Nombre____

Dados los siguientes vectores de un espacio vectorial de polinimos $\{1, x, x^2\}$ con un producto interno definido por $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x f(x) g(x)$

1. Muestre que los vectores $\{1, x, x^2\}$ forman base para ese espacio de polinomios de grado ≤ 2 (2 ptos)

Solución: Los polinomios $\{1, x, x^2\}$ obviamente son linealmente independientes ya que son polinomios de potencias diferentes

$$C_0 + C_1 x + C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_0 = C_1 = C_2 = 0$$

2. Encuentre la base ortonormal $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ asociada a ese espacio con ese producto interno (4 ptos)

Solución: Para encontrar la base ortonormal $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ asociada a $\{1, x, x^2\}$, procedemos con el método de ortogonalización de Gram-Schmidt, apoyado en la definici'on de producto interno $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x f(x) g(x)$. Esto es

$$|\mathbf{P}_0\rangle \equiv |\mathbf{1}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |\mathbf{P}_1\rangle \equiv |\mathbf{x}\rangle - \frac{\langle \mathbf{1} \, |\mathbf{P}_1\rangle}{\langle \mathbf{P}_1 \, |\mathbf{P}_1\rangle} |\mathbf{1}\rangle = \frac{x\sqrt{6}}{2},$$

$$|\mathbf{P}_2\rangle \equiv \left|\mathbf{x^2}\right\rangle - \frac{\langle \mathbf{x^2} \, |\mathbf{P}_1\rangle}{\langle \mathbf{P}_1 \, |\mathbf{P}_1\rangle} |\mathbf{P}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{x^2} \, |\mathbf{P}_0\rangle}{\langle \mathbf{P}_0 \, |\mathbf{P}_0\rangle} |\mathbf{P}_0\rangle = \frac{(3x^2 - 1)\sqrt{10}}{4}$$

con la cual la base ortonormal, para esa definici'on de producto interno, queda determinada como

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\} \equiv \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{x\sqrt{6}}{2}, \frac{(3x^2 - 1)\sqrt{10}}{4} \right\}$$

3. Dado el siguiente vector $|\mathbf{a}\rangle = 2 + 3x + 2x^2$ encuentre su expresión en esa nueva base ortonormal $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ (3 ptos)

Solución: Para expresar el vector $|a\rangle$ en la base ortonormal encontramos las nuevas componentes $\{C^0, C^1, C^2\}$ proyectando a lo largo de los vectores base $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$. Esto es

$$|\mathbf{a}\rangle = 2 + 3x + 2x^2 \equiv C^0 |\mathbf{P}_0\rangle + C^1 |\mathbf{P}_1\rangle + C^2 |\mathbf{P}_2\rangle$$

entonces

$$C^0 = \langle \mathbf{P}_0 | \mathbf{a} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(2 + 3x + 2x^2\right) \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2};$$

$$C^1 = \langle \mathbf{P}_1 | \mathbf{a} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; \frac{x\sqrt{6}}{2} \; \left(2 + 3x + 2x^2\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$C^2 = \langle \mathbf{P}_2 | \mathbf{a} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \; \left(\frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4} \right) \left(2 + 3x + 2x^2\right) = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

entonces se tiene que

$$|\mathbf{a}\rangle = 2 + 3x + 2x^2 \equiv 4\sqrt{2}\,|\mathbf{P}_0\rangle + \frac{2\sqrt{6}}{3}\,|\mathbf{P}_1\rangle + \frac{2\sqrt{10}}{5}\,|\mathbf{P}_2\rangle$$

4. Considere el producto tensorial de esos espacios vectoriales de polinomios: $\mathbb{P}^* \bigotimes \mathbb{P}$. Las componentes de un tensor en la base $\{1, x, x^2\} \bigotimes \{1, x, x^2\}$ son

$$T^i_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre las componentes de ese tensor en la base ortonormal (6ptos)

Solución: Es claro que este tensor expresado en dos bases distintas es

$$\mathbb{T} = T^i_j\,|\mathbf{e}_i\rangle \otimes \left\langle \mathbf{e}^j \right| \equiv T^i_j \left|\, \mathbf{e}_i;\; \mathbf{e}^j \right\rangle = \tilde{T}^i_j\,|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \otimes \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^j \right| \equiv \tilde{T}^i_j \left|\, \tilde{\mathbf{e}}_i;\; \tilde{\mathbf{e}}^j \right\rangle$$

donde

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \left\{1, x, x^2\right\} \;;\quad \{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\} = \{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\} \equiv \left\{1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right\}$$

Entonces

$$\tilde{T}^i_j = T^k_m \left\langle \, \tilde{\mathbf{e}}_j;\; \tilde{\mathbf{e}}^i \right| \mathbf{e}_k;\; \mathbf{e}^m \right\rangle = \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i | \mathbf{e}_k \right\rangle T^k_m \left\langle \mathbf{e}^m | \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle$$

Donde

$$\left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i | \mathbf{e}_k \right\rangle = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x^2\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^{1} \frac{x\sqrt{6}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x^2\sqrt{6}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt{6}}{2}\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}x\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}x^2\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{10}}{15} \end{pmatrix}$$

y su traspuesta

$$\left\langle \mathbf{e}^m | \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x\sqrt{6}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^{1} \frac{x\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x^2\sqrt{6}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}x\mathrm{d}x \\ \int_{-1}^{1} \frac{x^2\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{x^3\sqrt{6}}{2}\mathrm{d}x & \int_{-1}^{1} \frac{(3x^2-1)\sqrt{10}}{4}x^2\mathrm{d}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{10}}{15} \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\tilde{T}^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & \frac{2\sqrt{3}}{9} & \frac{28\sqrt{5}}{45} \\ \frac{4\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{8\sqrt{5}}{9} & \frac{4\sqrt{5}}{45} & \frac{8}{45} \end{pmatrix}$$

5. Encuentre la distancia entre $|a\rangle = 3x^2 + 2x + 3$ y el subespacio generado por $\{1, x^2\}$ (3ptos)

Solución: La distancia (genérica) entre $A(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y el plano expandido por $\{1, x^2\}$, en general, será la distancia entre un vector genérico residente en el plano expandido por $\{1, x^2\}$, i.e.

$$\left|\mathbf{v}_{\{1,x^2\}}\right\rangle = |\mathbf{v}\rangle = C^0\,|\mathbf{1}\rangle + C^2\left|\mathbf{x^2}\right\rangle \leftrightarrow v(x) = C^0 + C^2x^2$$

y el vector $|\mathbf{A}\rangle$. Con lo cual

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right) = \sqrt{\|\mathbf{v}-\mathbf{A}\|^2} = \sqrt{\langle\mathbf{v}-\mathbf{A}|\mathbf{v}-\mathbf{A}\rangle}$$

y esto es

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right) = \sqrt{\int_{-1}^{1}\left(C^0 + C^2x^2 - 3x^2 - 2x - 3\right)^2 \mathrm{d}x}$$

vale decir

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right) = \frac{1}{15}\sqrt{90(C^2)^2 - 1440C^2 + 8160 + 300C^0C^2 - 3600C^0 + 450(C^0)^2}$$

Se puede encontrar las distancia m'inima si recordamos que $|\mathbf{A}\rangle = \left|\mathbf{v}_{\{1,x^2\}}\right\rangle + \left|\mathbf{v}^{\perp}_{\{1,x^2\}}\right\rangle$ donde $\left|\mathbf{v}^{\perp}_{\{1,x^2\}}\right\rangle$ es un vector ortogonal al plano expandido por $\{1, x^2\}$. Con lo cual la distancia m'inima

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right)_{min} = \sqrt{\left\langle\mathbf{v}^{\perp}_{\{1,x^2\}}|\mathbf{v}^{\perp}_{\{1,x^2\}}\right\rangle} = \sqrt{\langle\mathbf{A}|\mathbf{A}\rangle - \langle\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle}$$

Entonces, si

$$\left|\mathbf{v}_{\{1,x^2\}}\right\rangle = |\mathbf{v}\rangle = C^0\,|\mathbf{1}\rangle + C^2\left|\mathbf{x^2}\right\rangle$$

cuando

$$|\mathbf{A}-\mathbf{v}\rangle \perp |\mathbf{v}\rangle \quad \Rightarrow \langle\mathbf{A}-\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = 0 \quad \Rightarrow C^0 = \frac{-1}{3}C^2 + 2 + \frac{2\epsilon}{15}\sqrt{-5(C^2)^2 + 15\,C^2 + 225}$$

donde $\epsilon \pm 1$ y con lo cual

$$\left|\mathbf{v}^{\perp}_{\{1,x^2\}}\right\rangle = |\mathbf{A}-\mathbf{v}\rangle_{min} = \left(3-C^2\right)\left|\mathbf{x^2}\right\rangle + 2\left|\mathbf{x}\right\rangle + \left(\frac{2\epsilon}{15}\sqrt{-5\left(C^2\right)^2+15C^2+225}+1+\frac{1}{3}C^2\right)|\mathbf{1}\rangle$$

es decir

$$v^{\perp}_{\{1,x^2\}min}(x) = \left(3-C^2\right)x^2+2x-\frac{2}{15}\sqrt{-5\left(C^2\right)^2+15C^2+225}+1+\frac{1}{3}C^2$$

Con lo cual

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right)_{min} = \sqrt{\langle\mathbf{A}-\mathbf{v}|\mathbf{A}-\mathbf{v}\rangle_{min}}$$

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right)_{min} = \sqrt{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,\left(3x^2+2x+1+\frac{1}{3}C^2+\frac{2\epsilon}{15}\sqrt{-5(C^2)^2+15C^2+225}-x^2C^2\right)^2}$$

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right)_{min} = \frac{2}{5}\left(3-C^2\right)^2+\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{-2}{15}\epsilon\sqrt{-5(C^2)^2+15\,C^2+225}+1+\frac{1}{3}C^2\right)(3-C2)$$
$$+2\left(-\frac{2}{15}\epsilon\sqrt{-5(C^2)^2+15C^2+225}+1+\frac{1}{3}C^2\right)^2$$

6. Encuentre la mínima distancia entre $|a\rangle = 3x^2+2x+3$ y el subespacio generado por $\{P_0(x), P_2(x)\}$ (3ptos)

Solución: La distancia (genérica) entre $A(x) = 3x^2+2x+3$ y el plano expandido por $\{P_0(x), P_2(x)\}$, en general, será la distancia entre un vector genérico residente en el plano expandido por $\{P_0(x), P_2(x)\}$, i.e.

$$\left|\mathbf{v}_{\{P_0(x),P_2(x)\}}\right\rangle = |\mathbf{v}\rangle = C^0\,|\mathbf{P_0}\rangle + C^2\,|\mathbf{P_2}\rangle \leftrightarrow v(x) = C^0\frac{\sqrt{2}}{2}+C^2\left(\frac{\left(3x^2-1\right)\sqrt{10}}{4}\right)$$

y el vector $|\mathbf{A}\rangle$. Con lo cual

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right) = \sqrt{\|\mathbf{v}-\mathbf{A}\|^2} = \sqrt{\langle\mathbf{v}-\mathbf{A}|\mathbf{v}-\mathbf{A}\rangle}$$

y esto es

$$\mathrm{d}\left(|\mathbf{v}\rangle\,;\,|\mathbf{A}\rangle\right) = \sqrt{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,\left(3x^2+2x+3-C^0\frac{\sqrt{2}}{2}-C^2\left(\frac{\left(3x^2-1\right)\sqrt{10}}{4}\right)\right)^2}$$

La distancia mínima será aquella "medida" a lo largo de la perpendicular entre el plano expandido por $\{P_0(x), P_2(x)\}$ y el vector $|\mathbf{A}\rangle$. Obviamente, será la componente de $A(x)$ en la dirección de $P_1(x)$, porque la base $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$ es ortonormal. Esto es:

$$\langle\mathbf{P}_1|\mathbf{A}\rangle = \int_{-1}^{1}\,\mathrm{d}x\,\left(3x^2+2x+3\right)\frac{x\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$