Abril 2008

Nombre____

1. Hemos definido como la posición, $\vec{R}$, del centro de masa para un sistema de N partículas como

$$\vec{R} = \frac{\Sigma_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\Sigma_{j=1}^{N} m_j}$$

donde $\vec{r}_i$ corresponde con la posición de la $i-$ésima partícula

Determine la posición del centro de masa para un sistema de tres masas, $m_i = 1{,}2{,}3$, colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $l = 2$ (3 ptos)

Solución: Al colocar el origen de coordenadas en uno de los vértices y uno de los ejes de coordenadas sobre uno de los lados. Entonces,

$$\vec{R} = \frac{\Sigma_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i}{\Sigma_{j=1}^{3} m_j} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_1\vec{r}_1}{M_T} = \frac{1 \cdot 2\hat{\imath} + 3 \cdot \left(\hat{\imath} + \sqrt{3}\hat{\jmath}\right)}{6} = \frac{5}{6}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$$

2. Dada una base ortonormal $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ y los siguientes vectores

$$\vec{a} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \vec{b} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \vec{c} = \hat{\imath} - \hat{k}$$

   a) Comprobar si $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ forman base (2 ptos)

Solución: Para que los vectores formen base tienen que ser linealmente independientes. Esto es $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ con lo cual

$$\alpha\left(3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \beta\left(3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}\right) + \gamma\left(\hat{\imath} - \hat{k}\right) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{array}\right.$$

y al resolver esl sistema se obtiene $\alpha = \beta = \gamma = 0$ con lo cual se demuestra que son linealmente independientes

Otra manera de resolverlo es mostrar que $\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \neq 0$ y efectivamente

$$\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

   b) Si $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ forma base, exprese $\vec{d} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ $\quad \vec{e} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ $\quad \vec{f} = \vec{a} \times \vec{b}$ en término de esa base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. De lo contrario, construya una base como $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ y exprese los vectores $\{\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\}$ en término de esa nueva base (4 ptos)

Solución: Como forman base expresamos los vectores en término esos términos. Esto es

$$\hat{\imath}+2\hat{\jmath}=\alpha\left(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)+\beta\left(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)+\gamma\left(\hat{\imath}-\hat{k}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\alpha+3\beta+\gamma=1\\ 2\alpha-2\beta=2\\ \alpha+\beta-\gamma=0\end{array}\right.$$

resolviendo tendremos que $\vec{d}=\frac{5}{8}\vec{a}-\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$. Seguidamente

$$3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}=\alpha\left(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)+\beta\left(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)+\gamma\left(\hat{\imath}-\hat{k}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\alpha+3\beta+\gamma=3\\ 2\alpha-2\beta=-2\\ \alpha+\beta-\gamma=0\end{array}\right.$$

resolviendo tendremos que $\vec{e}=-\frac{1}{8}\vec{a}+\frac{7}{8}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}$
Ahora bien

$$\vec{a}\times\vec{b}\equiv\left(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)\times\left(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)\equiv\left|\begin{array}{ccc}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\ 3&2&1\\ 3&-2&1\end{array}\right|=4\hat{\imath}-12\hat{k}$$

con lo cual

$$4\hat{\imath}-12\hat{k}=\alpha\left(3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)+\beta\left(3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}\right)+\gamma\left(\hat{\imath}-\hat{k}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3\alpha+3\beta+\gamma=4\\ 2\alpha-2\beta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=-12\end{array}\right.$$

y finalmente $\vec{f}=\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{a}-\vec{b}+10\vec{c}$

3. Utilizando la notación de índices demostrar que para cualquier trío de vectores $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ se cumple que $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$ (3 ptos)

Solución: En notación de índices

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\epsilon^{lmi}a_m\epsilon_{ijk}b^jc^k+\epsilon^{lmi}b_m\epsilon_{ijk}c^ja^k+\epsilon^{lmi}c_m\epsilon_{ijk}a^jb^k$$

con lo cual arreglando

$$\epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}a_mb^jc^k+\epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}b_mc^ja^k+\epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk}c_ma^jb^k=$$

$$\left(\delta^l_j\delta^m_k-\delta^m_j\delta^l_k\right)a_mb^jc^k+\left(\delta^l_j\delta^m_k-\delta^m_j\delta^l_k\right)b_mc^ja^k+\left(\delta^l_j\delta^m_k-\delta^m_j\delta^l_k\right)c_ma^jb^k=$$

y ahora desarrollando los productos de δs, nos queda

$$\left(\underbrace{a_kb^lc^k}_{I}\underbrace{-a_kb^kc^l}_{II}\right)+\left(\underbrace{b_kc^la^k}_{II}\underbrace{-b_kc^ka^l}_{III}\right)+\left(\underbrace{c_ka^lb^k}_{III}\underbrace{-c_ka^kb^l}_{I}\right)=0$$

e indentificando término a término, notamos que se anula.

4. Una partícula se mueve a lo largo de una curva descrita por

$$x(t) = 3t^2 \quad y(t) = 4t^3 - t \quad z(t) = t$$

   a) Encuentre las expresiones para los vectores: posición, velocidad y aceleración de esa partícula (3 ptos)

Solución:

$$\vec{r}(t) = 3t^2\hat{\imath} + (4t^3 - t)\hat{\jmath} + t\hat{k} \quad \vec{v} = 6t\hat{\imath} + (12t^2 - 1)\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \vec{a} = 6\hat{\imath} + 24t\hat{\jmath}$$

   b) Encuentre las expresiones, más generales, de los vectores tangentes y perpendiculares a todo a punto de la trayectoria de la partícula (3 ptos)

Solución: Vector tangente a todo punto de la trayectoria es el vector velocidad

$$\vec{v} = 6t\hat{\imath} + (12t^2 - 1)\hat{\jmath} + \hat{k}$$

El perpendicular a todo punto, será un vector $\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$, tal que

$$(6t\hat{\imath} + (12t^2 - 1)\hat{\jmath} + \hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = 6tb_x + (12t^2 - 1)b_y + b_z = 0$$

con lo cual

$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} - (6tb_x + (12t^2 - 1)b_y)\hat{k}$$

5. El campo de fuerzas del oscilador anarmónico anisótropo bidimensional se escribe como

$$\vec{F} = -k_1x^2\hat{\imath} + k_2y\hat{\jmath} \tag{1}$$

Encuentre el trabajo realizado, $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}$ a lo largo de las siguientes trayectorias

   a) $(1,1) \rightarrow (4,1) \rightarrow (4,4)$

Solución:

$$\int_{(1,1)}^{(4,1)} (\hat{\imath}\mathrm{d}x) \cdot (-k_1x^2\hat{\imath} + k_2\hat{\jmath}) + \int_{(4,1)}^{(4,4)} (\hat{\jmath}\mathrm{d}y) \cdot (-k_1 16\hat{\imath} + k_2y\hat{\jmath}) = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}$$

   b) $(1,1) \rightarrow (1,4) \rightarrow (4,4)$

Solución:

$$\int_{(1,1)}^{(1,4)} (\hat{\jmath}\mathrm{d}y) \cdot (-k_1\hat{\imath} + k_2y\hat{\jmath}) + \int_{(1,4)}^{(4,4)} (\hat{\imath}\mathrm{d}x) \cdot (-k_1x^2\hat{\imath} + k_2 4\hat{\jmath}) = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}$$

   c) $(1,1) \rightarrow (4,4)$ para $x = y$

Solución:

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} (\hat{\imath}\mathrm{d}x + \hat{\jmath}\mathrm{d}x) \cdot (-k_1x^2\hat{\imath} + k_2x\hat{\jmath}) = \int_{(1,1)}^{(4,4)} (-k_1x^2 + k_2x)\mathrm{d}x = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}$$

(4 ptos)