Mayo 2005

Nombre____

1. Las matrices σ_x, σ_y, σ_z se conocen con el nombre de matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Muestre si las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{1}$ forman un grupo respecto a la multiplicación usual de matrices (2 ptos.).
Las matrices de Pauli no forman grupo bajo la multiplicación usual de matrices porque no es cerrada la operación. Esto es $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \neq \sigma_z$

b) Compruebe que (2 ptos.)

$$\sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkm}\sigma^m + \delta_{jk}\mathbf{1} \qquad \text{con } j,k,m = x,y,z$$

Efectivamente si se cumple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Muestre que las matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z conjuntamente con la matriz identidad $\mathbf{1}$ forman base para el espacio de matrices 2×2, (3 ptos.).
Si las matrices de Pauli conjuntamente con la matriz unidad forman base, significa que una matriz genérica $M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix}$ *podrá ser escrita como combinación lineal de los elementos de esa base. Esto es*

$$\begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix} = a_0\,|\mathbf{1}\rangle + a_x\,|\sigma_x\rangle + a_y\,|\sigma_y\rangle + a_z\,|\sigma_z\rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{llll} m_1^1 = & a_0 & & +a_z \\ m_2^1 = & & a_x \;\; -ia_y & \\ m_1^2 = & & a_x \;\; +ia_y & \\ m_2^2 = & a_0 & & -a_z \end{array}$$

que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas que siempre se puede resolver y encontrar $\{a_0, a_x, a_y, a_z\}$ *. Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales*

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(m_1^1 + m_2^2\right); \quad a_z = \frac{1}{2}\left(m_1^1 - m_2^2\right); \quad a_x = \frac{1}{2}\left(m_2^1 + m_1^2\right); \quad a_y = -\frac{1}{2}\left(m_2^1 - m_1^2\right).$$

Otra forma de demostrar que forman base es verificar si $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \mathbf{1}\}$ *son linealmente independientes esto es*

$$c_0\,|\mathbf{1}\rangle + c_x\,|\sigma_x\rangle + c_y\,|\sigma_y\rangle + c_z\,|\sigma_z\rangle = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} 0 = & c_0 & & +c_z \\ 0 = & & c_x \;\; -ic_y & \\ 0 = & & c_x \;\; +ic_y & \\ 0 = & c_0 & & -c_z \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_x = 0 \\ c_y = 0 \\ c_z = 0 \end{array} \right.$$

d) Muestre que una matriz compleja genérica puede expresarse en esa base como

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix} = a_0 \mathbf{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \qquad \text{con } \vec{\sigma} = \sigma_x \mathrm{I} + \sigma_y \mathrm{J} + \sigma_z \mathrm{K}$$

donde $\vec{a} = a_x \mathrm{I} + a_y \mathrm{J} + a_z \mathrm{K}$ siendo a_0, a_x, a_y y a_z números complejos (2 ptos.).
Fue demostrado arriba

e) Muestre además que (2ptos)

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) \left(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \mathbf{1} + i\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

con $\vec{a} = a_x \mathrm{I} + a_y \mathrm{J} + a_z \mathrm{K}$ y $\vec{b} = b_x \mathrm{I} + b_y \mathrm{J} + b_z \mathrm{K}$
Empezando por el lado derecho

$$\left(a^l b_l\right) \mathbf{1} + \underbrace{i\sigma_k \varepsilon^{kmn}}_{\sigma_m \sigma_n} a_m b_n = \left(a^l b_l\right) \mathbf{1} + \sigma_m \sigma_n a^m b^n = \left(a^i \sigma_i\right) \left(b^j \sigma_j\right)$$

Nótese que el primer término $\left(a^l b_l\right) \mathbf{1}$, *corresponde a los sumandos* $\left(\sigma_m\right)^2 = \mathbf{1}$ *los cuales nos están incluidos en el término* $\sigma_m \sigma_n a^m b^n$ *porque el símbolo de Levi Civita explícitamente exige que* $m \neq n$.

2. Considere el espacio lineal de funciones continua y continuamente diferenciables. $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$ en el cual el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{q} | \mathbf{p} \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, \mathrm{d}x$. Si además consideramos el vector $|\mathbf{p}\rangle \rightarrow p(x) = 2x + 3x^2 + 5x^4$

a) Encuentre la proyección de $|\mathbf{p}\rangle$ en el subespacio $\mathcal{S}^2$ expandido por una base **ortonormal** de polinomios cuadrático: $\{|\mathbf{u}_0\rangle; |\mathbf{u}_1\rangle; |\mathbf{u}_2\rangle\}$, donde $|\mathbf{u}_0\rangle, |\mathbf{u}_1\rangle$ y $|\mathbf{u}_2\rangle$ representan polinomios de grado $0, 1$y 2 respectivamente (3ptos)
Las componentes de $|\mathbf{p}\rangle$ *en la base* $\left\{ |\mathbf{u}_0\rangle \longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}; |\mathbf{u}_1\rangle \longleftrightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} x; |\mathbf{u}_2\rangle \longleftrightarrow \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$ *serán*

$$\langle \mathbf{u}_0 \, | \mathbf{p} \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2x + 3x^2 + 5x^4\right) \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}$$

$$\langle \mathbf{u}_1 \, | \mathbf{p} \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} x \left(2x + 3x^2 + 5x^4\right) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$\langle \mathbf{u}_2 \, | \mathbf{p} \rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \left(2x + 3x^2 + 5x^4\right) \, \mathrm{d}x = \frac{34}{35}\sqrt{10}$$

con lo cual

$$|\mathbf{p}\rangle_{\mathcal{S}^2} = 2\sqrt{2} |\mathbf{u}_0\rangle + \frac{2}{3}\sqrt{6} |\mathbf{u}_1\rangle + \frac{34}{35}\sqrt{10} |\mathbf{u}_2\rangle$$

b) Encuentre la mínima distancia entre ese subespacio y el polinomio $|\mathbf{p}\rangle$ (2ptos)
La mínima distancia entre el subespacio $\mathcal{S}^2$ *y el vector* $|\mathbf{p}\rangle$ *ser'a la norma de la diferencia entre*

el vector y su proyección sobre el subespacio $\mathcal{S}^2$ Esto es

$$\| |\mathbf{p}\rangle - |\mathbf{p}\rangle_{\mathcal{S}^2} \| = \sqrt{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathcal{S}^2} \ | \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathcal{S}^2} \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left((2x + 3x^2 + 5x^4) - \left(2 + 2x + \frac{1}{7}\left(51x^2 - 17\right) \right) \right)^2 \mathrm{d}x}$$

$$\| |\mathbf{p}\rangle - |\mathbf{p}\rangle_{\mathcal{S}^2} \| = \sqrt{\langle \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathcal{S}^2} \ | \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\mathcal{S}^2} \rangle} = \sqrt{\frac{128}{441}} \simeq 0{,}53875$$

3. Es espacio de Minkowski, $\mathcal{M}^4$, es un espacio pseudoeuclideano tetradimensional, vale decir un espacio vectorial respecto a la suma y a la multiplicación por un escalar equivalente a un espacio euclideano, $\mathcal{E}$, en el cual hemos definido un producto interno de tal forma que

$$|\mathbf{x}\rangle = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \qquad \rightarrow \qquad \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = y^0 x^0 - y^1 x^1 - y^2 x^2 - y^3 x^3$$

   a) ¿ Será una buena definición de producto interno de espacios euclidiano. ? ¿ por qué ? (2ptos)
   No lo será por cuanto

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\| = \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 \ngeq 0 \quad \forall |\mathbf{x}\rangle \in \mathcal{M}^4$$

   b) ¿ Si aceptamos esta definición de producto interno, cuál será la (o las) consecuencia(s) en las definiciones de norma y distancia para estos espacios ? (2ptos)
   Tendremos vectores $|\mathbf{x}\rangle$ con normas, positiva, nula o negativa