Mayo 2008

Nombre____

1. La relación entre coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ y parabólicas (paracilíndricas), $\{u, v, w\}$, se puede escribir como

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2} \quad y = uv \quad \text{y} \quad z = w$$

Si la descripción del flujo de un fluido en esas coordenadas viene dado por un campo de velocidades

$$\vec{V} = \frac{1}{uv}\frac{\partial \psi(u,v)}{\partial u}\hat{\mathbf{u}}_u - \frac{u}{v}\frac{\partial \psi(u,v)}{\partial v}\hat{\mathbf{u}}_v$$

a) Encuentre la expresión para la divergencia $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (3 ptos)

Solución: En estas coodenadas el operador divergencia, para un campo vectorial genérico $\vec{A} = A_u\hat{\mathbf{u}}_u + A_v\hat{\mathbf{u}}_v + A_w\hat{\mathbf{u}}_w$ se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{u^2+v^2}\; A_u\left(u,v,w\right)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}\; A_v\left(u,v,w\right)\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\left(u^2+v^2\right)\; A_w\left(u,v,w\right)\right)}{u^2+v^2}$$

donde los factores de escalas han sido identificados como

$$h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^v} \quad \text{y} \quad h_w = 1$$

con lo cual la divergencia para el campo vectorial $\vec{V}$ queda como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{-1}{(u^2+v^2)^{3/2}v^2u^2}\left\{-\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\psi\left(u,v\right)\right)vu^3 - \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\psi\left(u,v\right)\right)v^3u + \left(\frac{\partial}{\partial u}\psi\left(u,v\right)\right)v^3\right.$$

$$\left. +u^5\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\psi\left(u,v\right)\right)v + u^3\left(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\psi\left(u,v\right)\right)v^3 - u^5\frac{\partial}{\partial v}\psi\left(u,v\right)\right\}$$

b) Encuentre la expresión para el rotor $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ (3 ptos)

Solución: Del mismo modo, para el mismo campo vectorial genérico, $\vec{A} = A_u\hat{\mathbf{u}}_u + A_v\hat{\mathbf{u}}_v + A_w\hat{\mathbf{u}}_w$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial A_w(u,v,w)}{\partial v} - \frac{\partial\left(\sqrt{u^2+v^2}A_v(u,v,w)\right)}{\partial w}\right)\hat{\mathbf{u}}_u +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{u^2+v^2}A_u(u,v,w)\right)}{\partial w} - \frac{\partial A_w(u,v,w)}{\partial u}\right)\hat{\mathbf{u}}_v$$

$$+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}A_v(u,v,w)}{\partial u} - \frac{\partial\sqrt{u^2+v^2}A_u(u,v,w)}{\partial v}\right)\hat{\mathbf{u}}_w$$

la expresión para el rotor en estas coordenadas

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2}\; v^2u}\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}v + \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}v^3u + \frac{\partial^2\psi(u,v)}{\partial\, u\partial v}v\; u^4 + \frac{\partial^2\psi(u,v)}{\partial u\partial v}v^3\; u^2 + \right.$$

$$\left.\frac{\partial^2\psi(u,v)}{\partial u\,\partial v}v\; u^2 + \frac{\partial^2\psi(u,v)}{\partial u\,\partial v}v^3 - \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}u^2\right)\hat{\mathbf{u}}_w$$

c) Considere la función $\psi(u,v)=\frac{v}{u}$

1) Encuentre la expresión para el Flujo a través de una superficie cilíndrica, con el eje de simetría en el eje z, de radio $\rho^2=x^2+y^2=1$, en el intervalo $-1\leq z\leq 1$ (6 ptos)

Solución: El flujo del campo vectorial $\vec{V}$ viene definido por

$$\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{V} \Rightarrow \int \mathrm{d}\vec{S}_1\cdot\vec{V} + \int \mathrm{d}\vec{S}_2\cdot\vec{V} + \int \mathrm{d}\vec{S}_3\cdot\vec{V} = \int_S \mathrm{dv}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

Estamos haciendo uso del teorema de la divergencia. Las superficies S_1 y S_3 representan las "tapas" del cilindro perpendiculares al eje z, mientras que S_2 es la superficie perpendicular al plano $x-y$. Claramente, el flujo a través de las "tapas" se anula, porque el campo vectorial no tiene componentes en esa dirección

$$\int \mathrm{d}\vec{S}_1\cdot\vec{V} = \int \mathrm{d}\vec{S}_3\cdot\vec{V} = 0$$

con lo cual nos queda calcular el flujo a través de la superficie S_2

$$\int \mathrm{d}\vec{S}_2\cdot\vec{V} = \int_S \mathrm{dv}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

Para ello no tamos que si $\psi(u,v)=\frac{v}{u}$ la divergencia puede escribirse como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{2\,u^2v^2+3\,v^4+u^6}{\left(u^2+v^2\right)^{3/2}u^4v^2}$$

Donde dv representa el diferencial del volumen encerrado por la superficie S, y viene expresado en coordenadas cilíndricas parabólicas como

$$\mathrm{dv} = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = h_1\mathrm{d}q_1\ h_2\mathrm{d}q_2\ h_3\mathrm{d}q_3 = \sqrt{u^2+v^2}\mathrm{d}u\ \sqrt{u^2+v^2}\mathrm{d}v\ \mathrm{d}w$$

Con lo cual el flujo se puede calcular como

$$\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{V} = \int_S \mathrm{dv}\ \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}w\ \int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}v\ \int_{-\sqrt{2-v^2}}^{\sqrt{2-v^2}}\mathrm{d}u\ \frac{2\,u^2v^2+3\,v^4+u^6}{\sqrt{u^2+v^2}u^4v^2}$$

Nótese que, sobre la circunsferencia unitaria, $\rho^2=x^2+y^2=1\Rightarrow u^2+v^2=2$ (realmente representa dos posibles (de las cuatro) soluciones reales). Integrando

$$\int_{-\sqrt{2-v^2}}^{\sqrt{2-v^2}}\mathrm{d}u\ \frac{2\,u^2v^2+3\,v^4+u^6}{\sqrt{u^2+v^2}u^4v^2} = \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{2v^2} - \frac{\ln\left(u+\sqrt{u^2+v^2}\right)}{2} - \left.\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u^3}\right|_{-\sqrt{2-v^2}}^{\sqrt{2-v^2}}$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}v\ \left(\frac{\sqrt{2-v^2}\sqrt{2}}{v^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-v^2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2-v^2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\left(2-v^2\right)^{3/2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) - \sqrt{2}$$

finalmente, el flujo puede ser escrito

$$\int \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{V} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) - 2\sqrt{2}$$

2) Encuentre la expresión para la circulación cerrada $\oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{V}$ a lo largo de la circunsferencia de radio $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = 1$ (3 ptos)

Solución: La circulación se puede escribir

$$\oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{V} = \oint \left(h_u \mathrm{d}u \hat{\mathbf{u}}_u + h_v \mathrm{d}v \hat{\mathbf{u}}_v\right)\cdot\left(\frac{-\hat{\mathbf{u}}_u}{u^3} - \frac{\hat{\mathbf{u}}_v}{v}\right) = \oint \left(-\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u^3}\mathrm{d}u + -\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v}\mathrm{d}v\right)$$

Pero, más aún, como sobre la circunsferencia

$$\rho^2 = x^2+y^2 = 1 \quad \Rightarrow u^2+v^2 = 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{2}\cos\theta \\ \\ v = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

por lo cual

$$\oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{V} = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta}{2\cos^3\theta} - \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\sqrt{2}$$

d) Si definimos el operador diferencial $\vec{\mathcal{D}}\cdot\vec{V} = -(uv)\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)$ Encuentre la expresión explícita para el operador $\vec{\mathcal{D}}$ (3 ptos)

Solución: A partir de la definción de divergencia es inmediato

$$\vec{\mathcal{D}}\cdot(\circ) = \frac{-1}{\left(u^2+v^2\right)^{3/2}vu}\left\{-vu^3\frac{\partial^2(\circ)}{\partial u^2} - v^3u\frac{\partial^2(\circ)}{\partial u^2} + v^3\frac{\partial(\circ)}{\partial u} + u^5v\frac{\partial^2(\circ)}{\partial v^2} + u^3v^3\frac{\partial^2(\circ)}{\partial v^2} - u^5\frac{\partial(\circ)}{\partial v}\right\}$$

2. Dado un potencial en coordenadas cartesianas de la forma

$$\phi(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

Encuentre la expresión del laplaciano para esa función en las coordenadas parabólicas $\nabla^2\phi(x,y)$ (5ptos)

Solución: La expresión del potencial en coordenadas parabólicas toma la forma

$$\nabla^2(\circ) = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2(\circ)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2(\circ)}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left((u^2+v^2)\frac{\partial(\circ)}{\partial w}\right)\right)$$

por otro lado, en coordenadas parabólicas

$$\phi(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y^2} = \frac{v^2-u^2}{u^4-6v^2u^2+v^4}$$

entonces

$$\nabla^2\phi(u,v) = 8\,\frac{v^8+20\,v^6u^2-26\,u^4v^4+20\,u^6v^2+u^8}{\left(u^4-6\,v^2u^2+v^4\right)^3}$$