Nombre____

1. Muestre que el conjunto de todas las matrices 2×2, complejas (con elementos complejos) y determinante $+1$ forman grupo respecto al multiplicación de matrices. Ese grupo se conoce con el nombre de SL(2) (3ptos)

Solución: si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son dos matrices complejas entonces, su multiplicación será

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 \\ B^2_1 & B^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^1_1 & C^1_2 \\ C^2_1 & C^2_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^i_j B^j_k = C^i_k$$

y $\det(\mathbb{B}) = ||\mathbb{B}|| = 1 \Rightarrow B^1_1 B^2_2 - B^1_2 B^2_1 = 1$

- **Cerradez:** es claro que $C^i_k = A^i_j B^j_k$ será también un número complejo y también que $\det(\mathbb{C}) = \det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}) = 1$ ya que $\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{B}) = 1$
- **Asociativa:** Lo es porque la multiplicación de matrices lo cumple
- **Elemento Neutro:** La matriz 2×2 unidad tiene determinante 1
- **Elemento Inverso:** Como $\det(\mathbb{B}) = 1 \neq 0$, entonces siempre existirá el inverso para cada matriz 2×2, compleja y con determinante $+1$

2. Dos dimensiones, la relación entre coordenadas cartesianas y parabólicas se puede escribir como $x = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad y = uv$

   a) Determine la base ortonormal de vectores, $|\mathbf{u}_i\rangle = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$, correspondientes a este sistema de coordenadas y expresión para los vectores cartesianos $|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle$ en términos de esta nueva base (4 ptos)

Solución: La base será

$$\left\{ |\mathbf{u}_1\rangle = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad |\mathbf{u}_2\rangle = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})}{\partial u} & = & u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} \\ \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})}{\partial v} & = & -v\hat{\imath} + u\hat{\jmath} \end{array} \right.$$

con lo cual la base queda como

$$\left\{ |\mathbf{u}_1\rangle = \hat{\mathbf{u}} = \frac{u\hat{\imath} + v\hat{\jmath}}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad |\mathbf{u}_2\rangle = \hat{\mathbf{v}} = \frac{-v\hat{\imath} + u\hat{\jmath}}{\sqrt{u^2+v^2}} \right\}$$

y equivalentemente

$$\hat{\imath} = \frac{u\hat{\mathbf{u}} - v\hat{\mathbf{v}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad \hat{\jmath} = \frac{v\hat{\mathbf{u}} + u\hat{\mathbf{v}}}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

   b) Determine la expresión para el tensor métrico g_{ij} y el elemento de línea $\mathrm{d}s^2$ en estas coordenadas (2 ptos)

Solución: Como es una base ortonormal, el tensor métrico es diagonal. Esto es

$$g_{ii} = h_i^2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}\right|^2 \Rightarrow g_{uu} = h_u^2 = g_{vv} = h_v^2 = u^2 + v^2$$

y el elemento de línea

$$\mathrm{d}s^2 = g_{uu}\mathrm{d}u^2 + g_{vv}\mathrm{d}v^2 = (u^2 + v^2)\left(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2\right)$$

c) Dado un vector en coordenadas polares de la forma $|\mathbf{a}\rangle = 3\,|\mathbf{u}_r\rangle + 2\,|\mathbf{u}_\theta\rangle$. Encuentre su expresión en la base correspondientes a las coordenadas parabólicas (2 ptos)

Solución:

$$|\mathbf{a}\rangle = 3\,|\mathbf{u}_r\rangle + 2\,|\mathbf{u}_\theta\rangle = 3(\cos\theta\hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\theta\hat{\jmath}) + 2(-\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$$

$$|\mathbf{a}\rangle = 3\left(\frac{x\hat{\imath}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 2\left(\frac{-y\hat{\imath}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$|\mathbf{a}\rangle = \frac{(3x-2y)\hat{\imath} + (2x+3y)\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(3\,u^2 - 3\,v^2 - 4\,uv)}{v^2+u^2}\hat{\imath} + 2\,\frac{(u^2 - v^2 + 3\,uv)}{v^2+u^2}\hat{\jmath}$$

para que finalmente

$$|\mathbf{a}\rangle = \vec{a} = \frac{(5\,u^3 - 5\,v^2u + 2\,u^2v)\,\hat{\mathbf{u}}}{(v^2+u^2)^{3/2}} + \frac{(-u^2v + v^3 + 10\,v^2u)\,\hat{\mathbf{v}}}{(v^2+u^2)^{3/2}}$$

d) Dado un tensor cartesiano de la forma $T^i_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Encuentre su expresión en coordenadas parabólicas (3ptos)

Solución: Sólo tenemos que transformar las componentes del tensor cartesiano a coordenadas parabóliclas. Esto es

$$\tilde{T}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j}T^k_m \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} \end{pmatrix}$$

desarrollando las matrices de transformación tendremos, primeramente que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^1}{\partial x^2} \\ \\ \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \tilde{x}^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} \\ -\frac{v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\tilde{T}^i_j = \begin{pmatrix} -\frac{-v^2-3\,uv+u^2}{u^2+v^2} & \frac{v(2\,u-3\,v)}{u^2+v^2} \\ \frac{u(2\,v+3\,u)}{u^2+v^2} & \frac{-v^2-3\,uv+u^2}{u^2+v^2} \end{pmatrix}$$

3. Considere un espacio pseudoeuclidiano bidimensional descrito por un tensor métrico

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y, como siempre } \eta^{\alpha\beta}\eta_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde los índices griegos toman valores 0 y 1. Considere la siguiente transformación de coordenadas

$$x^0 = \frac{(\tilde{x}^0)^2 - (\tilde{x}^1)^2}{2} \qquad x^1 = \tilde{x}^0\tilde{x}^1$$

Si un tensor en el sistema de coordenadas x^α se expresa como $T^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, con $\alpha, \beta = 0, 1$ Encuentre la expresión del tensor $\tilde{T}^{\alpha\beta}$ (2ptos)

Solución:

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\lambda}\tilde{T}^\beta_\lambda = \begin{pmatrix} -\frac{-{x^1}^2-3\,x^0x^1+{x^0}^2}{{x^0}^2+{x^1}^2} & \frac{x^1\left(2\,x^0-3\,x^1\right)}{{x^0}^2+{x^1}^2} \\ \frac{x^0\left(2\,x^1+3\,x^0\right)}{{x^0}^2+{x^1}^2} & \frac{-{x^1}^2-3\,x^0x^1+{x^0}^2}{{x^0}^2+{x^1}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{-{x^1}^2-3\,x^0x^1+{x^0}^2}{{x^0}^2+{x^1}^2} & \frac{x^1\left(2\,x^0-3\,x^1\right)}{{x^0}^2+{x^1}^2} \\ -\frac{x^0\left(2\,x^1+3\,x^0\right)}{{x^0}^2+{x^1}^2} & \frac{-{x^1}^2-3\,x^0x^1+{x^0}^2}{{x^0}^2+{x^1}^2} \end{pmatrix}$$

4. Los polinomios de Legendre se pueden generar a partir de la Fórmula de Rodrígues

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, ... \quad \text{con } \langle \mathbf{P}_n | \mathbf{P}_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x$$

como definición de producto interno y $P_0(x) = 1$.

a) Muestre que $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ forman base para el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2 (2 ptos)

Solución: Los Polinomios de Legendre son $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\} \equiv \left\{1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right\}$ y obviamente son linealmente independientes ya que son polinomios de pontencias diferentes

$$C_0 + C_1 x + C_2\left(3x^2-1\right) = 0 \quad \Rightarrow C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

b) Encuentre la mínima distancia entre $A(x) = 3x^2+2x+3$ y el subespacio generado por $\{P_0(x), P_1(x)\}$ (3ptos)

Solución: La distancia (genérica) entre $A(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y el plano expandido por $\{P_0(x), P_1(x)\}$, en general, será la distancia entre un vector genérico residente en el plano expandido por $\{P_0(x), P_1(x)\}$, i.e.

$$\left|\mathbf{v}_{\{P_0(x),P_1(x)\}}\right\rangle = |\mathbf{v}\rangle = C^0\left|\mathbf{P_0}\right\rangle + C^1\left|\mathbf{P_1}\right\rangle \leftrightarrow v(x) = C^0 + C^1 x$$

y el vector $|\mathbf{A}\rangle$. Con lo cual

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\, ;\, |\mathbf{A}\rangle\right) = \sqrt{\left\|\mathbf{v}-\mathbf{A}\right\|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{v}-\mathbf{A}|\mathbf{v}-\mathbf{A}\rangle}$$

y esto es

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\, ;\, |\mathbf{A}\rangle\right) = \sqrt{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ \left(3x^2 - (C^1-2)x - C^0 + 3\right)^2}$$

vale decir,

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\, ;\, |\mathbf{A}\rangle\right) = \frac{1}{15}\sqrt{8160 - 3600C^0 + 150(C^1)^2 - 600C^1 + 450(C^0)^2}$$

La distancia mínima será aquella "medida" a lo largo de la perpendicular entre el plano expandido por $\{P_0(x), P_1(x)\}$ y el vector $|\mathbf{A}\rangle$. Obviamente, será la componente de $A(x)$ en la dirección de $P_2(x)$, porque la base $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ es ortonormal. Esto es:

$$\langle \mathbf{P}_2|\mathbf{A}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\left(3x^2+2x+3\right)\frac{(3x^2-1)}{2} = \frac{4}{5}$$