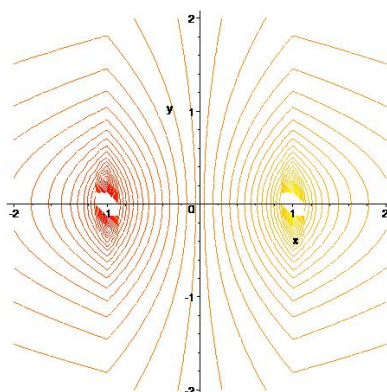
en ambos casos hemos supuesto que la base en la cual se expresan vectores y tensores es constante.

La idea de los campos escalares, vectoriales, tensoriales, con argumento vectorial, es asociar un valor de la componente (escalar, vectorial o tensorial) a cada punto del espacio (si el vector está en  $\mathbb{R}^3$ ). Obviamente los campos escalares asocian un número a cada posición y los campos vectoriales, además del número (módulo) asocian una dirección y un sentido.

Los campos escalares serán las distribuciones de densidad  $\rho(\vec{r}(t))$ , presión  $P(\vec{r}(t))$  y temperatura  $T(\vec{r}(t))$  de la atmósfera terrestre o la distribución de intensidades del campo eléctrico en una superficie. Así al considerar el potencial eléctrico

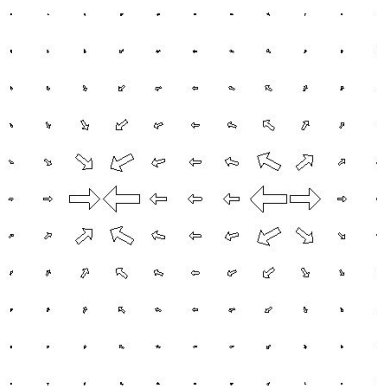
$$\phi(\vec{r}) = \phi(x, y) = \ln\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right) - \ln\left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

La representación del campo escalar será



$$\text{Campo Escalar } \phi(\vec{r}) = \phi(x, y) = \ln\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right) - \ln\left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)$$

y la representación de un campo vectorial será



Campo vectorial

## 2. Campos escalares y superficies

Campo escalar será aquella función escalar de argumento vectorial. Con ello a cada punto del espacio se le asocia un número. Esto es

$$\phi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} \quad \phi = \phi(\vec{r}) \quad \Rightarrow \phi = \phi(x^i) = \phi(\tilde{x}^i) \quad \Leftrightarrow \phi = \phi(x, y, z) = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$$

Estamos enfatizando el hecho que un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento. Adicionalmente recalcamos que es indistinto hablar de vectores o sus coordenadas  $\phi = \phi(\vec{r}) \Leftrightarrow \phi = \phi(x^i)$ . La Figura 3 ilustra un campo de temperaturas

$$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}$$

Si unimos los puntos con iguales temperaturas tendremos curvas isotermas tal y como se observan en la Figura 2

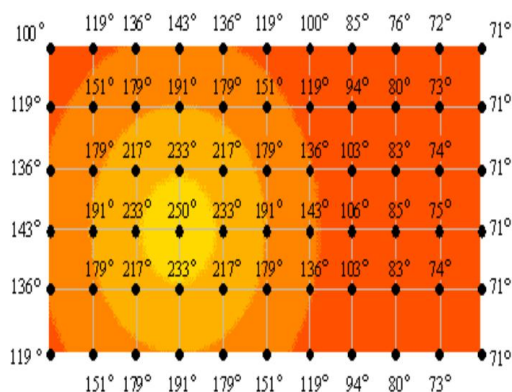
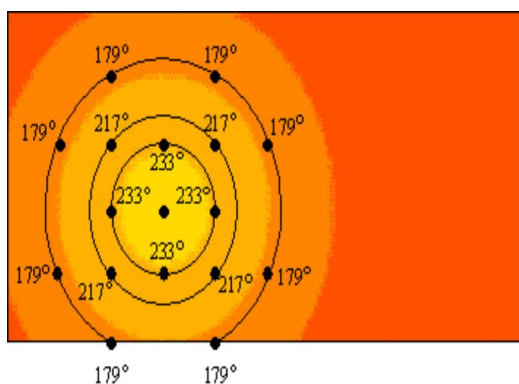


Figura 3: Ejemplo de Campo Escalar. Campo de Temperaturas  $T = T(x, y)$



Curvas Isotermas.  $T = T(x, y) = cte$

Un campo escalar  $\phi = \phi(x^1, x^2)$  definirá superficies si la representamos en  $\mathfrak{R}^3$  como  $x^3 = \phi(x^1, x^2)$  curvas de nivel o isocurvas las cuales corresponden a soluciones  $\phi = \phi(x^i) = cte$ . Tal y como se ilustra en la figura (4) los planos  $z = k = cte$  cortan la superficie y definen la curva  $g(x, y) = z = k$ .

En la próxima sección describiremos una fauna de operadores vectoriales, su utilidad y significado físico.

### 3. Campos vectoriales y líneas de flujo

Consideremos ahora un campo vectorial  $\vec{a}(\vec{r})$  y estudiemos su representación y lo que es más importante, su variación. Tal y como hemos dicho y volvemos a representar en la figura (5) los campos vectoriales asocian un vector (con su módulo dirección y sentido) a cada punto del espacio. Comúnmente, nos referimos a campos vectoriales según el caso. Así consideraremos *campos de fuerza* (es decir el vector del campo es una fuerza), *campo de velocidades* (el vector del campo

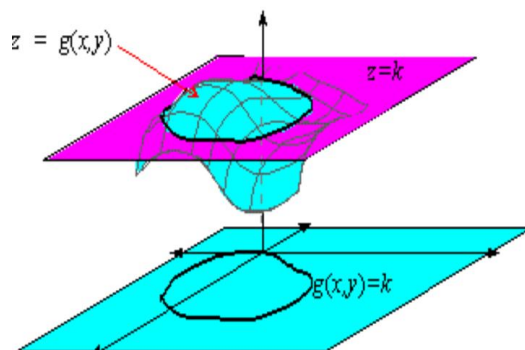


Figura 4: Curvas de Nivel para una función  $z = g(x, y) = cte$

es una velocidad). Del mismo modo a aquellas líneas a las cuales los vectores son tangentes se les dominan *líneas de campo*, *curvas integrales* o simplemente *líneas de flujo* o de *corriente*. A las trayectorias ortogonales a estas líneas, vale decir a aquellas líneas cuyos vectores tangentes sean ortogonales al campo, se les denominarán *líneas equipotenciales*. El ejemplo más emblemático lo constituye el gradiente de un campo escalar  $\vec{\nabla}\phi(x, y)$ . Las *líneas equipotenciales* las define el campo escalar mismo,  $\phi(x, y) = z = cte$  (curva de nivel) y construimos un campo vectorial con su gradiente,  $\vec{\nabla}\phi(x, y)$ . Como el gradiente es perpendicular a la curva de nivel tendremos que las *curvas integrales*, (*líneas de flujo* o *líneas de corriente*) del campo vectorial  $\vec{\nabla}\phi(x, y)$  serán *trayectorias ortogonales* a las *curvas equipotenciales*.

### 3.1. Líneas de flujo o curvas integrales

Supongamos el caso bidimensional<sup>1</sup> en coordenadas cartesianas, y consideremos un desplazamiento diferencial  $d\vec{r}$  en la dirección del campo vectorial, es fácil convencerse que

$$d\vec{r} \propto \vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\hat{i} + a_y(x, y)\hat{j} \Rightarrow \frac{dx}{a_x(x, y)} = \frac{dy}{a_y(x, y)}$$

con lo cual encontramos las *líneas de flujo* o *curvas integrales*  $y(x)$  del campo  $\vec{a}(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y(x, y)}{a_x(x, y)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{a_y(x, y)}{a_x(x, y)} dx$$

así dado un campo vectorial

$$\vec{a} = -x\hat{i} + y\hat{j} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{-x} + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}C_1$$

o lo que son lo mismo hipérbolas  $yx = C$ .

<sup>1</sup>El caso tridimensional sólo añade complicaciones técnicas y no riqueza conceptual



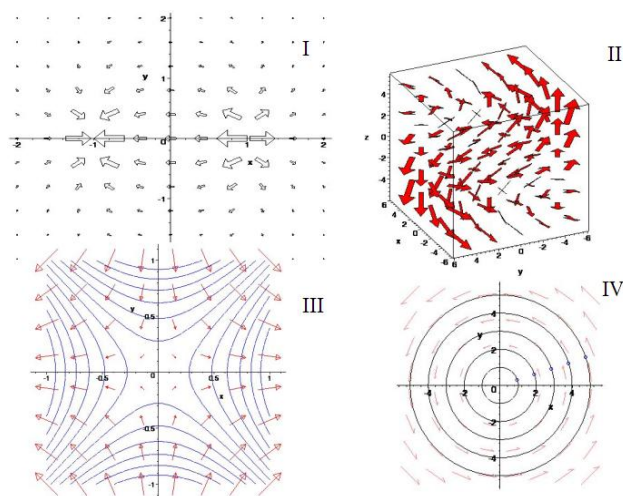


Figura 5: Campos vectoriales

Otra forma, equivalente de verlo es que

$$d\vec{r} \propto \vec{a}(x(t), y(t), z(t), t) \Rightarrow d\vec{r} \times \vec{a}(x(t), y(t), z(t), t) = 0 \Rightarrow$$

$$0 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ dx & dy & dz \\ a_x(x(t), y(t), z(t), t) & a_y(x(t), y(t), z(t), t) & a_z(x(t), y(t), z(t), t) \end{vmatrix}$$

por lo cual

$$(a_z(x(t), y(t), z(t), t) dy - a_y(x(t), y(t), z(t), t) dz) \hat{i} +$$

$$+ (a_x(x(t), y(t), z(t), t) dz - a_z(x(t), y(t), z(t), t) dx) \hat{j} +$$

$$+ (a_y(x(t), y(t), z(t), t) dx - a_x(x(t), y(t), z(t), t) dy) \hat{k} = 0$$

y finalmente

$$\frac{dx}{a_x(x(t), y(t), z(t), t)} = \frac{dy}{a_y(x(t), y(t), z(t), t)} = \frac{dz}{a_z(x(t), y(t), z(t), t)}$$

la integral de estas ecuaciones construirá las líneas de flujo o curvas integrales.

### 3.2. Trayectorias ortogonales a las líneas de flujo

Para encontrar las *trayectorias ortogonales* al campo vectorial o las *líneas equipotenciales* construimos un campo vectorial  $\vec{a}^\perp(x, y)$  que sea ortogonal en todo punto a  $\vec{a}(x, y)$

$$\vec{a}^\perp(x, y) \cdot \vec{a}(x, y) = 0 \Rightarrow a_x(x, y) a_x^\perp(x, y) + a_y(x, y) a_y^\perp(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{a_x(x, y)}{a_y(x, y)} = -\frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)}$$

$$\Rightarrow \vec{a}^\perp(x, y) = a_x^\perp(x, y) \hat{i} - a_y^\perp(x, y) \hat{j}$$

y ahora procedemos del mismo modo pero con el campo vectorial  $\vec{a}^\perp(x, y, z)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{-a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)} dx$$

con lo cual las trayectorias ortogonales al campo

$$\vec{a} = -x\hat{i} + y\hat{j} \Rightarrow \vec{a}^\perp = -x\hat{i} + y\hat{j} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = xC_1$$

serán rectas.

## 4. Flujo de Campos Vectoriales

Podemos también imaginar flujo de campos vectoriales. Para ello, consideramos una superficie infinitesimal  $d\vec{S} = \|\widehat{dS}\| \hat{n}_s$ , con  $\hat{n}_s$  el vector unitario normal esa superficie  $S$ . Entonces, la cantidad

$$df = \vec{a} \cdot d\vec{S} = \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS \Rightarrow f = \iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS = \iint_s a_{\hat{n}} dS$$

representará el flujo del campo vectorial a través de la superficie  $d\vec{S}$ . Hemos denotado  $a_{\hat{n}}$  como la componente de  $\vec{a}$  a lo largo de  $\hat{n}_s$ . Hay que hacer notar que  $f = \iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S}$  es independiente del sistema de coordenadas y en cartesianas puede expresar como

$$df = \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS = a^1 \cos(\widehat{\hat{n}_s a^1}) + a^2 \cos(\widehat{\hat{n}_s a^2}) + a^3 \cos(\widehat{\hat{n}_s a^3})$$

donde  $\{a^1, a^2, a^3\}$  son las componentes cartesianas del vector  $\vec{a}$ . La idea que esta cantidad representa flujo puede tenerse si pensamos en un fluido incompresible que fluye con un campo de velocidades  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$ . El volumen que atraviesa una determinada superficie en un intervalo de tiempo  $dt$ . Así,  $dS$  definirá la base de un tubo de fluido y tendrá como “altura” la  $\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\hat{n}_s \vec{v}}) dt$  ya que la altura no tiene por qué ser perpendicular a la base<sup>2</sup>. Por lo tanto la cantidad de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo viene dada por

$$df = \left( \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\hat{n}_s \vec{v}}) \right) dS = (\vec{v} \cdot \hat{n}_s dS) = (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \Rightarrow f = \iint_s \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_s \vec{v} \cdot \hat{n}_s dS = \iint_s v_{\hat{n}} dS$$

## 5. La fauna de los operadores vectoriales

A partir del concepto de campo escalar, presentaremos la fauna de objetos diferenciales en el espacio tridimensional. Salvo que se diga lo contrario, utilizaremos el sistema de coordenadas

<sup>2</sup>Si lo es  $\cos(\widehat{\hat{n}_s \vec{v}}) = 1$  porque la velocidad es paralela a la normal

cartesianas, vale decir

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (x, y, z)$$

$$|\mathbf{r}\rangle = x|\mathbf{i}\rangle + y|\mathbf{j}\rangle + z|\mathbf{k}\rangle = \tilde{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$h_x = \left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial x} \right\| = 1; \quad h_y = \left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial y} \right\| = 1; \quad h_z = \left\| \frac{\partial |\mathbf{r}\rangle}{\partial z} \right\| = 1$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(x, y, z) \implies d\tilde{\mathbf{r}} = \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial z} \right) dz = dx|\mathbf{i}\rangle + dy|\mathbf{j}\rangle + dz|\mathbf{k}\rangle$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \iff g_{11} = g_{xx} = 1; \quad g_{22} = g_{yy} = 1; \quad g_{33} = g_{zz} = 1$$

## 5.1. Derivada direccional, diferencial total y gradiente

### 5.1.1. Derivada direccional de Campos escalares

Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo” para ello, parametrizamos las componentes del vector tendremos que

$$z = \phi(\vec{r}(t)) = g(x(t), y(t)) \implies$$

$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial \phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial \phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \vec{\nabla} \phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

donde hemos representado

$$\vec{\nabla} \phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} = \phi_x(x, y) \hat{\mathbf{i}} + \phi_y(x, y) \hat{\mathbf{j}} = \partial^i \phi(x, y) |\mathbf{e}_i\rangle = \phi^{,i}(x, y) |\mathbf{e}_i\rangle$$

y lo llamaremos el gradiente de la función. El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles, el cual lo hemos utilizado de manera operacional y no nos hemos detenido a reflexionar sobre sus propiedades.

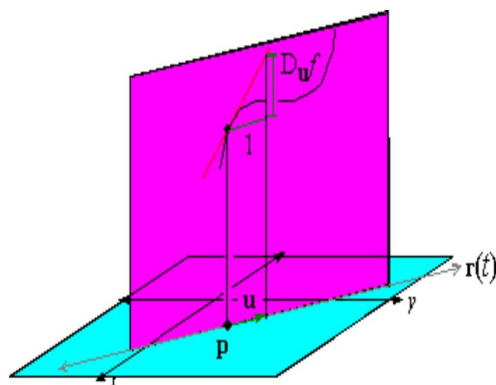
Es claro que para una curva de nivel

$$g(x, y) = z = \phi(\vec{r}(t)) = k = cte \implies \frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0 \implies$$

$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = 0 = \vec{\nabla} \phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

con lo cual dado que  $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$  es la tangente a la curva, el gradiente es perpendicular a la curva tal y como muestra la figura (5.1.1).

La derivada direccional indicará la tasa de cambio del campo escalar en la dirección que apuntamos.



Derivada Direccional

En una generalización de la idea que surge de parametrización de la curva o de la derivada total respecto al tiempo

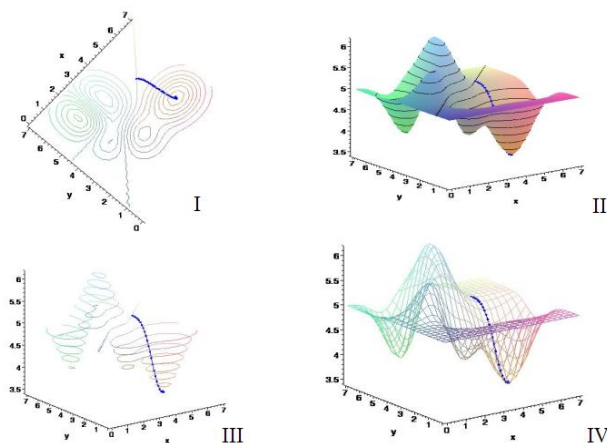
$$\frac{d\phi}{dt} = \vec{\nabla}\phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Así es claro que, dados dos puntos  $M$  y  $M'$  en el campo se puede relacionar. Definiremos, entonces la derivada en la dirección de un vector unitario  $|\mathbf{u}\rangle \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$  como

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle}\phi = \vec{\nabla}\phi(x, y) \cdot \hat{u} = \frac{d\phi}{d\lambda} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{[\overrightarrow{M'M}]}$$

Tal y como se puede apreciar en la figura (5.1.1) la derivada direccional representa la pendiente de la recta tangente a la curva que surge como intersección entre la superficie  $\phi(x, y) = z = k = cte$  y el plano vertical formado por el eje  $z$  y el vector unitario  $\hat{u}$ . Si se da el caso que la función  $\phi$  de penda de manera explícita del parámetro tendremos que

$$\phi = \phi(x(t), y(t), t) \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t), t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\phi(x(t), y(t), t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$



Dirección de máxima variación en una función

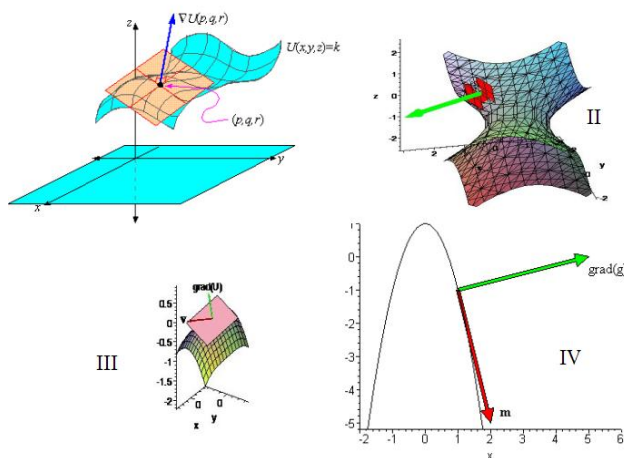
En este punto, varias conclusiones se pueden derivar del concepto de derivada total. La primera es que dado que, la norma de la derivada direccional a lo largo de  $|\mathbf{u}|$  es

$$\|\mathbf{D}_{|\mathbf{u}|}\phi\| = \left\| \vec{\nabla}\phi(x, y) \cdot \hat{u} \right\| = \left| \vec{\nabla}\phi(x, y) \right| \cos\left(\widehat{\vec{\nabla}\phi(x, y), \hat{u}}\right)$$

(donde hemos denotado por  $\widehat{\vec{\nabla}\phi(x, y), \hat{u}}$  como el ángulo que forman los vectores  $\vec{\nabla}\phi(x, y)$  y  $\hat{u}$ ), el valor máximo de la norma de la derivada direccional será

$$\|\mathbf{D}_{|\mathbf{u}|}\phi\|_{\text{máx}} = \left| \vec{\nabla}\phi(x, y) \right| = \sqrt{\partial^i \phi \partial_i \phi} \equiv \sqrt{\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)^2}$$

es decir, cuando  $\hat{u}$  apunta en la dirección del gradiente, o lo que es lo mismo, dirección de la mayor tasa de cambio la indica la dirección del gradiente. O dicho de otro modo, en un determinado punto  $M$  de las superficie  $\phi(x, y) = z$  el vector  $\vec{\nabla}\phi$  apunta en la dirección de la máxima tasa de cambio, tal y como podemos apreciar en la figura (5.1.1).



Gradiente y Tangente de una función

La segunda conclusión es dado que el gradiente es ortogonal a la superficie, los vectores perpendiculares a él conformarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.

### 5.1.2. Gradiente y flujo de un campo vectorial

Podemos utilizar la idea de flujo de un campo vectorial y generalizar la definición de gradiente para que sea independiente de coordenadas.

$$\tilde{\nabla}\phi = \text{grad } \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \hat{n}_s dS$$

Esto es, supongamos que construimos un campo vectorial de la forma siguiente

$$\vec{a}(x, y, z) = \vec{c} \phi(x, y, z) \quad \text{con } \vec{c} = \text{cte}$$

con lo cual

$$f = \iint_s \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_s \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot \hat{n}_s dS$$

Es claro que esta expresión vale para todos los sistemas de coordenadas. En particular, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo serán con

$$d\vec{S}_{x+} = (dy dz)_{dx} \hat{i}; \quad d\vec{S}_{x-} = -(dy dz) \hat{i}$$

$$d\vec{S}_{y+} = (dx dz)_{dy} \hat{j}; \quad d\vec{S}_{y-} = -(dx dz)_{dy} \hat{j}$$

$$d\vec{S}_{z+} = (dx dy)_{dz} \hat{k}; \quad d\vec{S}_{z-} = -(dx dy)_{dz} \hat{k}$$

con lo cual el flujo por las seis caras será

$$\begin{aligned}
 df &= \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S}_{x+} + \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S}_{x-} + \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S}_{y+} \\
 &\quad + \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S}_{y-} + \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S}_{z+} + \vec{c} \phi(x, y, z) \cdot d\vec{S}_{z-} \\
 &= \vec{c} (\phi(x+dx, y, z) dy dz - \phi(x, y, z) dy dz + \phi(x, y+dy, z) dx dz - \phi(x, y, z) dx dz \\
 &\quad + \phi(x, y, z+dz) dx dy - \phi(x, y, z) dx dy) \\
 &= \vec{c} ((\phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z)) dy dz + (\phi(x, y+dy, z) - \phi(x, y, z)) dx dz + \\
 &\quad + (\phi(x, y, z+dz) - \phi(x, y, z)) dx dy)
 \end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor hasta primer orden porque estamos considerando un “cubo diferencial” tendremos que

$$\phi(x+dx, y, z) \approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} dx$$

$$\phi(x, y+dy, z) \approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} dy$$

$$\phi(x, y, z+dz) \approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} dz$$

con lo cual

$$df = \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} dz dx dy$$

$$df = \left( \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \rightarrow df = (\tilde{\nabla} \phi) dV$$

$$\tilde{\nabla} \phi = \frac{df}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{f_2 - f_1}{V_2 - V_1} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \hat{n} dS$$

nótese que hemos supuesto que  $\Delta V \equiv V_2 \equiv V$  y que  $f_2 = \iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S}$  Que quiere decir que tanto  $V_1 \sim 0$  y con lo cual el flujo a través de un punto se anula,  $f_1 \sim 0$ .

### 5.1.3. Gradiente y coordenadas curvilíneas

La generalización de la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas es inmediata a partir de diferencial total de una función  $\phi(q^1, q^2, q^3)$ . Esto es

$$\phi(q^1, q^2, q^3) = \phi(q^j) \Rightarrow d\phi = \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial q^j} dq^j = \vec{\nabla} \phi(q^1, q^2, q^3) \cdot d\vec{r}$$

con

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\phi(q^1, q^2, q^3) &= \left( \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \right) \\ &\quad \text{y} \\ d\vec{r} &= \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial q^3} dq^3 \right) \Rightarrow \\ d\vec{r} &= \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\| |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle dq^1 + \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\| |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle dq^2 + \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\| |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle dq^3 \right)\end{aligned}$$

ya que

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}; \quad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}; \quad |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3};$$

Es decir la forma general del gradiente para un sistema de coordenadas curvilíneas es

$$\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^1} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^2} |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}^3} |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle$$

Donde denotamos  $h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\| = \sqrt{g_{ii}}$  el factor de escala que acompaña a la base  $|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle$

## 5.2. Divergencia y flujo en campos vectoriales

Viendo con un poco más de cuidado la expresión para el gradiente tenemos

$$\vec{\nabla}(\phi) = \text{grad}(\phi) = \left( \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle}{h_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle}{h_2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle}{h_3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} \right) \phi = \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle}{(h)_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \phi$$

Donde hemos indicado por  $(h)_i$  al factor de escala y no implica suma. La suma está indicada entre las componentes  $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \partial_i$  y los elementos de la base  $\{|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle\}$ . Con esta inspiración podemos construir un operador vectorial

$$\tilde{\nabla} \equiv \left( \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_1 |}{\mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_2 |}{\mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_3 |}{\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} \right)$$



con lo cual, si cuidamos el orden de operación, podremos realizar un “producto escalar entre dos vectores”

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \equiv$$

$$\left( \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_1 |}{\mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_2 |}{\mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_3 |}{\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^3} \right) (a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + a^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \equiv & \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_1 |}{\mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial (a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + a^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle)}{\partial \tilde{x}^1} + \\ & + \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_2 |}{\mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial (a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + a^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle)}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\langle \tilde{\mathbf{e}}_3 |}{\mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)} \frac{\partial (a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + a^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle)}{\partial \tilde{x}^3} \end{aligned}$$

y hay que tener cuidado con la posible variación de los vectores base. Consideremos en caso de coordenadas cartesianas,  $(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (x, y, z)$ , donde la base  $\{|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$  es constante. Entonces tendremos de forma inmediata

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \frac{\partial a^i (x^j)}{\partial \tilde{x}^i} \equiv \partial_i a^i (x^j) \equiv \frac{\partial a_x (x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y (x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z (x, y, z)}{\partial z}$$

### 5.2.1. Divergencia como medida de flujo

El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la definición, independiente del sistema de coordenada

$$\operatorname{div} [\vec{a}] \equiv \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \frac{df}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s \, dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{n}} \, dS$$

Es decir el flujo por unidad de volumen. Otra vez, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo serán con

$$d\vec{S}_{x+} = (dy \, dz)_{dx} \hat{i}; \quad d\vec{S}_{x-} = -(dy \, dz) \hat{i}$$

$$d\vec{S}_{y+} = (dx \, dz)_{dy} \hat{j}; \quad d\vec{S}_{y-} = -(dx \, dz) \hat{j}$$

$$d\vec{S}_{z+} = (dx \, dy)_{dz} \hat{k}; \quad d\vec{S}_{z-} = -(dx \, dy) \hat{k}$$

el flujo por las seis caras será

$$df = \vec{a} \cdot d\vec{S}_{x+} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{x-} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{y+} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{y-} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{z+} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{z-}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} df &= a_x(x+dx, y, z) dy dz - a_x(x, y, z) dy dz + \\ &\quad + a_y(x, y+dy, z) dx dz - a_y(x, y, z) dx dz + \\ &\quad + a_z(x, y, z+dz) dx dy - a_z(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df &= (a_x(x+dx, y, z) - a_x(x, y, z)) dy dz + (a_y(x, y+dy, z) - a_y(x, y, z)) dx dz + \\ &\quad + (a_z(x, y, z+dz) - a_z(x, y, z)) dx dy \end{aligned}$$

desarrollando por Taylor otra vez, tendremos

$$a_x(x+dx, y, z) \approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx$$

$$a_y(x, y+dy, z) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy$$

$$a_z(x, y, z+dz) \approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz$$

obtendremos

$$df = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz dx dy$$

$$df = \vec{a} \cdot d\vec{S} = \left( \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV$$

Consecuentemente

$$f = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left( \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \equiv \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dV$$

La primera conclusión es que podemos convertir una integral de superficie cerrada de un campo vectorial, en una integral de volumen encerrada por esa misma superficie. Lo hemos demostrado para el caso de coordenadas cartesianas, pero como el flujo  $f = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$  es un escalar, esta afirmación vale para **cualquier sistema de coordenadas**. Esto se conoce como el *Teorema de la Divergencia* el cual veremos más adelante (ver sección 7.1 en la página 36). A partir de este teorema tenemos que si la divergencia de un campo vectorial es positiva lo interpretaremos como flujo hacia afuera (saliente) del volumen  $V$  encerrado por la superficie,  $S$ , y si la divergencia del campo es negativa esa tendremos flujo entrante. Como ilustración puede ver el ejemplo de la página 21.

### 5.2.2. Divergencia y coordenadas curvilíneas

Para encontrar la expresión para la divergencia en coordenadas curvilíneas generalizadas partimos de la definición invariante de sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} [\vec{a}] \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{n}} dS$$

y al igual que procedimos en coordenadas cartesianas, ahora consideraremos un “paralelepípedo curvilíneo” con tres de sus aristas alineadas con el sistema ortogonal curvilíneo. Las caras de este “paralelepípedo curvilíneo” podrán ser representadas como Entonces se tiene que las caras del cubo serán con

$$d\vec{S}_{q^1+} = (ds_{\rightarrow q^2} ds_{\rightarrow q^3})_{dq^1} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle; \quad d\vec{S}_{q^1-} = - (ds_{\rightarrow q^2} ds_{\rightarrow q^3}) |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle$$

$$d\vec{S}_{q^2+} = (ds_{\rightarrow q^3} ds_{\rightarrow q^1})_{dq^2} |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle; \quad d\vec{S}_{q^2-} = - (ds_{\rightarrow q^3} ds_{\rightarrow q^1}) |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle$$

$$d\vec{S}_{q^3+} = (ds_{\rightarrow q^1} ds_{\rightarrow q^2})_{dq^3} |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle; \quad d\vec{S}_{q^3-} = - (ds_{\rightarrow q^1} ds_{\rightarrow q^2}) |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle;$$

donde denotamos  $ds_{\rightarrow i}$  el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada  $q^i$ . Los paréntesis  $(\cdot)_{dq^i}$  indican que esta superficie es evaluada en  $q^i + dq^i$ . Adicionalmente, es de hacer notar que

$$(ds_{\rightarrow i}) = \sqrt{\tilde{g}_{ii}} dq^i = h_i dq^i \quad \text{donde los índices repetidos NO indican suma}$$

Ahora bien, dado que  $|a\rangle \equiv \vec{a} = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$  el flujo por las seis caras será

$$df = \vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^1+} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^1-} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^2+} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^2-} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^3+} + \vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^3-}$$

continuando el paralelo, pero con mucho más cuidado. Para comenzar vemos que **ES** el flujo del campo vectorial lo que está siendo evaluado en dos puntos distintos. A lo largo de  $q^1$  vemos que

$$\vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^1-} = (\tilde{a}^1 (q^1, q^2, q^3) h_2 h_3) dq^2 dq^3$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^2-} = (\tilde{a}^2 (q^1, q^2, q^3) h_3 h_1) dq^3 dq^1$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{S}_{q^3-} = (\tilde{a}^3 (q^1, q^2, q^3) h_1 h_2) dq^1 dq^2$$

con lo cual es el flujo lo que debemos desarrollar por Taylor.

$$\tilde{a}^1(q^1 + dq^1, q^2, q^3) h_2 h_3 = \left( \tilde{a}^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3 + \frac{\partial (\tilde{a}^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1 \right)$$

$$\tilde{a}^2(q^1, q^2 + dq^2, q^3) h_3 h_1 = \left( \tilde{a}^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1 + \frac{\partial (\tilde{a}^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2 \right)$$

$$\tilde{a}^3(q^1, q^2, q^3 + dq^3) h_1 h_2 = \left( \tilde{a}^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2 + \frac{\partial (\tilde{a}^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3 \right)$$

Nótese que el caso cartesiano no se hizo explícito este echo por cuanto  $h_3 = h_2 = h_1 = cte = 1$ . Entonces el flujo por las el caso de coordenadas curvilíneas será

$$df = \frac{\partial (\tilde{a}^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1 dq^2 dq^3 + \frac{\partial (\tilde{a}^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2 dq^3 dq^1 + \frac{\partial (\tilde{a}^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3 dq^1 dq^2$$

si recordamos que

$$dV = (ds_{\rightarrow 1}) (ds_{\rightarrow 2}) (ds_{\rightarrow 3}) = \sqrt{g_{11}} dq^1 \sqrt{g_{22}} dq^2 \sqrt{g_{33}} dq^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3$$

donde denotamos  $ds_{\rightarrow i}$  el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada  $q^i$ . Tendremos que

$$\frac{df}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial (\tilde{a}^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (\tilde{a}^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (\tilde{a}^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right)$$

con lo cual identificamos la forma genérica de la divergencia en coordenadas curvilíneas

$$\text{div} [\vec{a}] \equiv \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial (\tilde{a}^1(q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (\tilde{a}^2(q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (\tilde{a}^3(q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right)$$

### 5.2.3. Un par de ejemplos

**La ecuación de continuidad** El primero de los ejemplos que consideraremos es la ecuación de continuidad. Consideremos una superficie cerrada  $S$  que encierra un volumen  $V$ . Esta superficie está inmersa en un fluido, de densidad  $\rho(\vec{r}, t)$  que fluye con un campo de velocidades  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ . Supondremos además que el volumen  $V$  que encierra la superficie  $S$  no cambia de posición, con lo cual, la variación de masa del fluido contenido en este volumen es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \right) = \iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV$$

Entonces la variación de la cantidad de fluido encerrada por la superficie  $S$  será igual a la cantidad de fluido que escapa (o ingresa) a través de esa superficie. Esto es

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = - \iint_S \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n}_s dS = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)) dV$$

con lo cual

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)) \right) dV = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t)) = 0$$

y esta última representa la ecuación de continuidad en dinámica de fluidos.

**Fuentes y sumideros** El segundo ejemplo es un cálculo explícito el cual ilustra la interpretación de la divergencia como medida de flujo de un campo vectorial. Consideremos un campo vectorial de la forma

$$\vec{a}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \frac{q}{r^2} \hat{u}_r \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left( \frac{\partial (\tilde{a}_r(r, \theta, \varphi) h_\theta h_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial (\tilde{a}_\theta(r, \theta, \varphi) h_\varphi h_r)}{\partial \theta} + \frac{\partial (\tilde{a}_\varphi(r, \theta, \varphi) h_r h_\theta)}{\partial \varphi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \left( \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta \right)}{\partial r} \right) = 0$$

ya que en coordenadas esféricas,  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_\varphi = r \sin \theta$ .

Nótese que el origen del sistema coordenado (el punto  $r = 0$ ) no está definido porque no lo estaba en el campo vectorial original  $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$ . Con lo cual, se tiene que si la superficie  $S$  **no** encierra a  $r = 0$ , entonces el flujo a través de esa superficie será nulo

$$f = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dV = 0$$

Es decir, todo lo que entra sale. Sin embargo, si el volumen **contiene** al origen de coordenadas no podemos decir nada por cuanto hay una indeterminación en la expresión de la divergencia.

Consideremos con más cuidado este caso de la aplicación del *Teorema de la Divergencia*, en el cual la superficie  $S$  **contenga** el origen de coordenadas. Es claro que el volumen contenido entre dos esferas de distintos radio  $\tilde{r} < r$ , centradas en el origen y con superficies  $\tilde{S}$  y  $S$  respectivamente no contiene al origen y por lo tanto el flujo será nulo

$$f = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dV = 0 = \iint_S \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS + \iint_{\tilde{S}} \vec{a} \cdot \hat{n}_{\tilde{s}} d\tilde{S}$$

Pero el campo vectorial sobre la superficie  $\tilde{S}$  de la esfera de radio  $\tilde{r}$  es

$$\vec{a} = \frac{q}{\tilde{r}^2} \hat{u}_r, \quad \text{y } \hat{n}_{\tilde{s}} \equiv -\hat{u}_r, \quad \text{con lo cual } \iint_{\tilde{S}} \vec{a} \cdot \hat{n}_{\tilde{s}} d\tilde{S} = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} \hat{u}_r \cdot (-\hat{u}_r) d\tilde{S} = - \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} ds_{\rightarrow\theta} ds_{\rightarrow\varphi}$$

es decir,

$$\iint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s \, dS = \iint_{\tilde{s}} \frac{q}{\tilde{r}^2} ds_{\rightarrow\theta} \, ds_{\rightarrow\varphi} = \iint_{\tilde{s}} \frac{q}{\tilde{r}^2} \tilde{r}^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = q \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi q$$

ya que  $d\tilde{S} = h_\theta d\theta \, h_\varphi d\varphi \equiv \tilde{r} d\theta \, \tilde{r} \sin \theta d\varphi$ . Con lo cual, tenemos que el flujo de un campo singular en un punto (el origen de coordenadas),  $\vec{a}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{u}_r$ , a través de una superficie de que encierra ese punto singular, no es nulo y es igual a  $4\pi q$ . El campo vectorial  $\vec{a}(\vec{r})$ , se denominará campo de una partícula fuente si  $q > 0$  y campo de un sumidero si  $q < 0$

### 5.3. Rotores, líneas de torbellino y Circulación

Del mismo modo como hemos venido procediendo, haremos otra operación vectorial con el operador nabla  $\tilde{\nabla}$  Tendremos entonces el *rotor* o *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial  $\tilde{\nabla} \times \vec{a}$ . En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\tilde{\nabla} \times \vec{a} = \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \, |\mathbf{e}_i\rangle \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \, |\mathbf{e}_i\rangle = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \, |\mathbf{e}_1\rangle + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \, |\mathbf{e}_2\rangle + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \, |\mathbf{e}_3\rangle$$

$$\tilde{\nabla} \times \vec{a} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \hat{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \hat{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \hat{k} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

El rotor de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*)vectorial llamado *campo rotor* del campo vectorial. Por razones que serán evidentes enseguida, las curvas integrales de este *campo rotor* se denominan *líneas de torbellino*.

#### 5.3.1. Líneas de torbellino

Consideremos el siguiente campo vectorial en coordenadas cilíndricas para  $z \geq 0$

$$\vec{a} = z \hat{u}_\varphi = z (-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) = \frac{-z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j}$$

con lo cual el campo rotor del campo vectorial  $\vec{a}$  será

$$\vec{b} = \tilde{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) = \tilde{\nabla} \times \left( \frac{-z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{-z y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{z x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \tilde{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{k}$$

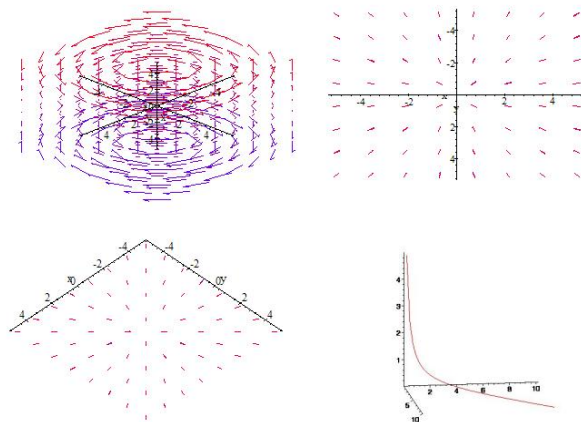


Figura 6: Rotores de un campo vectorial, líneas de torbellino

es claro que el campo vectorial y su campo rotor son ortogonales

$$\left( \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} \right) \cdot \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{k} \right) = 0$$

Tal y como se detalló en la Sección 3 de la página 7 las *líneas de flujo* se construyen a partir de un vector diferencial paralelo a campo vectorial en cada punto. Esto es si

$$\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \hat{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \hat{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \hat{k}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} d\vec{r} \propto \vec{b} &= \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) \\ &\Downarrow \\ \frac{dx}{b_x(x, y, z)} &= \frac{dy}{b_y(x, y, z)} = \frac{dz}{b_z(x, y, z)} = d\lambda \\ &\Downarrow \\ \frac{dx}{(\partial_y a_z - \partial_z a_y)} &= \frac{dy}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{dz}{(\partial_x a_y - \partial_y a_x)} = d\lambda \end{aligned}$$

donde hemos parametrizado la curva con  $\lambda$ .

por lo tanto

$$\frac{dx}{(\partial_y a_z - \partial_z a_y)} = \frac{dy}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{dz}{(\partial_x a_y - \partial_y a_x)} = d\lambda$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} dx}{-x} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dy}{-y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dz}{z} = d\lambda$$

las dos primeras ecuaciones proveen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = xC_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tilde{C}_1 & \Rightarrow x(\lambda) = \lambda\tilde{C}_1 \\ \frac{dy}{d\lambda} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \tilde{C}_2 & \Rightarrow y(\lambda) = \lambda\tilde{C}_2 \end{cases}$$

con

$$C_1 = cte; \quad \tilde{C}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + (C_1)^2}} = cte; \quad \tilde{C}_2 = -\frac{C_1}{\sqrt{1 + (C_1)^2}} = C_1\tilde{C}_1 = cte$$

finalmente

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2} dz}{z} = d\lambda \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{z}{x\sqrt{1 + (C_1)^2}} = \frac{z}{\lambda\tilde{C}_1\sqrt{1 + (C_1)^2}} = \frac{z}{-\lambda}$$

con lo cual

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{z}{-\lambda} \Rightarrow z(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\tilde{C}_3$$

### 5.3.2. Líneas de campo ortogonales a superficies

Hemos visto como la condición  $d\vec{r} \propto \vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z)$  encuentra líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo  $\vec{a}(x, y, z)$ . Uno también puede plantearse encontrar el conjunto de superficies para las cuales las líneas de flujo del campo vectorial,  $\vec{a}(x, y, z)$ , sean perpendiculares. Para ello suponemos que existen estas superficies y que se representan, matemáticamente, como un función  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ . Por lo tanto

$$\vec{\nabla}\varphi \propto \vec{a}(x, y, z) \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\gamma(x, y, z) \vec{a}(x, y, z)) = \vec{\nabla}\gamma(x, y, z) \times \vec{a}(x, y, z) + \gamma(x, y, z) \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) = 0$$

es decir  $\vec{\nabla}\varphi$  es proporcional al campo  $\vec{a}(x, y, z)$  y al aplicar el rotor a ambos miembros se anula. Más aún, al proyectar sobre el mismo vector  $\vec{a}$  la ecuación de la derecha nos queda

$$\vec{a}(x, y, z) \cdot \left[ \vec{\nabla}\gamma(x, y, z) \times \vec{a}(x, y, z) \right] + \vec{a}(x, y, z) \cdot \left[ \gamma(x, y, z) \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) \right] = 0$$

ambos sumandos se anula por definición de producto vectorial, pero el segundo sumando

$$\vec{a}(x, y, z) \cdot \left[ \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) \right] = 0$$



impone una condición sobre el campo independiente de la función de proporcionalidad.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que las líneas de flujo de un campo vectorial  $\vec{a}(x, y, z)$  sean perpendiculares a un conjunto de superficies  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  es

$$\vec{a}(x, y, z) \cdot \left[ \vec{\nabla} \times \vec{a}(x, y, z) \right] = 0$$

### 5.3.3. Circulación de un campo vectorial

La idea (y el nombre de *rotor*) surge de la idea de rotación (¿circulación?) que este operador descubre al ser “aplicado” a un campo vectorial. Como se muestra en la Figura 7, la idea intuitiva es colocar un “detector” de rotación inmerso en el campo. En este caso es un par de aspas e imaginamos que el campo vectorial representa un campo de velocidades de un fluido. Si el fluido hace girar las aspas en sentido horario (tirabuzón o sacacorchos derecho hacia arriba) diremos que el campo tiene una “circulación” positiva y el rotor del campo siempre será positivo en esa región. Si es inversa, diremos que el campo tiene una “circulación” negativa y el rotor también lo será en esa región. Finalmente, si el par de aspas no rota, el campo tendrá una circulación nula o no tendrá circulación y su rotor será también nulo en esa región.

Para concretar esta intuición de forma matemática, procedemos de la siguiente forma. Suponga una circunferencia con radio  $r = 2$ , la cual viene descrita paramétricamente por el radio vector

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \hat{i} + 2 \sin t \hat{j} \Rightarrow d\vec{r} = 2(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) d\varphi$$

y nos planteamos “hacer circular el campo” a lo largo de la esa trayectoria. Esto es realizar la siguiente integral

$$\Gamma = \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} z(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) \cdot 2(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j}) d\varphi = 4\pi z$$

El campo vectorial  $\vec{a} = z(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j})$  está representado en la Figura 6. Hemos utilizado el símbolo  $\oint$  para denotar la integral de línea en un circuito cerrado. Es la primera idea de integrales de campos vectoriales que veremos con más detalles en las sección 6.1.1. Uno hace el producto escalar  $\vec{a} \cdot d\vec{r}$  y luego integra.

Es interesante comparar este resultado con el flujo del campo de rotores a través de la superficie que delimita la circunferencia de radio  $r = 2$ . Vale decir

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \hat{n}_{\tilde{S}} d\tilde{S} = \iint \left( \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{k} \right) \cdot \hat{k} dx dy \Rightarrow$$

$$\iint (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \hat{n}_{\tilde{S}} d\tilde{S} = z \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = z \iint \frac{dr r d\theta}{r} = z \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 4z\pi$$

Esta “coincidencia” no es tal, corresponde a otro Teorema Integral para campos vectoriales, el *Teorema de Stokes* (ver sección 7.2 en la página 42) mediante el cual se convierte una integral

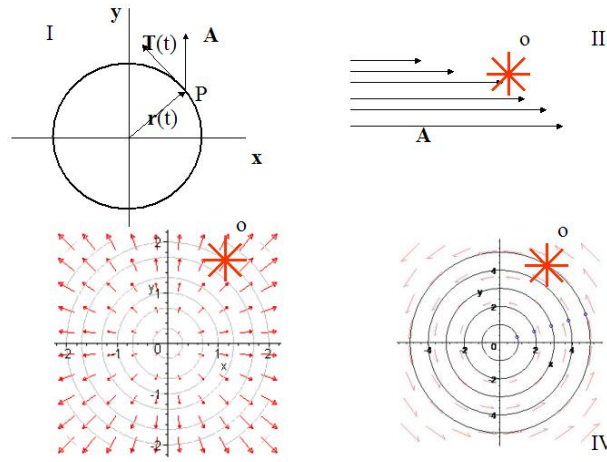


Figura 7: Idea sobre el significado físico del rotor

cerrada de línea de un campo vectorial en el flujo del campo de rotores. Este teorema lo estudiaremos con detalle en la sección 7.2

La idea de circulación se puede generalizar a un campo vectorial genérico,

$$\vec{a} = a_x(x, y, z) \hat{i} + a_y(x, y, z) \hat{j} + a_z(x, y, z) \hat{k}$$

con lo cual la integral de línea cerrada, a lo largo de una circunferencia de radio,  $r$ , en el plano  $x, y$  será

$$\Gamma = \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left\{ a_x(x, y, z) \hat{i} + a_y(x, y, z) \hat{j} + a_z(x, y, z) \hat{k} \right\} \cdot (-r \sin \varphi \hat{i} + r \cos \varphi \hat{j}) d\varphi$$

y suponiendo  $r \ll 1$  podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en el plano  $x, y$  alrededor del origen de coordenadas  $r_{x,y} \sim 0$ . Esto es

$$a_x(x, y, 0) = a_x|_{r=0} + x \frac{\partial a_x}{\partial x} \Big|_{r=0} + y \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{r=0} + \dots = a_x|_{r=0} + r \cos \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} \Big|_{r=0} + r \sin \varphi \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{r=0} + \dots$$

$$a_y(x, y, 0) = a_y|_{r=0} + x \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{r=0} + y \frac{\partial a_y}{\partial y} \Big|_{r=0} + \dots = a_y|_{r=0} + r \cos \varphi \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{r=0} + r \sin \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} \Big|_{r=0} + \dots$$

Por lo tanto, la integral de línea nos queda como

$$\Gamma = \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} - \left[ a_x|_{r=0} + r \cos \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} \Big|_{r=0} + r \sin \varphi \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{r=0} \right] r \sin \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \left[ a_y|_{r=0} + r \cos \varphi \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{r=0} + r \sin \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} \Big|_{r=0} \right] r \cos \varphi d\varphi$$

con los cual

$$\Gamma = \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \pi r^2 \left\{ \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right\} + O(r^3)$$

Finalmente vemos que la componente del rotor en el origen del plano  $x, y$  es igual al límite de la circulación a lo largo de una curva cerrada, dividida entre el área de la superficie que encierra la curva cerrada.

$$\left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi r^2}$$

### 5.3.4. Rotores y velocidades angulares

Considere un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje con velocidad angular  $\vec{\omega}$ . Entonces la velocidad tangencial de un punto  $P$ , con una posición  $\vec{r}$  medida a un origen  $O$  situado en ese eje, siempre es

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \hat{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \hat{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \hat{k}(\omega_x y - \omega_y x)$$

y su rotor será

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y) \hat{i} + (\partial_z v_x - \partial_x v_z) \hat{j} + (\partial_x v_y - \partial_y v_x) \hat{k} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

es decir, por ser un cuerpo rígido la velocidad angular  $\vec{\omega}$  es independiente de  $\vec{r}$ ; o lo que es lo mismo, todo el cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular. Con ello tendremos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \varepsilon^{ijk} \partial_j v_k |e_i\rangle = \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \omega^l r^m |e_i\rangle = \left( \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \partial_j \left( \omega^l r^m \right) |e_i\rangle$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \left( \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \omega^l \delta_j^m |e_i\rangle = (3\omega^i - \omega^i) |e_i\rangle = 2\omega^i |e_i\rangle = 2\vec{\omega}$$

sin índices hubiera sido

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_x = (\partial_y v_z - \partial_z v_y) = \partial_y (\omega_x y - \omega_y x) - \partial_z (\omega_z x - \omega_x z) = 2\omega_x$$

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_y = (\partial_z v_x - \partial_x v_z) = \partial_z (\omega_y z - \omega_z y) - \partial_x (\omega_x y - \omega_y x) = 2\omega_y$$

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{v} \right)_z = (\partial_x v_y - \partial_y v_x) = \partial_x (\omega_z x - \omega_x z) - \partial_y (\omega_y z - \omega_z y) = 2\omega_z$$

Otra vez, el rotor de una campo de velocidades de un cuerpo (que rota) “detecta” su velocidad angular.

### 5.3.5. Rotores y coordenadas curvilíneas

Una vez más recurrimos a una definición para el rotor independiente del sistemas de coordenada

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot} [\vec{a}] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint d\vec{S} \times \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint \hat{n}_{\vec{s}} \times \vec{a} d\tilde{S}$$

y del mismo modo que calculamos el flujo a través de las distintas capas de un volumen podremos (no lo haremos y se lo dejaremos al lector) demostrar que

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot} [\vec{a}] = \frac{1}{h_{\tilde{j}} h_{\tilde{k}}} \left[ \varepsilon^{ijk} \frac{\partial (h_{\tilde{k}} a_k)}{\partial q^j} |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \right] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle & h_2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle & h_3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}$$

donde los índices repetidos  $i, j, k$  indican suma;  $\tilde{j}$  y  $\tilde{k}$  no indican suma sino que replican los valores de los índices  $j, k$ .

Explícitamente

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot} [\vec{a}] = & \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 a_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial (h_2 a_2)}{\partial q^3} \right] + \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial (h_1 a_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial (h_3 a_3)}{\partial q^1} \right] + \\ & + \frac{|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 a_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial (h_1 a_1)}{\partial q^2} \right] \end{aligned}$$

### 5.4. Formulario del Operador *nabla*, $\vec{\nabla}$

El operador *nabla*,  $\vec{\nabla}$ , en las fórmulas anteriores actúa como un operador lineal. Esto es, dadas  $\varphi(\vec{r}), \chi(\vec{r}), \psi(\vec{r})$  funciones escalares de variable vectorial y  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  dos campos vectoriales cuales quiera, se puede generar el siguiente formulario, el cual deberá ser demostrado por el lector

$$\vec{\nabla} (\varphi + \chi\psi) = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\chi\psi) = \vec{\nabla}\varphi + \psi\vec{\nabla}\chi + \chi\vec{\nabla}\psi$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \varphi\vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \varphi\vec{\nabla} \cdot \vec{b} + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{b}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} + \varphi\vec{b}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla} \times (\varphi\vec{b}) = \vec{\nabla} \times \vec{a} + \vec{\nabla}\varphi \times \vec{b} + \varphi\vec{\nabla} \times \vec{b}$$

y también si consideramos las cantidades  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  y  $\vec{a} \times \vec{b}$  tendremos

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = [\partial^i (a^j b_j)] |\mathbf{e}_i\rangle = (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \vec{b} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \partial^i (\varepsilon_{ijk} a^j b^k) = (\varepsilon_{ijk} \partial^i a^j) b^k + (\varepsilon_{ijk} \partial^i b^k) a^j = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}$$

es claro que

$$\vec{a} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \right) \neq \left( \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{a} \iff a^j \left( \partial^i b_i \right) \neq b_i \partial^i a^j$$

por cuanto en las partes izquierda las derivadas actúan sobre las componentes de  $\vec{b}$ , mientras que en las partes derechas es sobre las componentes de  $\vec{a}$ .

Otros casos importantes se presentan cuando los campos escalares y/o vectoriales son a su vez funciones de un campo escalar. Es decir, funciones compuestas. Esto es

$$\psi = \psi(\chi(\vec{r})) \quad \text{y} \quad \vec{a} = \vec{a}(\chi(\vec{r})).$$

En este caso, tendremos

$$\vec{\nabla} \psi(\chi(\vec{r})) = \frac{d\psi}{d\chi} \vec{\nabla} \chi; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\chi(\vec{r})) = \vec{\nabla} \chi \cdot \frac{d\vec{a}}{d\chi}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{a}(\chi(\vec{r})) = \left( \vec{\nabla} \chi \right) \times \frac{d\vec{a}}{d\chi}$$

Para demostrar, por ejemplo,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\chi(\vec{r})) = \vec{\nabla} \chi \cdot \frac{d\vec{a}}{d\chi}$ , utilizamos la estrategia de Taylor y expandimos el campo vectorial alrededor de un determinado punto, digamos  $\vec{r} = \vec{r}_0$  arbitrario. Esto es

$$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}_0) + \left. \frac{d\vec{a}}{d\chi} \right|_{\vec{r}_0} (\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r}_0)) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\vec{a}}{d\chi^2} \right|_M (\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r}_0))^2 + \dots$$

aplicando la divergencia a ambos miembros queda como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot [\vec{a}(\vec{r}_0)] + \vec{\nabla} \cdot \left[ \left. \frac{d\vec{a}}{d\chi} \right|_{\vec{r}_0} (\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r}_0)) \right] + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \left[ \left. \frac{d^2\vec{a}}{d\chi^2} \right|_M (\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r}_0))^2 \right] + \dots$$

con lo cual

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left. \frac{d\vec{a}}{d\chi} \right|_{\vec{r}_0} \cdot \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) + (\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r}_0)) \left. \frac{d^2\vec{a}}{d\chi^2} \right|_{\vec{r}_0} \cdot \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) + \frac{1}{2} (\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r}_0))^2 \left. \frac{d^3\vec{a}}{d\chi^3} \right|_{\vec{r}_0} \cdot \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) + \dots$$

esta relación vale para todo  $\vec{r}$ , en particular para  $\vec{r} = \vec{r}_0$ . Con lo cual

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \Big|_{\vec{r}_0} = \left. \frac{d\vec{a}}{d\chi} \right|_{\vec{r}_0} \cdot \vec{\nabla} \chi(\vec{r}_0) \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{d\vec{a}}{d\chi} \cdot \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$$

ya que  $\vec{r}_0$  es arbitrario, con lo cual queda demostrado.

## 5.5. *Nabla* dos veces y el Laplaciano

### 5.5.1. Formulario de *Nabla* dos veces

Considerando a *Nabla*,  $\vec{\nabla}$ , como un operador surge la pregunta de su aplicación repetida sobre distintos objetos. Consideremos primero las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas. Esto

es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla}^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = \varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \phi |\mathbf{e}_i\rangle = 0$$

$$\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \right) = \partial^i (\partial^j a_j) |\mathbf{e}_i\rangle = \partial^j \partial^i a_j |\mathbf{e}_i\rangle$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) = \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial^l a^m |\mathbf{e}_i\rangle = \left( \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \partial_j \partial^l a^m |\mathbf{e}_i\rangle = \partial^i \partial_j a^j |\mathbf{e}_i\rangle - \partial_j \partial^j a^i |\mathbf{e}_i\rangle$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \times \vec{a} \right) = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \right) - \Delta \vec{a}$$

### 5.5.2. Laplaciano y campos escalares

Más allá de la gimnasia de índices para determinar la expresión de la relación vectorial, quizá la más importante de las aplicaciones es el Laplaciano, el cual en  $\mathfrak{R}^3$  y en coordenadas cartesianas puede expresarse como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{\nabla}^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi$$

La importancia el Laplaciano reside en que la mayor parte (casi todas) las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden y el Laplaciano las genera en el espacio. Adicionalmente la solución a la ecuación armónica

$$\Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi = 0$$

es de importancias en varias áreas de la física.

Se puede demostrar fácilmente que el Laplaciano cumple con

$$\Delta (\phi + C\psi) = \Delta \phi + C \Delta \psi; \quad \Delta (\phi\psi) = \phi \Delta \psi + \psi \Delta \phi + 2\vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \phi$$

considerando las expresiones para el gradiente y la divergencia en coordenadas curvilíneas

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle$$

y

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial (\tilde{a}^1 (q^1, q^2, q^3) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (\tilde{a}^2 (q^1, q^2, q^3) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (\tilde{a}^3 (q^1, q^2, q^3) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right)$$

respectivamente, es fácil llegar a la expresión para el Laplaciano en coordenadas curvilíneas

$$\nabla^2 \phi \equiv \Delta \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q^1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left( \frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \right) \right\}$$

### 5.5.3. Laplaciano y campos vectoriales

Inspirado en la forma que toma un campo vectorial en coordenadas cartesianas, definiremos el Laplaciano de un campo vectorial como la relación

$$\Delta \vec{a} = \tilde{\nabla} \left( \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \right) - \tilde{\nabla} \times \left( \tilde{\nabla} \times \vec{a} \right)$$

Desarrollando esta expresión en coordenadas cartesianas tendremos que

$$\Delta \vec{a} = [\partial^i (\partial^j a_j) - (\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^j a^i)] |e_i\rangle \implies \Delta \vec{a} = (\partial_j \partial^j a^i) |e_i\rangle \equiv (\Delta a^i) |e_i\rangle$$

Es decir, que el Laplaciano de un campo vectorial, **expresado en coordenadas cartesianas**, es igual al vector cuyas componentes son los Laplacianos de las componentes del campo original. Es importante resaltar que la expresión  $\Delta \vec{a} = (\Delta a^i) |e_i\rangle$  se cumple únicamente en coordenadas cartesianas pero la definición que hemos propuesto,  $\Delta \vec{a} = \tilde{\nabla} \left( \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \right) - \tilde{\nabla} \times \left( \tilde{\nabla} \times \vec{a} \right)$ , es una ecuación vectorial y es, por lo tanto, válida en cualquier sistema de coordenadas.

El Laplaciano de campos vectoriales no lleva construir un formulario de relaciones fácilmente demostrables

$$\Delta \left( \tilde{\nabla} \phi \right) = \tilde{\nabla} \left( \Delta \phi \right); \quad \tilde{\nabla} \cdot \left( \Delta \vec{a} \right) = \Delta \left( \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \right); \quad \tilde{\nabla} \times \left( \Delta \vec{a} \right) = \Delta \left( \tilde{\nabla} \times \vec{a} \right)$$

## 5.6. Derivadas Direccionales de Campos Vectoriales

### 5.6.1. El concepto

Formalmente y como siempre la misma idea de derivada como cociente incremental. Dados dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  y un vector  $\hat{u}$  que los une (va de  $P_1 \rightarrow P_2$ ), entonces por definición

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle} |a\rangle \equiv \frac{d \vec{a}}{du} = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{\vec{a}(P_2) - \vec{a}(P_1)}{P_2 - P_1} \implies \left( \frac{d \vec{a}}{du} \right)^i = \left( \frac{d a^i}{du} \right) = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{a^i(P_2) - a^i(P_1)}{P_2 - P_1}$$

por consiguiente, si  $\vec{a}$ , tiene por componentes cartesianas (en general cualquier sistema de coordenadas ortogonales)  $(a_x, a_y, a_z)$  las componentes del vector derivado serán  $\left( \frac{d a_x}{du}, \frac{d a_y}{du}, \frac{d a_z}{du} \right)$ . De modo que inspirados en la derivada direccional de un campo escalar que presentamos en la sección 5.1.1, podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector  $\frac{d \vec{a}}{du}$ . Esto es

$$\frac{d \varphi}{du} = \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle} \phi = \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{u} = u^i \partial_i \varphi \implies \frac{d a^i}{du} = \hat{u} \cdot \vec{\nabla} a^i = u^j \partial_j a^i \implies \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle} |a\rangle \equiv \frac{d \vec{a}}{du} = \left( \hat{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{a}$$

Otra vez, en coordenadas cartesianas se tiene que

$$\mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle} \vec{a} = \left( \hat{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{a} = (u^i \partial_i a^j) |e_j\rangle \implies \mathbf{D}_{|\mathbf{u}\rangle} (\circ) \equiv \frac{d (\circ)}{du} = \left( \hat{u} \cdot \vec{\nabla} \right) (\circ) \equiv u^i \partial_i (\circ)$$

### 5.6.2. Un ejemplo: el campo de aceleraciones de un fluido

El ejemplo más estándar es la descripción del campo de aceleraciones de un fluido en movimiento. El campo de aceleraciones de un fluido, como de costumbre, es la variación del campo de velocidades respecto al tiempo. Esto es  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . Para escribir la expresión de este campo de aceleraciones, supongamos que un fluido se mueve y registra un campo de velocidades  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$  el cual, en general, será inhomogéneo y no estacionario. Identificamos una porción del fluido (partícula) cualquiera y observamos que en un intervalo de tiempo  $dt$  esa porción identificada se mueve de  $P_1 \rightarrow P_2$  y registra un incremento en su velocidad de  $\vec{v}$  en  $P_1$  a  $\vec{v} + d\vec{v}$  en  $P_2$  :

$$\vec{v}(P_1) \equiv \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \text{y} \quad \vec{v}(P_2) \equiv \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt)$$

Tal y como ejemplificamos en la Figura 8, este incremento proviene de dos contribuciones. Una, llamada local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad,  $\vec{v}$ , en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).

$$d\vec{v}_t = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt \quad \text{y} \quad d\vec{v}_u = \frac{d\vec{v}}{du} du$$

Visto de otro modo un poco más informal, dado que el campo es función de dos variables y una de ellas vectorial

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dr} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

De la discusión anterior es claro que  $\frac{d\vec{v}}{du}$  es la derivada direccional del campo de velocidades a lo largo del vector unitario  $\hat{u}$  que apunta  $P_1 \rightarrow P_2$  Ahora bien, para este caso tenemos que:

$$du = \|d\vec{r}\|, \quad du = \|\vec{v}\| dt \quad \text{y} \quad \hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

con lo cual la derivada direccional nos queda como

$$\frac{d\vec{v}}{du} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

finalmente la aceleración nos queda expresada como

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad a^i = \frac{1}{\|\vec{v}\|} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t}$$

donde hemos representado las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración como  $v^i$  y  $a^i$ , respectivamente.

Es importante hacer una reflexión un poco más física de las contribuciones. La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue al partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades. Esto es de la variación del campo de velocidades según la dirección que siga la partícula.



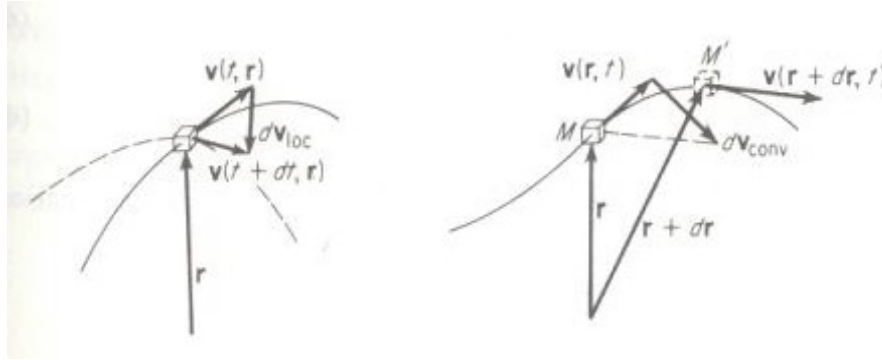


Figura 8: Contribuciones a la variación de la velocidad en un fluido

## 6. Integrales y Campos Vectoriales

### 6.1. Resumiendo lo visto

#### 6.1.1. Integrales de Campos

Después de haber diferenciado campos escalares y vectoriales, el siguiente paso es integrarlos. El primer caso de este tipo integrales es el trivial que siempre hemos utilizado:

$$\int \vec{V}(u) \, d u = \hat{i} \int V_x(u) \, d u + \hat{j} \int V_y(u) \, d u + \hat{k} \int V_z(u) \, d u = \left( \int V^i(u) \, d u \right) |\mathbf{e}_i\rangle$$

Así integramos la aceleración de un movimiento parabólico

$$\frac{d \vec{v}}{dt} = \vec{a} = -g \hat{\mathbf{k}} \implies \vec{v} = \int \vec{a} \, dt = \hat{\mathbf{k}} \int -g \, dt = -\hat{\mathbf{k}} g t + \vec{v}_0 = -\hat{\mathbf{k}} g t + \hat{i} v_{0x} + \hat{j} v_{0y} + \hat{\mathbf{k}} v_{0z}$$

Ahora bien, existen sutilezas en este caso que debemos tener en cuenta. Por ejemplo considere la integral

$$\int dt \left( \vec{a} \times \frac{d^2 \vec{a}}{dt^2} \right) = \int dt \left( \frac{d}{dt} \left( \vec{a} \times \frac{d \vec{a}}{dt} \right) - \frac{d \vec{a}}{dt} \times \frac{d \vec{a}}{dt} \right) = \int dt \frac{d}{dt} \left( \vec{a} \times \frac{d \vec{a}}{dt} \right) = \vec{a} \times \frac{d \vec{a}}{dt} + \vec{c}$$

Pero en general los casos quedan resueltos integrando componente a componente con la ayuda de la notación de índices

$$\int dt \left( \vec{a} \times \vec{b} \right) = \left[ \int dt \left( \varepsilon^{ijk} a_j b_k \right) \right] |\mathbf{e}_i\rangle$$

Quizá uno de los problemas que ilustra mejor esta situación es el movimiento bajo fuerzas centrales. La Ley de Gravitación de Newton nos dice que

$$\sum F = m \vec{a} = m \frac{d \vec{v}}{dt} = m G \frac{M}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r \implies \frac{d \vec{v}}{dt} = G \frac{M}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

Es costumbre definir la *velocidad aerolar*,  $\vec{v}_A$ , como el área barrida por el radio vector posición,  $\vec{r}(t)$  que describe la trayectoria de la partícula

$$2\vec{v}_A = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = r \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d(r \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = r \hat{\mathbf{u}}_r \times \left( \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) = r \hat{\mathbf{u}}_r \times r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt}$$

Nótese que si  $\vec{c}$  es un vector constante

$$\frac{d}{dt} \left( \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) = 0 \implies \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \vec{c} \implies 2\vec{v}_A = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \text{const}$$

con lo cual

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{v}_A) = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{v}_A = G \frac{M}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r \times \vec{v}_A = \frac{MG}{2} \left\{ \hat{\mathbf{u}}_r \times \left( \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) \right\}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \times \vec{v}_A) = \frac{MG}{2} \left\{ \left( \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) \hat{\mathbf{u}}_r - (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right\} = \frac{MG}{2} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt}$$

integrando

$$\vec{v} \times \vec{v}_A = \frac{MG}{2} \hat{\mathbf{u}}_r + \vec{p}$$

donde  $\vec{p}$  es un vector arbitrario de constante de integración. Finalmente nos damos cuenta que

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}_A) = r \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \left( \frac{MG}{2} \hat{\mathbf{u}}_r + \vec{p} \right) = \frac{MG}{2} r + rp \cos \theta$$

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}_A) = \varepsilon^{ijk} r_i v_j v_{Ak} \equiv \vec{v}_A \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A = v_A^2$$

y entonces

$$v_A^2 = \frac{MG}{2} r + rp \cos \theta \implies r = \frac{v_A^2}{\frac{MG}{2} + p \cos \theta} \equiv \frac{\frac{2v_A^2}{MG}}{1 + \frac{2p}{MG} \cos \theta}$$

que constituye la ecuación de una cónica.

### 6.1.2. Integrales de línea

Ahora nos detendremos con más cuidado en integrales que también ya hemos utilizado, pero muy rápidamente. Así tendremos por delante algunos objetos del siguiente tenor:

$$\int_C \phi \, d\vec{r}, \quad \int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} \quad \text{y} \quad \int_C \vec{V} \times d\vec{r}$$

Este tipo de objetos se conoce como integrales de línea y requieren la especificación de la curva,  $C$ , (la trayectoria) a lo largo de la cual se lleva la integración. Es clara la importancia de esa trayectoria

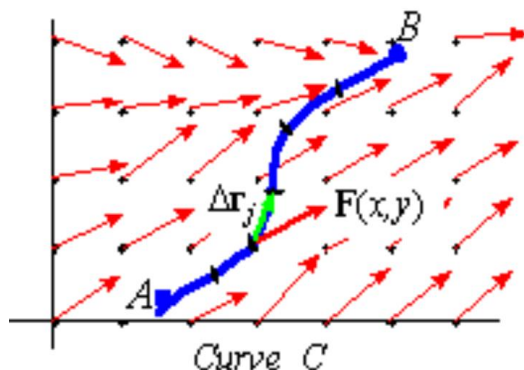


Figura 9: Trayectorias de integración y campos vectoriales

para la integración de los campos por cuanto encontrarán expresiones del campo vectorial que puebla la región a través de la cual se integra. Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración.

Así para integrar un campo escalar  $\phi = \phi(\vec{r})$  en coordenadas cartesianas, tendremos que

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) \, d\vec{r} &= \int_C \phi(x, y, z) \left( dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \right) \\ &= \hat{i} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) \, dx + \hat{j} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) \, dy + \hat{k} \int_C \phi(x(z), y(z), z) \, dz \end{aligned}$$

tal y como indicamos arriba, las tres integrales se podrán realizar si conocemos, en cada caso, la expresión del integrando en término de la variable de integración. Esa es la razón por la cual hay que especificar la curva  $C$  que define la trayectoria de integración. Esta define esa funcionalidad.

### 6.1.3. Integrales de Superficie

Otros objetos que ya nos hemos encontrado son las integrales de superficie y las hemos encontrado cuando evaluamos el flujo de un campo vectorial y lo relacionamos con la divergencia. Así interpretamos que objetos

$$\iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} \equiv \iint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s \, dS = \iint_s a_{\hat{n}} \, dS$$

representaban el flujo de las líneas de campo a través del diferencial de superficie  $d\vec{S}$ . Es costumbre que se separen el módulo,  $dS$ , de la dirección y el sentido,  $\hat{n}_s$  el cual es el vector normal (sentido positivo) a la superficie. Otra vez, las superficies podrán ser abiertas (cuando disponen de una curva que limita sus fronteras) y cerradas cuando no. Un círculo será una superficie abierta y una esfera

cerrada. Por convención supondremos que el vector normal a una superficie cerrada tendrá sentido positivo saliendo.

La utilización de integrales de superficie nos ha permitido definir, de manera invariante (independiente del sistema de coordenadas) las expresiones para los operadores diferenciales. Así hemos podido definir:

$$\tilde{\nabla}\phi \equiv \text{grad } \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_s \phi(x, y, z) \hat{n}_s dS$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \equiv \text{div } [\vec{a}] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint_s a_{\hat{n}} dS$$

$$\tilde{\nabla} \times \vec{a} \equiv \text{rot } [\vec{a}] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint d\vec{S} \times \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iiint \hat{n}_s \times \vec{a} d\tilde{S}$$

## 7. Campos Vectoriales y Teoremas integrales

En esta sección presentaremos un conjunto de teoremas que relacionan las variaciones de un campo vectorial con las fuentes que lo producen. En términos técnicos (matemáticos) resultan fundamentales cuando queremos convertir un tipo de integral (línea, superficie o volumen) en otra.

El primer teorema, el *Teorema de Gauss* permite expresar el valor de una integral de volumen,  $V$ , encerrado por una determinada superficie,  $S$ , (cerrada) en términos de una integral sobre esa superficie,  $S$ . El otro teorema importante es el *Teorema de Stokes*, el cual permite relacionar el valor de una integral de superficie con la integral de línea sobre la curva que delimita esa superficie.

### 7.1. Teorema de Gauss

#### 7.1.1. Presentación y demostración

La primera relación que presentaremos entre una integral de superficie de un campo vectorial,  $\vec{a}$ , y una de superficie de su derivada es el Teorema de Gauss el cual se expresa de forma vectorial como

$$\iiint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} \equiv \iiint_s \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS = \int_V \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} dV$$

donde  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  es el campo vectorial  $d\vec{S} \equiv \hat{n}_s dS$  es el diferencial de área y  $dV$  el diferencial de volumen.

Tal y como vimos en su oportunidad el término  $\tilde{\nabla} \cdot \vec{a}$  es interpretado como el flujo del campo  $\vec{a}$  por unidad de volumen, por lo tanto el lado derecho de la ecuación es la tasa de flujo neto que sale del volumen sobre el cual estamos integrando.

La demostración del Teorema de Gauss es como sigue. supongamos un volumen encerrado por una superficie convexa,  $S$ , como se muestra en la Figura 10 en los cuadrantes I, II y III. Supongamos además que orientamos el sistema de coordenada de tal forma que una línea paralela a uno de los ejes toca la superficie en dos puntos (Figura 10, cuadrante I). De este modo podemos trazar una

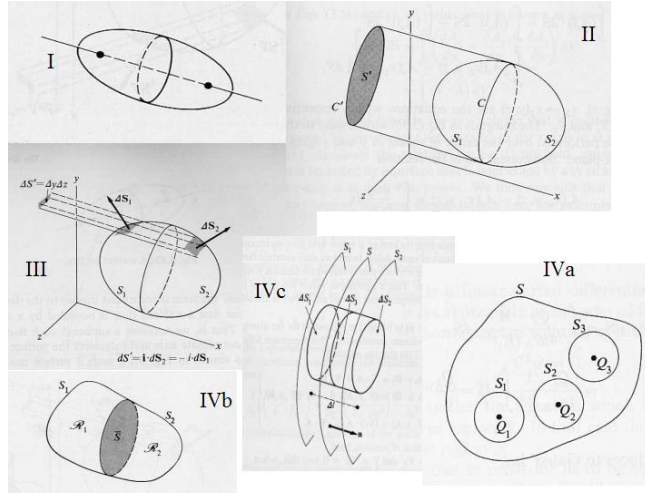


Figura 10: Teoremas de Gauss

superficie (perpendicular a esa línea) tal que divida la superficie,  $S$ , en dos superficies,  $S_1$ , y  $S_2$ , cada una de las cuales está bordeada por la curva,  $C$ , (Figura 10, cuadrante II).

Al evaluar la integral

$$\int_S a_x \hat{i} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} a_x \hat{i} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} a_x \hat{i} \cdot d\vec{S} = \iint_{S'} [a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z)] dS'$$

ya que las componentes  $x$  de los vectores normales a las dos superficies que contribuyen (Figura 10, cuadrante III) tienen signos opuestos

$$dS_{2x} = \hat{i} \cdot d\vec{S}_2 = -\hat{i} \cdot d\vec{S}_1 = -dS_{1x} = d y d z = d S'$$

Ahora bien, dado que

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z)}{x_2 - x_1} \Rightarrow a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx$$

con lo cual

$$\int_S a_x \hat{i} \cdot d\vec{S} = \iint_{S'} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx \right] d y d z = \int_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV$$

y equivalentemente al hacerlo en las direcciones  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , obtendremos

$$\int_S a_y \hat{j} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV \quad \text{y} \quad \int_S a_z \hat{k} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV$$

y finalmente hemos demostrado el Teorema de la divergencia o Teorema de Gauss

$$\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \equiv \iint_S \vec{a} \cdot \hat{n}_s dS = \int_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \int_V (\partial_i a^i) dV = \int_V \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} dV$$

### 7.1.2. Expresiones equivalentes para el Teorema de Gauss

Si bien la expresión estándar es la que hemos presentado, existen algunas variantes que se derivan de ella. Por ejemplo si consideramos un campo escalar,  $\phi(x, y, z)$ , el teorema de Gauss nos conduce a

$$\iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \phi(x, y, z) dV \quad \text{y} \quad \iint_s d\vec{S} \times \vec{B}(x, y, z) = \iiint_V \vec{\nabla} \times \vec{B}(x, y, z) dV$$

donde  $\vec{B}(x, y, z)$  es un campo vectorial.

Para comprobar la primera de estas dos relaciones consideramos un vector  $\vec{c}$  constante y construimos un campo vectorial

$$\vec{a}(x, y, z) = \vec{c}\phi(x, y, z) \quad \Rightarrow$$

$$\iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot \iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} = \vec{c} \cdot \iiint_V \vec{\nabla} \phi(x, y, z) dV$$

$$0 = \vec{c} \cdot \left[ \iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} - \iiint_V \vec{\nabla} \phi(x, y, z) dV \right]$$

es decir, para todo vector  $\vec{c}$  siempre se cumple que

$$\iint_s \phi(x, y, z) d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \phi(x, y, z) dV$$

Esa misma metodología se puede aplicar para demostrar la segunda relación si consideramos un campo vectorial  $\vec{a}(x, y, z) = \vec{c} \times \vec{B}(x, y, z)$ , con  $\vec{c}$  vector constante y se procede de una manera similar.

### 7.1.3. Ley de Gauss y Campo Eléctrico

La aplicación más emblemática del Teorema de Gauss lo constituyen el cálculo de la divergencia del campo eléctrico  $\vec{E}$  y su relación con las distribuciones de cargas existentes. Desde siempre sabemos que el campo eléctrico producido por una carga  $Q_i$  viene dado por

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i}; \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_i} \vec{E}_i \cdot d\vec{S}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

En definitiva la “deducción” de una de las ecuaciones de Maxwell. Si calculamos el flujo del campo eléctrico en una región sin cargas todas las líneas del campo  $\vec{E}(\vec{r})$  atraviesan el volumen: todas entran y todas salen. Sin embargo si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie,  $S$ , (ver Figura 10, cuadrante IVa) podemos encerrar cada una de las cargas con superficies esféricas  $S_i$ . Por lo tanto

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} + \sum_i \iint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i$$

Con lo cual hemos definido una superficie con “huecos” alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale. Por su parte, el campo eléctrico medido cada superficie esférica interior,  $S_i$  será

$$\vec{E}\Big|_{S_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i} + \vec{E}'$$

donde  $\vec{E}'$  es el campo de todas las otras cargas presentes en el volumen encerrado por  $S$ . Es claro que este campo  $\vec{E}'$  tiene flujo cero neto sobre cada esfera de superficie  $S_i$ . Por lo tanto

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \sum_i \iint_{S_i} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i} + \vec{E}' \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} dS_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

donde hemos utilizado que

$$\int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' dV_i = 0 = \sum_i \iint_{S_i} \vec{E}' \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} dS_i; \quad \hat{\mathbf{u}}_{r_i} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} = -1; \quad \text{y} \quad \iint_{S_i} dS_i = S_i = 4\pi r_i^2$$

Finalmente encontramos una de las Leyes de Maxwell si reescribimos la integral de superficie utilizando la Ley de Gauss

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

con lo cual

$$\int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \right) dV \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

#### 7.1.4. Discontinuidades y densidades superficiales de carga

Normalmente, siempre consideramos que los campos vectoriales  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$  son campos continuos (y, más aún, con todas sus derivadas continuas). Sin embargo, encontramos en la naturaleza situaciones en las cuales el campo varía mucho en una distancia muy corta (infinitesimal). En estas situaciones podemos simular esta rápida variación como una discontinuidad en el campo. Existe formas de aplicar el Teorema de Gauss para algunas situaciones en las cuales tratamos con campos discontinuos. La manera apropiada de tratar (derivadas e integrales de) funciones discontinuas es considerándolas no funciones sino distribuciones. Este tipo de tratamiento está fuera del alcance de este formulario y será considerado en otros cursos.

Supongamos el caso que ilustra la Figura 10, cuadrante IVb. Una región  $\mathcal{R}$  delimitada por una superficie  $S$ , dentro de la cual, una superficie de discontinuidad,  $\bar{S}$ , separa dos subregiones  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  a través de la cual un campo vectorial,  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ , es discontinuo. Ahora bien, el campo vectorial es continuo en las subregiones, por lo cual el flujo del campo atraviesa las superficies  $S_1$  y  $\bar{S}$  que delimitan el volumen  $V_1$  de la región  $\mathcal{R}_1$ . Entonces el Teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{V_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = \iint_{S_1} \vec{a} \cdot d\vec{S} + \iint_{\bar{S}} \vec{a}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \quad \text{y} \quad \int_{V_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = \iint_{S_2} \vec{a} \cdot d\vec{S} - \iint_{\bar{S}} \vec{a}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

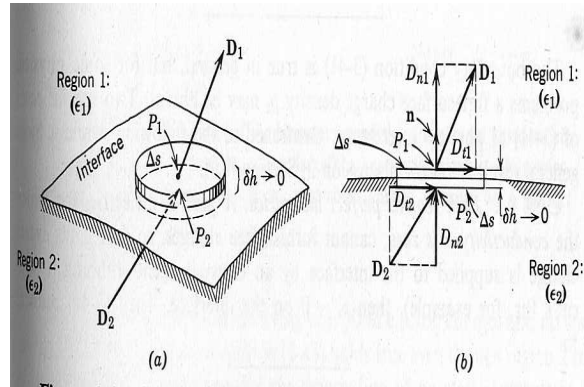


Figura 11: Discontinuidad del Vector Desplazamiento

donde  $\hat{n}_{\bar{S}}$  es el vector normal a la superficie,  $\bar{S}$ , de separación de las dos regiones. Adicionalmente hemos denotado,  $\vec{a}_+$  y  $\vec{a}_-$  el campo  $\vec{a}$  evaluado del lado de  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$ , respectivamente. Si ahora consideramos el teorema de Gauss en toda la región

$$\int_{V_1+V_2} \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV \equiv \int_{V_1} \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV + \int_{V_2} \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV$$

Claramente si el campo es continuo dentro de la región  $\mathcal{R}$  entonces nos queda la formulación estándar del Teorema de Gauss,

$$\int_{V_1+V_2} \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

por el contrario si el campo es discontinuo, entonces debe tomarse en cuenta la discontinuidad del campo y la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{V_1+V_2} \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} - \iint_{\bar{S}} (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot \hat{n}_{\bar{S}} \, d\bar{S}$$

con  $\hat{n}_{\bar{S}}$  el vector unitario, normal a la superficie  $\bar{S}$  y que apunta de  $\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$ . Es claro que la discontinuidad que cuenta es la de la componente del campo perpendicular a la superficie (ver Figura 11).

Este tipo de discontinuidad en campos irrotacionales es generada por la presencia de fuentes las cuales, en este caso son densidades superficiales de carga. Quizá el ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ , a través de una superficie,  $\bar{S}$ , que separa dos medios. Este caso se ilustra en la Figura 10, cuadrante IVc y en la Figura 11, sólo que en este último caso el vector normal está definido a la inversa: la región 2 corresponde a la región 1 de la Figura 10, cuadrante IVc. La ecuación de Maxwell correspondiente será

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{\bar{S}} = \sigma \quad \text{con } \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$



donde  $\hat{n}_S$  es el vector normal a la superficie (ver Figura 10, cuadrante IVc) y  $\sigma$  es la densidad superficial de carga en la superficie,  $S$ . Para comprobar esta relación construimos un volumen cilíndrico infinitesimal que encierra la superficie de discontinuidad, de tal forma que  $\Delta S_2$  corresponde con la “tapa” del cilindro y  $\Delta S_1$  con su “base” (Figura 10 cuadrante IVc). Adicionalmente, como  $\Delta l \sim 0$  no sólo podremos trabajar sin las integrales, el flujo a través de las “paredes” del cilindro será despreciable y  $\Delta S_2 \approx \Delta S_1$ , sino que además, al encerrar la discontinuidad no tomamos en cuenta la contribución de la superficie  $\Delta S_3$  (o  $\bar{S}$ , en el cuadrante IVb de la Figura 10). Así

$$\tilde{\nabla} \cdot \vec{D} \, dV = \vec{D}_2 \cdot \Delta \vec{S}_2 - \vec{D}_1 \cdot \Delta \vec{S}_1 \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{r}) (\Delta S_2 \Delta l) = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{S_2} \Delta S_2$$

con lo cual

$$\rho(\vec{r}) \Delta l \equiv \sigma = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{S_2}$$

### 7.1.5. Teoremas de Green

Cuando consideramos campos vectoriales muy particulares el Teorema de Gauss nos lleva a un par de identidades vectoriales conocidas como las *Identidades o Teoremas de Green*

Supongamos que tenemos dos campos escalares:  $\zeta(x, y, z)$  y  $\xi(x, y, z)$  entonces y con ellos construimos un campo vectorial

$$\begin{aligned} \vec{a}(x, y, z) = \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) &\Rightarrow \iint_s \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \tilde{\nabla} \cdot \vec{a} \, dV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_s \left( \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \right) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \tilde{\nabla} \cdot \left( \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \right) dV \end{aligned}$$

con lo cual arribamos a *primera identidad de Green, Primer Teorema de Green* o, *Teorema escalar de Green*:

$$\iint_s \left( \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \right) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left[ \zeta(x, y, z) \left( \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \right) + \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \cdot \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \right] dV$$

Si ahora, consideramos los siguientes campos vectoriales

$$\tilde{\nabla} \cdot \left( \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \right) = \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \cdot \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) + \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \xi(x, y, z)$$

y

$$\tilde{\nabla} \cdot \left( \xi(x, y, z) \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \right) = \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) \cdot \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) + \xi(x, y, z) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z)$$

restando ambas expresiones tendremos que

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \left\{ \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \right\} = \\ \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \end{aligned}$$

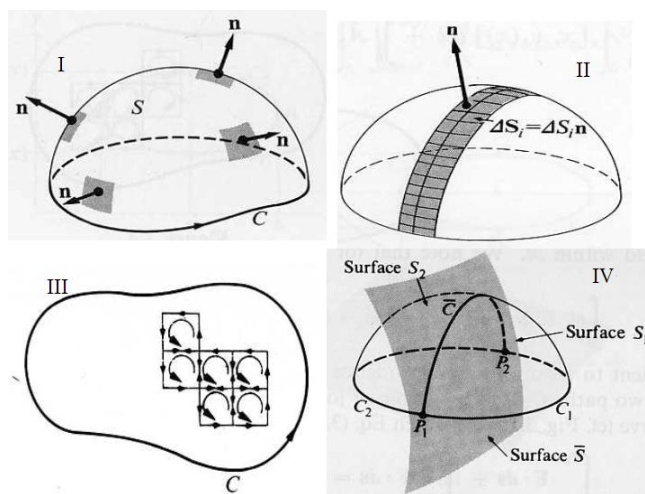


Figura 12: Teorema de Stokes

y al integrar sobre un volumen  $V$  tendremos la formulación del *Teorema de simétrico de Green*, la *segunda identidad (o teorema) de Green* o el *Teorema*

$$\iiint_V \left\{ \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \right\} dV = \iint_S \left\{ \zeta(x, y, z) \tilde{\nabla} \xi(x, y, z) - \xi(x, y, z) \tilde{\nabla} \zeta(x, y, z) \right\} \cdot d\vec{S}$$

La utilidad de estas relaciones las veremos en el desarrollo de la Teoría de Potencial en la sección 8.1 en la página 45

## 7.2. Teorema de Stokes

### 7.2.1. Presentación y demostración

El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial,  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ , a lo largo de una curva cerrada,  $C$ , con una integral del rotor del campo sobre la superficie encerrada por la curva,  $C$ . Es decir

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\tilde{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} \equiv \iint_S (\tilde{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \hat{n}_S dS$$

Tal y como hemos mencionado antes la superficie la define su vector normal, y éste lo define el “sentido” de circulación de la curva que bordea la superficie (ver Figura 12 cuadrantes I y III).

No haremos una demostración formal del Teorema de Stokes como lo hicimos para el Gauss. Nos convenceremos de que es correcta la relación a partir de algunas situaciones sencillas. Cualquier superficie la podremos dividir en pequeñas cuadrículas diferenciales, las cuales sumadas constituyen

la superficie (ver Figura 12 cuadrante II). Es fácil convencerse que la circulación<sup>3</sup> por le borde de una cuadrícula diferencial (por ejemplo en el plano  $x, y$ ) nos lleva a

$$\Gamma_{1234} = \oint_{1234} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_1 a_x(x, y) dx + \int_2 a_y(x, y) dy + \int_3 a_x(x, y) (-dx) + \int_4 a_y(x, y) (-dy)$$

donde hemos denotado la trayectoria a lo largo del perímetro de la cuadrícula por 1234 De la Figura 13 podemos intuir

$$\Gamma_{1234} = \int a_x(x_0, y_0) dx + \int a_y(x_0 + dx, y_0) dy + \int a_x(x_0, y_0 + dy) (-dx) + \int a_y(x_0, y_0) (-dy)$$

y de allí el desarrollo por Taylor que nos conduce a

$$\begin{aligned} \Gamma_{1234} &= \int a_x(x_0, y_0) dx + \int \left[ a_y(x_0, y_0) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{x=x_0} dx \right] dy - \int \left[ a_x(x_0, y_0) + \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{y=y_0} dy \right] dx \\ &\quad + \int a_y(x_0, y_0) dy \end{aligned}$$

$$\Gamma_{1234} = \int \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{x=x_0} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{y=y_0} \right) dx dy = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{a} \Big|_z dx dy \equiv \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

pero esto vale para todos los puntos  $(x_0, y_0)$  y se puede aplicar para las otras superficies con lo cual es fácil convencerse que esta técnica se puede utilizar para cada cuadrícula en las cuales hemos dividido la superficie (ver Figura 12 cuadrante II). Más aún las circulaciones a lo largo de los perímetros de las cuadrículas interiores se anulan (ver Figura 12 cuadrante III) y sólo sobrevive la circulación a lo largo del perímetro exterior de la superficie. Con ello

$$\sum_{\text{cuadrícula}} \vec{a} \cdot d\vec{r} \equiv \sum (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

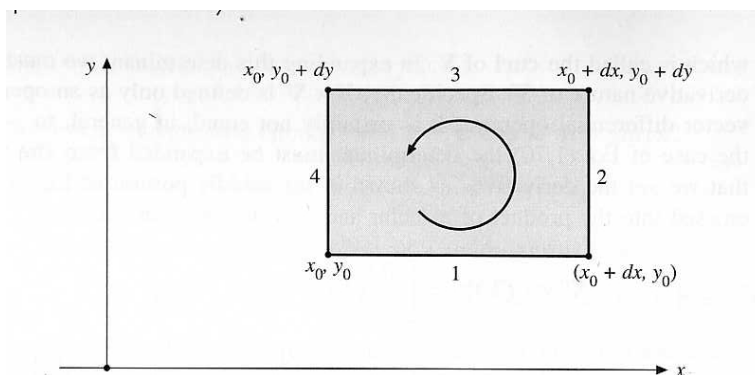
### 7.2.2. Expresiones equivalentes para el Teorema de Stokes

Del mismo modo que hicimos en la sección 7.1.2 con el Teorema de Gauss, podemos hacerlo para el Teorema de Stokes y tendremos

$$\oint \phi(x, y, z) d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \vec{\nabla} \phi(x, y, z) \quad \text{y} \quad \oint d\vec{r} \times \vec{B}(x, y, z) = \iint_S (d\vec{S} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}(x, y, z)$$

donde  $\phi(x, y, z)$  es un campo escalar y  $\vec{B}(x, y, z)$  un campo vectorial. Otra vez, la metodología para proceder a la demostración se fundamenta en considerar un par de campos vectoriales de la forma  $\vec{a}(x, y, z) = \phi(x, y, z) \vec{c}$  y  $\vec{b}(x, y, z) = \vec{c} \times \vec{B}(x, y, z)$  y desarrollar un álgebra vectorial mínima.

<sup>3</sup>Pueden consultar otro ejemplo de circulación en la sección 5.3.3

Figura 13: Circulación en una cuadrícula del plano  $x, y$ 

### 7.2.3. Teorema de Stokes y Fuerzas Conservativas

El teorema de Stokes nos permite identificar que campos vectoriales irrotacionales generan integrales de línea las cuales son independientes de la trayectoria. Esto es

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$$

con lo cual, lo que se está implicando es que toda trayectoria cerrada se puede fraccionar en dos trayectorias abiertas que se unen en los extremos, entonces

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0 = \int_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} \equiv \int_{P_1}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

curva  $C_1$                       curva  $C_2$

y lo que nos dice es que vamos de un punto (de corte de la curva cerrada)  $P_1$  a otro punto  $P_2$  por dos trayectorias distintas y la integral de línea es la misma. Más adelante veremos que a los campos vectoriales irrotacionales les está asociado un potencial tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \vec{F}(x, y, z) \propto \vec{\nabla}\phi(x, y, z)$$

### 7.2.4. Teorema de Stokes y discontinuidades del campo vectorial

Al igual que el Teorema de Gauss puede ser considerado para manejar funciones discontinuas, el Teorema de Stokes también tiene una expresión cuando se consideran campos discontinuos (continuo a trozos o continuos por segmentos)

Al igual que en el caso de Teorema de Gauss, consideremos el caso más simple el de un campo vectorial  $\vec{a}(x, y, z)$  que es discontinuo sobre una superficie,  $\bar{S}$ , que divide  $\mathcal{R}$  en dos subregiones  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  (ver otra vez 10, cuadrante IVb). En este caso la superficie  $S$ , será abierta y estará delimitada por una curva  $C_2$ . La intersección de las superficies  $S$  y  $\bar{S}$  será una curva  $\bar{C}$ , la cual dividirá a  $S$  en

dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  (ver Figura 12 cuadrante IV). Entonces, aplicando el Teorema de Stokes a la curva cerrada. Entonces

$$\oint_{C_1+\bar{C}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{curva } C_1}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{curva } \bar{C}}^{P_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

y

$$\oint_{C_2+\bar{C}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{curva } C_2}^{P_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{curva } \bar{C}}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

Ahora bien si las sumamos obtendremos

$$\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{curva } \bar{C} \text{ en } S_1}^{P_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{curva } \bar{C} \text{ en } S_2}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

la cual puede ser reescrita como

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} - \int_{\text{curva } \bar{C}}^{P_2} (\vec{a}|_{S_2} - \vec{a}|_{S_1}) \cdot d\vec{r}$$

donde hemos denotado  $\vec{a}|_{S_2}$  como el campo vectorial evaluado sobre la curva  $\bar{C}$  “del lado” de las superficie  $S_2$ . Es importante señalar que el término que incorpora la contribución de la discontinuidad del campo sólo encierra componentes tangenciales a la superficie. Esto es claro del producto escalar con el vector,  $d\vec{r}$ , tangente a la curva  $\bar{C}$  (y también a la superficie  $S$ ).

## 8. Teoría de Potencial

### 8.1. Potenciales escalares

Si un campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z)$  en una determinada región  $\mathcal{R}$  puede asociarse con un gradiente de un potencial tendremos que

$$\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \oint \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0$$

La ventaja que un campo derive de un potencial es, por un lado la simplicidad y la cantidad de información que sobre el campo tenemos: describimos la interacción por una función y no con tres (las componentes del campo) y sabremos que el campo es irrotacional y conservativo. Pero además la función que describe el campo es escalar, con lo cual es independiente del sistema de coordenadas.

Cualquiera de las afirmaciones implica las otras dos, con o cual podremos elegir cualquier de ellas para demostrar las otras dos. Veamos:

- un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi(x, y, z)) = 0 \\ -\oint \vec{\nabla}\phi(x, y, z) \cdot d\vec{r} = -\oint d\phi = \phi(x_0, y_0, z_0) - \phi(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la definición de diferencial total

$$d\phi = \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} dz = \vec{\nabla}\phi(x, y, z) \cdot d\vec{r}$$

- un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.

Un campo conservativo implica que el trabajo ( $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}$ ) es independiente de la trayectoria entre  $P_1$  y  $P_2$ . Por eso llamamos a la fuerza conservativa por cuanto se conserva la energía y por lo tanto, ésta depende únicamente de la posición

$$\begin{aligned} \oint \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 0 &\Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \\ &\Downarrow \\ \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = d\phi = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z) \cdot d\vec{r} &\Rightarrow \vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z) \end{aligned}$$

con lo cual hemos demostrado que el campo vectorial deriva de un potencial. El signo menos (-) es una convención tradicional del oficio de Físico y proviene de nuestra intuición de flujo de los acontecimientos: “El agua siempre fluye hacia abajo”.

Ahora bien, utilizando el Teorema de Stokes tendremos:

$$\vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z) \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = 0$$

es fácil demostrar que el campo también es irrotacional.

- un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es conservativo.

Otra vez, por el Teorema de Stokes si es irrotacional es conservativo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

y si es conservativo deriva de un potencial

$$\vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = d\phi = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F}(x, y, z) = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z)$$

En definitiva, si cualquiera de las condiciones se cumple: conservativo, irrotacional o potencial, las otras también se cumplirán.

## 8.2. Potenciales vectoriales y calibres

Al igual que derivamos un campo vectorial  $\vec{F}$  a partir de un potencial escalar  $\phi(x, y, z)$  y asociamos su existencia a su condición de irrotacionalidad,  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = 0$ , podemos pensar que un campo sin divergencia (*solenoidal* o *transverso*) conlleva a la existencia de un potencial *vectorial*. Esto es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(x, y, z) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z)$$

Claramente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \partial_i F^i = \partial_i \left( \varepsilon^{ijk} \partial_j A_k \right) = 0$$

El campo vectorial  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$  se conoce con el nombre de *potencial vectorial* del campo  $\vec{F}$ . Ahora bien, el campo solenoidal,  $\vec{F}$ , no queda unívocamente determinado a partir de su potencial vectorial. Existe una arbitrariedad de un campo escalar, llamado *de calibre*,  $\chi = \chi(x, y, z)$  (*gauge* en inglés) de forma tal que

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \left( \vec{A} + \vec{\nabla} \chi \right) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \chi \right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

de forma que varios potenciales vectoriales  $\vec{A}'$  y  $\vec{A}$  generan el mismo campo vectorial  $\vec{F}$ . Esta arbitrariedad nos permite particularizar el calibre según nos convenga. Existen varios calibres en el mercado, los cuales son utilizados según el problema físico al cual tratemos. Entre ellos podemos mencionar un par de ellos:

- **El calibre de Lorentz:**

Esta selección proviene de requerir que el campo de calibre satisfaga la ecuación una ecuación de onda

$$\vec{\nabla}^2 \chi(x, y, z, t) - a \frac{\partial^2 \chi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0$$

donde  $a$  es una constante. Nótese que hemos supuesto que el campo de calibre puede depender del tiempo. El calibre del Lorentz se escoge porque (entre otras cosas) permite que la solución a la ecuación de onda para el potencial vectorial

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(x, y, z, t) - a \frac{\partial^2 \vec{A}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0$$

quede unívocamente determinada

- **El calibre de Coulomb, de radiación o transverso:**

La selección de este calibre impone que el potencial vectorial  $\vec{A}(x, y, z, t)$  satisfaga la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}'(x, y, z, t) = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{A}(x, y, z, t) + \vec{\nabla} \chi(x, y, z, t) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \chi(x, y, z, t) = 0$$

El nombre de calibre de Coulomb, de radiación o transverso proviene de las consecuencias de su utilización en las ecuaciones de Maxwell.

Nótese que si el campo (y el calibre) es independiente del tiempo  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$  ambos calibres coinciden.

### 8.3. Teorema de Green y Potenciales

Si el rotor y la divergencia de un campo vectorial,  $\vec{F}$ , decente (continuo y continuamente diferenciable) están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada,  $S$ , y las componentes del campo normales a esa superficie,  $\hat{n}_S \cdot \vec{F}$ , también se conocen, entonces el Teorema de Green nos garantiza que ese campo,  $\vec{F}$ , que cumple con esas condiciones es único.

Esa demostración procede así. Supongamos que existe otro campo vectorial que cumple con las mismas condiciones que el campo  $\vec{F}$ . Esto es

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G} \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{G} \\ \hat{n}_S \cdot \vec{F} = \hat{n}_S \cdot \vec{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{H} = \vec{F} - \vec{G} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \\ \hat{n}_S \cdot \vec{H} = 0 \end{array} \right.$$

como  $\vec{H}$  es irrotacional entonces

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = \vec{\nabla} \phi(x, y, z) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi(x, y, z) = 0$$

, y el Teorema de Green nos garantiza que

$$\oint \phi \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{S} = \iint_{\bar{S}} \phi (\vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n}_{\bar{S}}) d\bar{S} = \iiint_V [\phi (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi) + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi] dV$$

con lo cual

$$\iint_{\bar{S}} \phi (\vec{\nabla} \phi \cdot \hat{n}_{\bar{S}}) d\bar{S} = \iint_{\bar{S}} \phi (\vec{H} \cdot \hat{n}_{\bar{S}}) d\bar{S} = \iiint_V [\vec{H} \cdot \vec{H}] dV \Rightarrow \vec{H} = 0$$

de donde se deduce que  $\vec{F} = \vec{G}$  es decir, que el campo,  $\vec{F}$ , es único.

### 8.4. Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz afirma que todo campo vectorial,  $\vec{F}$ , continuo, y continuamente diferenciable (al menos a trozos) y, regular en infinito se puede expresar como una suma de dos "componentes", una *longitudinal* o *irrotacional*,  $\vec{F}_l$ , y otra *transversa* o *solenoidal*,  $\vec{F}_t$ . Esto es

$$\vec{F} = \vec{F}_l + \vec{F}_t \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{F}_l = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_t = 0 \end{array} \right.$$

En general dado que el campo,  $\vec{F}$ , puede ser discontinuo, tendremos que suponer que

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \rho(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{J}(\vec{r}) \end{array} \right\} \text{ y como } \vec{F} = \vec{F}_l + \vec{F}_t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}_l + \vec{F}_t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_l = \rho(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{F}_l + \vec{F}_t) = \vec{\nabla} \times \vec{F}_t = \vec{J}(\vec{r}) \end{array} \right.$$



dato que  $\vec{\nabla} \cdot (\circ)$  y  $\vec{\nabla} \times (\circ)$  son lineales. Esta separación del campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}_l + \vec{F}_t$  es completamente general y siempre puede hacerse para cualquier campo vectorial.

Supondremos además, que la solución a la ecuación de Poisson  $\vec{\nabla}^2 \phi(x, y, z) = -\rho(x, y, z)$  existe y es única<sup>4</sup>.

Tendremos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_l = 0 \Rightarrow \vec{F}_l = -\vec{\nabla} \phi(x, y, z) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_l = -\vec{\nabla}^2 \phi(x, y, z) = \rho(\vec{r})$$

y la solución existe y es única. Es decir, podemos expresar de manera unívoca al campo vectorial,  $\vec{F}$ , (a través de su “componente” longitudinal  $\vec{F}_l$ ) en términos de un campo escalar (a función potencial)  $\phi(x, y, z)$ . Por otra parte

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_t = 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}_t = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{J}(\vec{r})$$

La cual al seleccionar el calibre de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  se convierte en Es importante señalar que el campo,  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ , solución a la ecuación

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \partial^i \partial_i \vec{A} = -\vec{J}(\vec{r}) \Rightarrow \partial^i \partial_i A^k = -J^k(\vec{r}) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla}^2 A_x = -J_x(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}^2 A_y = -J_y(\vec{r}) \\ \vec{\nabla}^2 A_z = -J_z(\vec{r}) \end{cases}$$

Una vez más nos topamos con la solución a la ecuación de Poisson, esta vez para cada componente. Esto se cumple siempre, porque hemos supuesto que la solución para la ecuación de Poisson existe y es única.

Un corolario del Teorema de Helmholtz que un campo vectorial queda unívocamente determinado si conocemos su rotor y su divergencia.

## Referencias

- [1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) QA300 A66C3 1972
- [2] Arfken, G. B., Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [3] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analysis** (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [4] Dennerly, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

---

<sup>4</sup>Esta suposición es indispensable pero es muy fuerte. Las condiciones sobre el potencial  $\phi(x, y, z)$  que la implican serán consideradas en otros cursos de Métodos Matemáticos. En este curso, supondremos que existe y es única

- [5] Gel'fand, I.M. (1961) **Lectures on Linear Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).
- [6] Knisley, J. (2001) <http://math.etsu.edu/MultiCalc/>
- [7] Lovelock, D, y Rund, H. (1975) **Tensors, Differential Forms & Variational Principles** (*John Wiley Interscience, Nueva York*).
- [8] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)
- [9] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)