Julio 2008

Nombre____

1. Dos operadores lineales cumplen con

$$\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} = 0; \qquad \mathbb{A}^2 = \mathbb{B}^2 = \mathbb{I} \qquad [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}$$

a) Muestre que $[\mathbb{C}, \mathbb{B}] = -2i\mathbb{A}$ y $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$ (2ptos)

Solución: $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}][\mathbb{A}, \mathbb{B}] = -4\mathbb{C}^2 \Rightarrow (\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A})(\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}) = -4\mathbb{C}^2 \Rightarrow -(2\mathbb{B}\mathbb{A})(2\mathbb{A}\mathbb{B}) = -4\mathbb{C}^2 \Rightarrow \mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$$

ya que $\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^2 = \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$

Solución: $[\mathbb{C}, \mathbb{B}] = -2i\mathbb{A}$

$$[\mathbb{C}, \mathbb{B}] = \frac{1}{2i}[[\mathbb{A}, \mathbb{B}], B] = \frac{1}{2i}\left\{(\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{B} - \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A})\right\} = \frac{1}{2i}\left\{2\mathbb{A} - 2\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}\right\} = -2i\mathbb{A}$$

ya que $\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^2 = \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$

b) Evalue $[[[\mathbb{A}, \mathbb{B}], [\mathbb{B}, \mathbb{C}]], [\mathbb{A}, \mathbb{B}]]$ (3ptos)

Solución:

$$[[[\mathbb{A}, \mathbb{B}], [\mathbb{B}, \mathbb{C}]], [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = [[2i\mathbb{C}, 2i\mathbb{A}], 2i\mathbb{C}] = -8i[[\mathbb{C}, \mathbb{A}], \mathbb{C}] = -8i[-2i\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 32i\mathbb{A}$$

2. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Muestre que

a) $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ y $\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 = 1$ (3ptos)

Solución: Como

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger(\mathbb{A} + i\mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} - i\mathbb{B}) = (\mathbb{A} - i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B}) \Rightarrow$$

$$\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{B} \Rightarrow [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = -[\mathbb{B}, \mathbb{A}] \Rightarrow [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$$

La segunda de las afirmaciones se puede demostrar, a partir de

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I} \Rightarrow (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} - i\mathbb{B}) = \left(\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + i(\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B})\right) \Rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2$$

b) Los autovectores de $\mathbb{A}$ también lo son de $\mathbb{B}$ (2ptos)

Solución: Si $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ son autovectores de $\mathbb{A}$ entonces

$$\mathbb{A}|\mathbf{u}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{u}_i\rangle \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A}|\mathbf{u}_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|\mathbf{u}_i\rangle \qquad \text{como } [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0 \qquad \text{entonces } \mathbb{A}\mathbb{B}|\mathbf{u}_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|\mathbf{u}_i\rangle$$

por lo tanto $\mathbb{B}|\mathbf{u}_i\rangle$ es un autovector de $\mathbb{A}$. Pero la solución para la ecuación de autovectores $(\mathbb{A} - \lambda_i\mathbb{I})|\mathbf{u}_i\rangle = 0$ es única, por lo cual todos los autovectores de $\mathbb{A}$ son proporcionales. Esto es $\mathbb{B}|\mathbf{u}_j\rangle = \mu_j|\mathbf{u}_j\rangle$, con lo cual que damostrado que los autovectores de $\mathbb{A}$ son autovalores de $\mathbb{B}$

c) Si $\mathbb{U}|\mathbf{v}_i\rangle = \nu_i|\mathbf{v}_i\rangle$ entonces $|\mu_i| = 1$ (2ptos)

Solución: Es claro que

$$\left\langle \mathbf{v}^j \right| \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\mathbf{v}_i\rangle = \left\langle \mathbf{v}^j \right| \mathbb{I}|\mathbf{v}_i\rangle \quad \Rightarrow \mu_j^*\mu_i\left\langle \mathbf{v}^j \right. |\mathbf{v}_i\rangle = \left\langle \mathbf{v}^j \right| \mathbb{I}|\mathbf{v}_i\rangle \quad \Rightarrow \mu_i^2 = 1$$

3. Dada una matriz de la forma

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \quad \mathbb{A}\left|\mathbf{v}_i\right\rangle = \lambda_i \left|\mathbf{v}_i\right\rangle$$

con α y β números complejos distintos de cero, encuentre

a) las relaciones que deben cumplir α y β para que λ_i sea real. (3ptos)

Solución: El Polinomio característico y la condición para que λ sea real será:

$$(1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-\alpha\beta) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \alpha\beta > 0 \ \wedge \ \alpha\beta \in \mathbb{R}$$

b) las relaciones que deben cumplir α y β para que $\left\langle \mathbf{v}^j \right. \left|\mathbf{v}_i\right\rangle = \delta_i^j$ (3ptos)

Solución: Los autovalores y autovectores para esta matriz será

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \left|\mathbf{v}_1\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1+\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \left|\mathbf{v}_2\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 1+\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \left|\mathbf{v}_3\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

con lo cual

$$\left\langle \mathbf{v}^2 \right. \left|\mathbf{v}_3\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = 1 \quad \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

c) Suponga que $\mathbb{A}$ es hermítica, encuentre las relaciones que deben cumplir α y β (2 ptos)

Solución: Si $\mathbb{A}$ es hermítica, entonces $\alpha^* = \beta$, con lo cual se cumplen automáticamente ambas aseveraciones.

4. Data las siguientes matrices determine cuales conmutan entre ellas y encuentre la base de autovectores comunes (5)

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Solución: Notamos que $[\mathbb{A},\mathbb{B}] = [\mathbb{A},\mathbb{D}] = [\mathbb{D},\mathbb{B}] = 0$ y

$$[\mathbb{A},\mathbb{C}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbb{B},\mathbb{C}] = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \quad [\mathbb{D},\mathbb{C}] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y los autovectores comunes a $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}$, serán

$$\left|\mathbf{u}_1\right\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left|\mathbf{u}_2\right\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$