Espacios y Vectores Duales, Vectores Tensores y sus leyes de transformación*

L. A. Núñez**

Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,
(CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Versión α Mayo 2005

Índice

---

*__ADVERTENCIA:__ **El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.**

**e-mail: `nunez@ula.ve` Web: `http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/`

1. Funcionales Lineales

Definiremos funcionales lineales aquella operación que asocia un número complejo (o real) a un vector $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$ y cumple con la linealidad. Esto es

- $\forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}[|\mathbf{v}\rangle] \in \mathbf{C}$
- $\mathcal{F}[\alpha \ |\mathbf{v_1}\rangle + \beta \ |\mathbf{v}_2\rangle] \equiv \alpha \ \mathcal{F}[|\mathbf{v_1}\rangle] + \beta \ \mathcal{F}[|\mathbf{v}_2\rangle] \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle, |\mathbf{v_1}\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle \in \mathbf{V}$

El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ constituyen a su vez un espacio vectorial, que se denomina espacio vectorial dual de $\mathbf{V}$ y se denotará como $\mathbf{V}^*$. Este espacio lineal también se denomina espacio de formas lineales y los funcionales son esas $1-$forma. Esto es, dados $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbf{V}^*$ se tiene

$$\left.\begin{array}{c} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)[|\mathbf{v}\rangle] = \mathcal{F}_1[|\mathbf{v}\rangle] + \mathcal{F}_2[|\mathbf{v}\rangle] \\ \\ (\alpha \ \mathcal{F})[|\mathbf{v}\rangle] = \alpha^* \ \mathcal{F}[|\mathbf{v}\rangle] \end{array}\right\} \quad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$$

En aquellos espacios lineales con producto interno definido (Espacios de Hilbert), el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional. Así para tendremos

$$(\mathcal{F}_{\mathbf{a}})[|\mathbf{v}\rangle] \equiv \langle \mathbf{a} |\mathbf{v}\rangle \quad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle \mathbf{a}| \in \mathbf{V}^*$$

Es claro comprobar que el producto interno garantiza que los $\{\mathcal{F}_{\mathbf{a}}, \mathcal{F}_{\mathbf{b}}, \cdots\}$ forman un espacio vectorial.

$$\left.\begin{array}{c}(\mathcal{F}_{\mathbf{a}} + \mathcal{F}_{\mathbf{b}})\left[|\mathbf{v}\rangle\right] = \mathcal{F}_{\mathbf{a}}\left[|\mathbf{v}\rangle\right] + \mathcal{F}_{\mathbf{b}}\left[|\mathbf{v}\rangle\right] = \langle \mathbf{a} | \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{b} | \mathbf{v}\rangle \\ \\ (\alpha\ \mathcal{F}_{\mathbf{a}})\left[|\mathbf{v}\rangle\right] = \langle \alpha\mathbf{a} | \mathbf{v}\rangle = \alpha^*\langle \mathbf{a} | \mathbf{v}\rangle = \alpha^*\ \mathcal{F}_{\mathbf{a}}\left[|\mathbf{v}\rangle\right]\end{array}\right\} \quad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$$

Esta última propiedad se conoce como antilinealidad. Con lo cual se establece una correspondencia $1-1$ entre *kets* y *bras*, entre vectores y formas diferenciales.

$$\lambda_1 |\mathbf{v}_1\rangle + \lambda_2 |\mathbf{v}_2\rangle \qquad \rightleftarrows \qquad \lambda_1^* \langle \mathbf{v}_1| + \lambda_2^* \langle \mathbf{v}_2|$$

Con lo cual podemos puntualizar esta correspondencia como

$$\begin{array}{c}\langle \mathbf{a} | \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{a}\rangle^* \\ \langle \mathbf{a} | \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2\rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{a} | \mathbf{v}_1\rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{a} | \mathbf{v}_2\rangle \\ \langle \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 | \mathbf{v}\rangle = \lambda_1^* \langle \mathbf{a}_1 | \mathbf{v}\rangle + \lambda_2^* \langle \mathbf{a}_2 | \mathbf{v}\rangle\end{array}$$

Más aún, dada una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle,\ |\mathbf{e}_2\rangle,\ |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_m\rangle\}$ para $\mathbf{V}$ siempre es posible asociar una base para $\mathbf{V}^*$ de tal manera que

$$|\mathbf{v}\rangle = \lambda^i |\mathbf{e}_i\rangle \quad \rightleftarrows \quad \langle \mathbf{v}| = \lambda_i^* \left\langle \mathbf{e}^i \right| \quad \text{con } \lambda^i = \left\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{v}\right\rangle \quad \wedge \quad \lambda_i^* = \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, \cdots, n$$

Nótese estamos utilizando la notación de Einstein en la cual índices repetidos indican suma y que las bases del espacio dual de formas diferenciales $\left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k \right|$ llevan los índices arriba. Los índices arriba se llamarán contravariantes y los índices abajo covariantes. Las componentes de las formas diferenciales en una base dada, llevan índices abajo $\langle a| = a_i \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \right|$ mientras que las componentes de los vectores los llevan abajo $|a\rangle = a^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$

2. Bases Discretas

Para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como vimos arriba, la representación de un vector $|\mathbf{F}\rangle$ en un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V}$ puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle,\ |\mathbf{u}_2\rangle,\ |\mathbf{u}_3\rangle, \cdots |\mathbf{u}_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle,\ |\mathbf{u}_2\rangle,\ |\mathbf{u}_3\rangle \cdots |\mathbf{u}_n\rangle \cdots\}$) de la forma:

$$|\mathbf{F}\rangle = \left\{\begin{array}{ll} c^i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle = \left\langle \mathbf{u}^i \right| \mathbf{F}\rangle\ \ |\mathbf{u}_i\rangle & \Leftarrow B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle,\ |\mathbf{u}_2\rangle,\ |\mathbf{u}_3\rangle \cdots |\mathbf{u}_n\rangle\} \\ \\ c^i\ \ |\mathbf{v}_i\rangle = \left\langle \mathbf{u}^i \right| \mathbf{F}\rangle\ \ |\mathbf{u}_i\rangle & \Leftarrow B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle,\ |\mathbf{u}_2\rangle,\ |\mathbf{u}_3\rangle \cdots |\mathbf{u}_n\rangle \cdots\}\end{array}\right. \qquad \text{con } i = 1, 2, \cdots, n$$

donde en ambos casos:

$$c^i = \left\langle \mathbf{u}^i \right| \mathbf{F}\rangle = c^j\ \left\langle \mathbf{u}^i | \mathbf{u}_j\right\rangle = c^j\ \delta^i_j$$

Donde la delta de Kronecker δ_i^k lleva un índice arriba y uno abajo y representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ y es nula en los otros casos. Supondremos, de ahora en adelante un espacio de dimensión finita y en éste consideraremos dos bases ortogonales, $B_{DF} = \{|\mathbf{e}_1\rangle,\ |\mathbf{e}_2\rangle,\ |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\tilde{B}_{DF} =$

$\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle\}$, de dimensión finita. Como ambas son bases ortogonales todo vector de $\mathbf{V}$ puede expresarse en término de esas bases, en particular cada vector base se puede expresar en términos de la otra base como

$$\begin{aligned}
|\mathbf{e}_1\rangle &= c^1\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + c^2\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\cdots + c^n\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle = c^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \\
|\mathbf{e}_2\rangle &= \hat{c}^1\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \hat{c}^2\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\cdots + \hat{c}^n\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle = \hat{c}^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \\
&\vdots \\
|\mathbf{e}_n\rangle &= \check{c}^1\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \check{c}^2\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\cdots + \check{c}^n\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle = \check{c}^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede resumir aún más como

$$|\mathbf{e}_i\rangle = C_i^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = C_i^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$$

Los C_i^j son constantes que han renombrado las distintas formas de las constantes $c^j, \hat{c}^j\cdots\check{c}^j$ que expresamos arriba. Igualmente, podemos expresar los vectores de la segunda base en términos de la primera como

$$|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle = A_i^j\ \ |\mathbf{e}_j\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k\ |\tilde{\mathbf{e}}_i\right\rangle = \delta_i^k = A_i^j\ \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k\ |\mathbf{e}_j\right\rangle = A_i^j C_j^k$$

ya que

$$|\mathbf{e}_m\rangle = C_m^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k\ |\mathbf{e}_m\right\rangle = C_m^j\ \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k\ |\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle = C_m^j \delta_j^k = C_m^k$$

Adicionalmente, hay varias costumbres a aclarar con la notación de índices.

Al asociar los C_m^k con elementos de matriz los índices contravariantes (arriba) indicarán filas y los covariantes (abajo) las columnas. Esas matrices serán no singulares para garantizar la independencia lineal de los vectores base. De este modo para el caso $i, k = 1, 2, 3$ tendremos

$$\delta_i^k = A_i^j C_j^k \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\delta}_i^k = \tilde{A}_i^j \tilde{C}_j^k = \tilde{C}_j^k \tilde{A}_i^j$$

representa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_j^1 \tilde{A}_1^j & \tilde{C}_j^1 \tilde{A}_2^j & \tilde{C}_j^1 \tilde{A}_3^j \\ \tilde{C}_j^2 \tilde{A}_1^j & \tilde{C}_j^2 \tilde{A}_2^j & \tilde{C}_j^2 \tilde{A}_3^j \\ \tilde{C}_j^3 \tilde{A}_1^j & \tilde{C}_j^3 \tilde{A}_2^j & \tilde{C}_j^3 \tilde{A}_3^j \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^1 \tilde{A}_1^1 + \tilde{C}_2^1 \tilde{A}_1^2 + \tilde{C}_3^1 \tilde{A}_1^3 & \cdots & \tilde{C}_1^1 \tilde{A}_3^1 + \tilde{C}_2^1 \tilde{A}_3^2 + \tilde{C}_3^1 \tilde{A}_3^3 \\ \tilde{C}_1^2 \tilde{A}_1^1 + \tilde{C}_2^2 \tilde{A}_1^2 + \tilde{C}_3^2 \tilde{A}_1^3 & \ddots & \tilde{C}_1^2 \tilde{A}_3^1 + \tilde{C}_2^2 \tilde{A}_3^2 + \tilde{C}_3^2 \tilde{A}_3^3 \\ \tilde{C}_1^3 \tilde{A}_1^1 + \tilde{C}_2^3 \tilde{A}_1^2 + \tilde{C}_3^3 \tilde{A}_1^3 & \cdots & \tilde{C}_1^3 \tilde{A}_3^1 + \tilde{C}_2^3 \tilde{A}_3^2 + \tilde{C}_3^3 \tilde{A}_3^3 \end{pmatrix}$$

Es claro que $\tilde{C}_j^i$ y $\tilde{A}_i^j$ son inversas una de la otra, por cuanto su multiplicación nos da la matriz identidad. Por lo tanto si $|\mathbf{e}_i\rangle = C_i^j\ \ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$ se considera la transformación directa, mientras que $|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle = A_i^j\ \ |\mathbf{e}_j\rangle$ será la transformación inversa. El caso más emblemático lo constituyen las transformaciones entre la base ortonormal cartesiana $\{|\hat{\imath}\rangle\,, |\hat{\jmath}\rangle\}$ y la base ortonormal de vectores en coordenadas polares $\{|\mathbf{u}_r\rangle\,, |\mathbf{u}_\theta\rangle\}$.

Siguiendo con el esquema propuesto expresamos los vectores cartesianos en la base de vectores polares

$$\left.\begin{array}{l} |\hat{\imath}\rangle = \cos\theta\,|\mathbf{u}_r\rangle - \operatorname{sen}\theta\,|\mathbf{u}_\theta\rangle \\ \\ |\hat{\jmath}\rangle = \operatorname{sen}\theta\,|\mathbf{u}_r\rangle + \cos\theta\,|\mathbf{u}_\theta\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |\mathbf{e}_i\rangle = C_i^j\,|\mathbf{u}_j\rangle \Longrightarrow \quad C_i^j = \left\langle \mathbf{u}^j\,|\mathbf{e}_i\right\rangle$$

con

$$\left\langle \begin{array}{ccc} |\mathbf{e}_1\rangle & \rightleftharpoons & |\hat{\imath}\rangle \\ |\mathbf{e}_2\rangle & \rightleftharpoons & |\hat{\jmath}\rangle \end{array}\right\rangle ; \quad \left\langle \begin{array}{ccc} |\mathbf{u}_1\rangle & \rightleftharpoons & |\mathbf{u}_r\rangle \\ |\mathbf{u}_2\rangle & \rightleftharpoons & |\mathbf{u}_\theta\rangle \end{array}\right\rangle \quad \text{y} \quad \left\langle \begin{array}{c} \left\langle \mathbf{e}^i\,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \delta_j^i \\ \left\langle \mathbf{u}^k\,|\mathbf{u}_l\right\rangle = \delta_l^k \end{array}\right\rangle$$

con lo cual

$$C_i^j = \begin{pmatrix} \left\langle \mathbf{u}^1\,|\mathbf{e}_1\right\rangle & \left\langle \mathbf{u}^1\,|\mathbf{e}_2\right\rangle \\ \left\langle \mathbf{u}^2\,|\mathbf{e}_1\right\rangle & \left\langle \mathbf{u}^2\,|\mathbf{e}_2\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\mathbf{i}}^r & C_{\mathbf{j}}^r \\ C_{\mathbf{i}}^\theta & C_{\mathbf{j}}^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Más adelante veremos que esta es la matriz de rotaciones.

3. Bases Discretas y Continuas

Haremos una disgresión para fijar conceptos y extender algunos de los razonamientos que hemos desarrollado hasta aquí. Tal y como vimos arriba, la representación de un vector $|\mathbf{F}\rangle$ en un espacio vectorial abstracto $\mathbf{V}$ puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{u}_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots|\mathbf{u}_n\rangle\cdots\}$) de la forma:

$$|\mathbf{F}\rangle = \left\{ \begin{array}{lcl} c^i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle = \left\langle \mathbf{u}^i \right|\, \mathbf{F}\rangle\ \ |\mathbf{u}_i\rangle & & \Leftarrow B_{DF} = \{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots|\mathbf{u}_n\rangle\} \\ \\ c^i\ \ |\mathbf{v}_i\rangle = \left\langle \mathbf{u}^i \right|\, \mathbf{F}\rangle\ \ |\mathbf{u}_i\rangle & & \Leftarrow B_{DI} = \{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\cdots|\mathbf{u}_n\rangle\cdots\} \end{array}\right.$$

donde en ambos casos:

$$c^i = \left\langle \mathbf{u}^i \right|\, \mathbf{F}\rangle = c^j\ \ \left\langle \mathbf{u}^i\,|\mathbf{u}_j\right\rangle = c^j\ \delta_j^i$$

Ahora bien, si estamos tratando el espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable $\mathcal{L}^2$,definidas en $\Re^3$ tendremos que

$$|\mathbf{F}\rangle = c^i\ \ |\mathbf{u}_i\rangle \equiv \left\langle \mathbf{u}^i \right|\, \mathbf{F}\rangle\ \ |\mathbf{u}_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r'\ u_i^*\left(\mathbf{r}'\right)\ f\left(\mathbf{r}'\right) \right) |\mathbf{u}_i\rangle$$

que se reescribe en términos de funciones como

$$f\left(\mathbf{r}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r'\ u_i^*\left(\mathbf{r}'\right)\ f\left(\mathbf{r}'\right) \right)\ u_i\left(\mathbf{r}\right)$$

Es claro que se pueden intercambiar los símbolos de $\int$ y $\sum$, por lo cual

$$f\left(\mathbf{r}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r'\ f\left(\mathbf{r}'\right) \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty}\ u_i^*\left(\mathbf{r}'\right)\ u_i\left(\mathbf{r}\right) \right]}_{\mathcal{G}\left(\mathbf{r}',\mathbf{r}\right)}$$

la función $\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ que depende de los argumentos, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}$, vive dentro de las integrales y convierte

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r' \; f(\mathbf{r}') \; \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

Este tipo de funciones que apareció en el capítulo de transformadas integrales se conoce como la función distribución delta de Dirac

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r' \; f(\mathbf{r}') \; \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

Esto sugiere la generalización de bases discretas a continua $|\mathbf{w}_\alpha\rangle$ de tal forma que transformamos el índice de la sumatoria en la variable de una integral

$$|\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}\alpha \; c(\alpha) \; |\mathbf{w}_\alpha\rangle$$

donde

$$c(\beta) = \langle \mathbf{w}_\beta | \mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}\alpha \; c(\alpha) \; \langle \mathbf{w}_\beta | \mathbf{w}_\alpha\rangle = \int \mathrm{d}\alpha \; c(\alpha) \; \delta(\alpha - \beta)$$

con en la cual $\delta(\alpha - \beta)$ es una Delta de Dirac. Así, los dos conceptos expresados hasta ahora tienen una expresión:

Propiedad\Base	**Discreta**	**Continua**
Ortogonalidad	$\langle \mathbf{v}^i \| \mathbf{v}_j\rangle = \delta^i_j$	$\langle \mathbf{w}_\beta \| \mathbf{w}_\alpha\rangle = \delta(\alpha - \beta)$
Cierre	$\mathbf{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{v}_j\rangle \langle \mathbf{v}^j\|$	$\mathbf{1} = \int \mathrm{d}\alpha \; \|\mathbf{w}_\alpha\rangle \langle \mathbf{w}_\alpha\|$
Expansión	$\|\mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i \; \|\mathbf{u}_i\rangle$	$\|\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}\alpha \; c(\alpha) \; \|\mathbf{w}_\alpha\rangle$
Componentes	$c^i = \langle \mathbf{u}^i\| \mathbf{F}\rangle$	$c(\beta) = \langle \mathbf{w}_\beta \|\mathbf{\Psi}\rangle$
Producto Interno	$\langle \mathbf{G}\| \mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g^{i*} \; f_i$	$\langle \mathbf{G}\| \mathbf{F}\rangle = \int \mathrm{d}\alpha \; g^*(\alpha) \; f(\alpha)$
Norma	$\langle \mathbf{F}\| \mathbf{F}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \|f_i\|^2$	$\langle \mathbf{F}\| \mathbf{F}\rangle = \int \mathrm{d}\alpha \; \|f(\alpha)\|^2$

3.1. Bases de Ondas Planas

Como un ejemplo de lo anterior consideraremos la base de las ondas planas. En el capítulo de transformadas integrales consideramos un caso particular de las transformada de Fourier compleja para una función, vale decir

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; e^{i \; st} \; f(t) \qquad \rightleftarrows \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s \; e^{-i \; st} \; F(s)$$

las cuales re-escribiremos en términos más familiares a la comunidad de físicos como

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \; e^{i \; px/\hbar} \; \bar{\psi}(p) \qquad \rightleftarrows \qquad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-i \; px/\hbar} \; \psi(x)$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en mecánica Cuántica. Estas fórmulas pueden ser re-interpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\ px/\hbar} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \qquad \rightleftarrows \qquad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\ px/\hbar} \right)}_{v_p^x(x)} \psi(x)$$

por lo cual

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\ v_p(x)\ \bar{\psi}(p) \qquad \rightleftarrows \qquad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ v_p^*(x)\ \psi(x)$$

Diremos que la función $\psi(x)$ está expresada en la base de ondas planas $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\ px/\hbar}$

Nótese

- El índice p de $v_p(x)$ varía de forma continua entre $-\infty$ e ∞.
- Que $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\ px/\hbar} \notin \mathcal{L}^2$ es decir no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge

$$\langle \mathbf{v}_p | \mathbf{v}_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \frac{1}{2\pi\hbar} \to \infty$$

- Que las proyecciones de $\psi(x)$ sobre la base de ondas planas es $\bar{\psi}(p) = \langle \mathbf{v}_p | \psi \rangle$
- La relación de cierre para esta base se expresa como

$$1 = \int \mathrm{d}\alpha\ |\mathbf{v}_\alpha\rangle \langle \mathbf{v}_\alpha| \qquad \rightleftarrows \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\ v_p^*(x')\ v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\ \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i\ p(x'-x)/\hbar} = \delta(x' - x)$$

  mientras que de la definición de producto interno, uno obtiene

$$\langle \mathbf{v}_{p'} | \mathbf{v}_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ v_{p'}^*(x)\ v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\ \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i\ x(p'-p)/\hbar} = \delta(p' - p)$$

En este mismo orden de ideas podemos construir otra base continua $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$ a partir de la utilización de las propiedades de la delta de Dirac. Esto es

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0\ \psi(\mathbf{r}_0)\ \underbrace{\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}_{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})} \qquad \rightleftarrows \qquad \psi(\mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r\ \psi(\mathbf{r})\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

por lo cual la re-interpretación es inmediata

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0\ \psi(\mathbf{r}_0)\ \xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \qquad \text{con} \qquad \psi(\mathbf{r}_0) = \langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r\ \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r})\ \psi(\mathbf{r})$$

más aún la ortogonalidad queda garantizada por la relación de cierre

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \, \xi_{\mathbf{r}_0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0 \; \xi^*_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \;\; \xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r_0 \; \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \;\; \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$$

al igual que

$$\left\langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \, \xi_{\mathbf{r}'_0} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \; \xi^*_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \;\; \xi_{\mathbf{r}'_0}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \; \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \;\; \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0) = \delta(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0)$$

3.2. Las Representaciones $|\mathbf{r}\rangle$ y $|\mathbf{p}\rangle$

A partir de las bases de ondas planas $v_{p_0}(x)$,y de distribuciones, $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$, construimos las llamadas representaciones $|\mathbf{r}\rangle$ y $|\mathbf{p}\rangle$ de la forma siguiente. Asociamos

$$\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \quad \rightleftarrows \quad |\mathbf{r}_0\rangle$$

$$v_{p_0}(x) \quad \rightleftarrows \quad |\mathbf{p}_0\rangle$$

De esta forma dada las bases $\{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})\}$ y $\{v_{p_0}(x)\}$ para el espacio vectorial $\mathbf{V}$ definiremos dos "representaciones", la representación de coordenadas, $|\mathbf{r}_0\rangle$, y la representación de momentos $|\mathbf{p}_0\rangle$ de $\mathbf{V}$,respectivamente. De tal modo que

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{r}_0 | \, \mathbf{r}'_0 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \; \xi^*_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) \;\; \xi_{\mathbf{r}'_0}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0) \\
1 &= \int \mathrm{d}^3 r_0 \;\; |\mathbf{r}_0\rangle \langle \mathbf{r}_0| \\
\left\langle \mathbf{p}_0 | \, \mathbf{p}'_0 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \; v^*_{p'_0}(\mathbf{r}) \;\; v_{p_0}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \; \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-i \; \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_0/\hbar} = \delta(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p}_0) \\
1 &= \int \mathrm{d}^3 p_0 \;\; |\mathbf{p}_0\rangle \langle \mathbf{p}_0|
\end{aligned}$$

Podemos, entonces expresar el producto interno para la representación de coordenadas como

$$\langle \mathbf{\Phi} \, | \mathbf{\Psi} \rangle = \langle \mathbf{\Phi} | \underbrace{\left(\int \mathrm{d}^3 r_0 \;\; |\mathbf{r}_0\rangle \langle \mathbf{r}_0| \right)}_{1} |\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3 r_0 \; \phi^*(\vec{r}_0) \psi(\vec{r}_0)$$

y equivalentemente para la representación de momentos

$$\langle \mathbf{\Phi} \, | \mathbf{\Psi} \rangle = \langle \mathbf{\Phi} | \underbrace{\left(\int \mathrm{d}^3 p_0 \;\; |\mathbf{p}_0\rangle \langle \mathbf{p}_0| \right)}_{1} |\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3 p_0 \; \phi^*(\vec{p}_0) \psi(\vec{p}_0)$$

por lo cual hemos encontrado que

$$|\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3 r_0 \;\; |\mathbf{r}_0\rangle \langle \mathbf{r}_0| \; \mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3 p_0 \;\; |\mathbf{p}_0\rangle \langle \mathbf{p}_0| \; \mathbf{\Psi}\rangle$$

$$\psi(\vec{r}_0) = \langle \mathbf{r}_0 \; |\mathbf{\Psi}\rangle \qquad \text{y} \qquad \psi(\vec{p}_0) = \langle \mathbf{p}_0 \; |\mathbf{\Psi}\rangle$$

que es la representación de $|\mathbf{\Psi}\rangle$ en coordenadas, $\psi(r_0)$, y en momentos, $\psi(p_0)$. Adicionalmente cuando $|\mathbf{\Psi}\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ tendremos que

$$\langle \mathbf{r}_0 \; |\mathbf{p}_0\rangle = \langle \mathbf{r}_0| \underbrace{\left(\int \mathrm{d}^3 r_0' \;\; |\mathbf{r}_0'\rangle \langle \mathbf{r}_0'| \right)}_{1} |\mathbf{p}_0\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3 r_0' \; \delta\left(\vec{r}_0' - \vec{r}_0\right) \;\; \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0 \cdot \vec{r}_0}$$

$$\langle \mathbf{r}_0 \; |\mathbf{p}_0\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \;\; \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_0 \cdot \vec{r}_0}$$

con lo cual $\psi(p_0)$ puede considerarse la transformada de Fourier de $\psi(r_0)$, y denotaremos de ahora en adelante las bases $|\mathbf{r}_0\rangle \equiv |\mathbf{r}\rangle$ y $|\mathbf{p}_0\rangle \equiv |\mathbf{p}\rangle$. Estos índices continuos, $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{p_0}$,representan tres índices continuos $\mathbf{r} \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $\mathbf{p} \rightleftharpoons (p_x, p_y, p_z)$. La proyección de un vector abstracto $|\mathbf{\Psi}\rangle$ en la representación $|\mathbf{r}\rangle$ será considerada como su expresión en el espacio de coordenadas, igualmente su proyección $\langle \mathbf{p} \; |\mathbf{\Psi}\rangle$ será su expresión en el espacio de los momentos. Eso nos permitirá hacer corresponder los elementos de espacios vectoriales abstractos con, con elementos de un espacio vectorial de funciones. Por lo tanto todas las fórmulas de proyección quedan como

$$\langle \mathbf{r} \; |\mathbf{\Psi}\rangle = \psi(\mathbf{r}) \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{p} \; |\mathbf{\Psi}\rangle = \psi(\mathbf{p})$$

mientras que las relaciones de cierre y ortonormalización

$$\langle \mathbf{r}| \; \mathbf{r}'\rangle = \delta\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}\right) \qquad \text{y} \qquad 1 = \int \mathrm{d}^3 r \;\; |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}|$$

$$\langle \mathbf{p}| \; \mathbf{p}\rangle = \delta\left(\mathbf{p}' - \mathbf{p}\right) \qquad \text{y} \qquad 1 = \int \mathrm{d}^3 p \;\; |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}|$$

por su parte, la relación de cierre hará corresponder a la expresión del el producto interno de dos vectores, tanto en la representación de las coordenadas como en la representación de momentos de la forma

$$\langle \mathbf{\Phi}| \left(\int \mathrm{d}^3 r \;\; |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \right) |\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3 r \; \phi^*(\mathbf{r}) \; \psi(\mathbf{r})$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle \mathbf{\Phi} \; |\mathbf{\Psi}\rangle$$

$$\Updownarrow$$

$$\langle \mathbf{\Phi}| \left(\int \mathrm{d}^3 p \;\; |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \right) |\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3 p \; \bar{\phi}^*(\mathbf{p}) \; \bar{\psi}(\mathbf{p})$$

donde $\bar{\phi}^*(\mathbf{p})$ y $\bar{\psi}(\mathbf{p})$ son las transformadas de Fourier de $\phi^*(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$, respectivamente. La afirmación anterior queda evidentemente demostrada del cambio entre las bases $|\mathbf{r}\rangle$ y $|\mathbf{p}\rangle$. Esto es

$$\langle \mathbf{r} \,|\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{p} \,|\mathbf{r}\rangle^* = (2\pi\hbar)^{-3/2} \;\; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

por lo cual

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} \,|\mathbf{\Psi}\rangle = \langle \mathbf{r}| \left(\int \mathrm{d}^3p \;\; |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \right) |\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3p \;\; \langle \mathbf{r} \,|\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \; \mathbf{\Psi}\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3p \; e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \; \bar{\psi}(\mathbf{p})$$

e inversamente

$$\psi(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} \,|\mathbf{\Psi}\rangle = \langle \mathbf{p}| \left(\int \mathrm{d}^3r \;\; |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \right) |\mathbf{\Psi}\rangle = \int \mathrm{d}^3r \;\; \langle \mathbf{p} \,|\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \; \mathbf{\Psi}\rangle = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \mathrm{d}^3r \; e^{\frac{-i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r})$$

4. Paréntesis Tensorial

4.1. Tensores una definición funcional

La extensión natural al concepto de funcional lineal es el concepto de tensor. Definiremos como un tensor a un funcional lineal que asocia un número complejo (o real) a un vector $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$, a una forma $\langle \mathbf{u}| \in \mathbf{V}^*$, o ambas y cumple con la linealidad. Esto es

- $\forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle \mathbf{u}| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}\left[\langle \mathbf{u}| \,; |\mathbf{v}\rangle\right] \in \mathbf{C}$
- $\mathcal{T}\left[\; \langle \mathbf{u}| \,; \alpha \;\; |\mathbf{v_1}\rangle + \beta \;\; |\mathbf{v}_2\rangle\right] \equiv \alpha \, \mathcal{T}\left[\langle \mathbf{u}| \,; |\mathbf{v_1}\rangle\right] + \beta \, \mathcal{T}\left[\langle \mathbf{u}| \,; |\mathbf{v}_2\rangle\right] \quad \forall \; |\mathbf{v_1}\rangle \,, |\mathbf{v}_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle \mathbf{u}| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}\left[\zeta \;\; \langle \mathbf{u_1}| + \xi \;\; \langle \mathbf{u}_2| \,; \;\; |\mathbf{v}\rangle\right] \equiv \alpha\zeta \, \mathcal{T}\left[\langle \mathbf{u}_1| \,; |\mathbf{v}\rangle\right] + \xi \, \mathcal{T}\left[\langle \mathbf{u}_2| \,; |\mathbf{v}\rangle\right] \quad \forall \; |\mathbf{v}\rangle \,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle \mathbf{u_1}| \,, \langle \mathbf{u_2}| \in \mathbf{V}^*$

Es decir, un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores, formas o ambas. Esto es $\mathcal{T}\left[\bullet ; \bullet\right]$ una cantidad con dos "puestos" y una vez cubiertos se convierte en un escalar (complejo o real). Al igual que las funciones de varias variables ($f\,(x, y) = 3x + 4y^2$) la posición es importante

$$\mathcal{T}\left[\overset{|\mathbf{v}\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}} ; \overset{\langle \mathbf{u}|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] \in \mathbf{C}$$

Un tensor con dos argumentos correspondientes a formas y uno a un vector

$$\mathcal{T}\left[\circ, \circ; \;\cdot\right] \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\overset{|\mathbf{v}_1\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}} \,,\, \overset{|\mathbf{v}_2\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}} \,;\, \overset{\langle \mathbf{u}|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] \in \mathbf{C} \rightrightarrows \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

y el caso contrario

$$\mathcal{T}\left[\circ; \;\cdot, \cdot\right] \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\overset{|\mathbf{v}\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}} \,;\, \overset{\langle \mathbf{u}_1|}{\overset{\downarrow}{\bullet}} \,,\, \overset{\langle \mathbf{u}_2|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] \in \mathbf{C} \rightrightarrows \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En general

$$\mathcal{T}\left[\circ;\ \cdot,\cdot\right] \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\overset{|\mathbf{v}_1\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}},\overset{|\mathbf{v}_2\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}},\cdots,\overset{|\mathbf{v}_n\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}};\overset{\langle\mathbf{u}_1|}{\overset{\downarrow}{\bullet}},\overset{\langle\mathbf{u}_2|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\cdots,\overset{\langle\mathbf{u}_m|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] \rightrightarrows \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

En esta notación el punto y coma ;separa las "entradas" para las formas de las de los vectores. Es importante recalcar que **el orden si importa**, no sólo para las cantidades separadas por el punto y como sino el orden de los puestos de los vectores y formas separados por coma. Ese último orden repercutirá en las propiedades de los tensores. Serán tensores simétricos si al permutar dos de los puestos de vectores (o formas) cambia de signo el orden no importa; antisimétricos si el orden importa y un tensor genérico si el orden importa pero no se comporta como los casos reseñados anteriormente. De todos modos esto será tratado con detalle más adelante.

Obviamente las formas pueden ser representadas por tensores ya que son funcionales lineales de vectores, es decir,

$$\text{una forma es tensor de tipo } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\overset{\langle\mathbf{a}|}{\overset{\downarrow}{\circ}}\right] \in \mathbf{C}.$$

Por su parte, los vectores constituyen un caso especial de tensores

$$\text{un vector es tensor de tipo } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightrightarrows \mathcal{T}\left[\overset{|\mathbf{a}\rangle}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] \in \mathbf{C}.$$

porque son funcionales lineales para las formas diferenciales

4.2. Producto Tensorial: *Definición y propiedades*

Como será evidente más adelante, unos tensores (*simples*) pueden provenir del *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales. Esto es que, dados $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensiones N_1 y N_2, respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ pertenecientes a estos espacios vectoriales, $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$. Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$si se cumple que

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \mathcal{T}\left[\overset{\langle\zeta(1)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}},\overset{\langle\xi(2)|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] = \langle\zeta(1)\ |\varphi(1)\rangle\,\langle\xi(2)\ |\chi(2)\rangle \in \mathbf{C}$$

y cumplen con las siguientes propiedades:

1. La suma entre tensores de $\mathcal{E}$ viene definida como

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \end{aligned}$$

2. El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ

$$[|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda\,|\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\,[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \lambda\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle$$
$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\,|\chi(2)\rangle] = \mu\,[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \mu\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle$$

3. El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle$$
$$[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$

Nótese que los índices (1) y (2) denotan la pertenencia al espacio respectivo.

Es fácil convencerse que los tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \in \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ forman un espacio vectorial La demostración se basa en comprobar los axiomas o propiedades de los espacios vectoriales. Es decir:

1. La operación suma $\boxplus$ es cerrada en $\mathbf{V}: \forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
Esto se traduce en demostrar que sumados dos tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$, y $|\zeta(1)\xi(2)\rangle \in \mathcal{E}$ el tensor suma también pertenece a $\mathcal{E}$,con a y b pertenecientes al campo del espacio vectorial

$$a\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle + b\,|\zeta(1)\xi(2)\rangle = |a\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + b\xi(2)\rangle$$

y esto se cumple siempre ya que, el producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales y por ser $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ espacios vectoriales se cumple

$$\left.\begin{array}{l} |a\varphi(1) + \zeta(1)\rangle = a\,|\varphi(1)\rangle + |\zeta(1)\rangle \in \mathcal{E}_1 \\ \\ |\varphi(2) + b\zeta(2)\rangle = |\varphi(2)\rangle + b\,|\zeta(2)\rangle \in \mathcal{E}_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$$

2. La operación suma $\boxplus$ es conmutativa y asociativa
Conmutativa $\forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{v}_i\rangle$
Esta primera es clara de la definición de suma

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle$$

$$|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\zeta(1) + \varphi(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle$$

por ser $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos espacios vectoriales
$\forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle)$
una vez más, esto se traduce en:

$$(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle)$$

con lo cual, por la definición de suma la expresión anterior queda como

$$(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1) + \varkappa(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \kappa(2)\rangle)$$

$$|(\varphi(1) + \zeta(1)) + \varkappa(1)\rangle \otimes |(\xi(2) + \chi(2)) + \kappa(2)\rangle = |\varphi(1) + (\zeta(1) + \varkappa(1))\rangle \otimes |\xi(2) + (\chi(2) + \kappa(2))\rangle$$

3. Existe un único elemento neutro: $\exists ! \ |\mathbf{0}\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{0}\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \quad \forall \ |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
   Es decir,
$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |0(1)0(2)\rangle = |\varphi(1) + 0(1)\rangle \otimes |\chi(2) + 0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle$$

4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\mathbf{V}$:
   $\forall \ |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \quad \exists \ |-\mathbf{v_j}\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |-\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \Rightarrow$
$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle - |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1) - \varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2) - \chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle = |0(1)0(2)\rangle$$

5. $\alpha\left(\beta\,|\mathbf{v}_i\rangle\right) = (\alpha\beta)\,|\mathbf{v}_i\rangle \quad \Rightarrow$
$$\begin{aligned}\alpha\left(\beta\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle\right) &= \alpha\left(|\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle\right) = |\alpha\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle \\ &= (\alpha\beta)\,|\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle\end{aligned}$$

6. $(\alpha+\beta)\,|\mathbf{v}_i\rangle = \alpha\,|\mathbf{v}_i\rangle + \beta\,|\mathbf{v}_i\rangle \quad \Rightarrow$
$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |(\alpha+\beta)\,\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\alpha\chi(2) + \beta\chi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1)\rangle \otimes \left[\left(\alpha\,|\chi(2)\rangle + \beta\,|\chi(2)\rangle\right)\right] \\ &= \alpha\,|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + \beta\,|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle\end{aligned}$$

7. $\alpha\left(|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle\right) = \alpha\,|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus \alpha\,|\mathbf{v}_j\rangle \quad \Rightarrow$
$$\begin{aligned}\alpha\left(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle\right) &= \alpha\left(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle\right) \\ &= |\alpha\left(\varphi(1) + \zeta(1)\right)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= |\alpha\varphi(1) + \alpha\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= \left(|\alpha\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\alpha\zeta(1)\xi(2)\rangle\right) \\ &= \alpha\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle + \alpha\,|\zeta(1)\xi(2)\rangle\end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos construir un producto tensorial entre espacios de formas diferenciales. Si $\mathcal{E}_1^*$ y $\mathcal{E}_2^*$ son dos espacios vectoriales duales a $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, con dimensiones N_1 y N_2, respectivamente. A estos espacios pertenecen las formas diferenciales genéricas $\langle\zeta(1)| \in \mathcal{E}_1^*$ y $\langle\xi(2)| \in \mathcal{E}_2^*$. Definiremos el producto tensorial de espacios vectoriales duales, $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_1^* \otimes \mathcal{E}_2^*$, si a cada par de formas diferenciales $\langle\zeta(1)| \in \mathcal{E}_1^*$ y $\langle\xi(2)| \in \mathcal{E}_2^*$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Esto es
$$\langle\zeta(1)\xi(2)| = \langle\zeta(1)| \otimes \langle\xi(2)|$$

4.3. La tentación del producto interno

Uno puede verse tentado a definir un producto interno de la forma

$$\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\ |\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\ |\chi(2)\rangle$$

A partir de las definiciones de productos internos en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ mostraremos, sin embargo que NO es una buena definición de producto interno. Para ello supondremos que $\cdot$ representa la multiplicación estándar entre números reales. Para comprobar que
Debemos demostrar los axiomas o propiedades de los productos internos. Las propiedades que definen el producto interno son:

1. $\langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle \quad \in\Re \quad \wedge \quad \langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle \geq 0 \quad \forall\ |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V} \qquad \text{si} \quad \langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$
   Esto es:
   $$\langle\varphi(1)\chi(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\varphi(1)\ |\varphi(1)\rangle \cdot \langle\chi(2)\ |\chi(2)\rangle$$
   como $\langle\varphi(1)\ |\varphi(1)\rangle$ y $\langle\chi(2)\ |\chi(2)\rangle$ son buenas definiciones de producto interno tendremos que
   $$\left.\begin{array}{r}\langle\varphi(1)\ |\varphi(1)\rangle \geq 0 \\ \\ \langle\chi(2)\ |\chi(2)\rangle \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \langle\varphi(1)\chi(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle \geq 0$$
   Aquí vale la pena mencionar algunos puntos sutiles sobre la segunda parte de la propiedad a demostrar:
   si $\quad \langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$ lo cual para este caso se traducen en
   $$\langle\varphi(1)\chi(2)\ |\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\rangle = \langle\varphi(1)\ |\tilde{\varphi}(1)\rangle \cdot \langle\chi(2)\ |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0$$
   $$\langle\varphi(1)\ |\tilde{\varphi}(1)\rangle \cdot \langle\chi(2)\ |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{r}\langle\varphi(1)\ |\tilde{\varphi}(1)\rangle = 0 \\ \\ \langle\chi(2)\ |\tilde{\chi}(2)\rangle \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow |\tilde{\varphi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \\ \left.\begin{array}{r}\langle\varphi(1)\ |\tilde{\varphi}(1)\rangle \neq 0 \\ \\ \langle\chi(2)\ |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow |\tilde{\chi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \\ \left.\begin{array}{r}\langle\varphi(1)\ |\tilde{\varphi}(1)\rangle = 0 \\ \\ \langle\chi(2)\ |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}|\tilde{\varphi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \\ |\tilde{\chi}(1)\rangle = |0(1)\rangle\end{array}\right. \end{array}\right.$$
   definitivamente, habría que restringir los posibles vectores que intervienen en el producto tensorial, de modo que no fuera posible vectores del tipo
   $$|\varphi(1)0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle \qquad \text{o} \qquad |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$
   sólo así se cumple la propiedad mencionada.

2. $\langle \mathbf{x} | \, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \, \mathbf{x} \rangle^* \quad \forall \; |\mathbf{x}\rangle , |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V}$
   Esto puede ser demostrado fácilmente como sigue

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\varphi(1)\chi(2)\rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle \\
&= \langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle^* \cdot \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle^* \\
&= (\langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle \cdot \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle)^* \\
&= \langle \varphi(1)\chi(2) \, |\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\rangle^*
\end{aligned}$$

3. $\langle \mathbf{x} | \, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \, \mathbf{z} \rangle \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{z} | \, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z} | \, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \; |\mathbf{x}\rangle , |\mathbf{y}\rangle , |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$
   Partimos del lado derecho de la primera de las igualdades anteriores:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \, [|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle] &= \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \, [|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle] \\
&= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2) + \chi(2)\rangle
\end{aligned}$$

   y otra vez, como $\langle \varphi(1) \, |\varphi(1)\rangle$ y $\langle \chi(2) \, |\chi(2)\rangle$ son buenas definiciones de producto interno tendremos que:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \\
\langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2) + \chi(2)\rangle &= \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle
\end{aligned}$$

   y al multiplicar $\langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2) + \chi(2)\rangle$ por $\langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle$ surgirán cuatro sumandos

$$\langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle$$

   lo cual contrasta con el lado izquierdo al utilizar la definición dos veces que tienen dos sumandos

$$\langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\varphi(1)\chi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\zeta(1)\xi(2)\rangle = \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle$$

   por lo cual **NO se cumple esta propiedad** y no hay forma de enmendarla. Sólo por razones de completitud.

4.4. Bases para un producto tensorial

Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ son bases discretas para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, respectivamente, entonces podremos construir el tensor

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in \mathcal{E}$$

el cual funcionará como una base para $\mathcal{E}$. Por lo tanto, un tensor genérico de $\mathcal{E}$, construido a partir

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i \chi^j \, |u_i(1)v_j(2)\rangle$$

donde φ^i y χ^j son las componentes de $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ en sus respectivas bases. En otras palabras las componentes de un tensor en $\mathcal{E}$ corresponden a la multiplicación de las componentes de los vectores en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein de suma tácita en índices covariantes y contravariantes, en la cual $c^k |v_k\rangle \equiv \sum_{k=1}^n c^k |v_k\rangle$.

Es importante señalar que si bien un tensor genérico $|\Psi\rangle \in \mathcal{E}$ siempre se puede expandir en la base $|u_i(1)v_j(2)\rangle$ no es cierto que todo tensor de $\mathcal{E}$ provenga del producto tensorial de $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$. Es decir, $\mathcal{E}$ tiene más tensores que los que provienen el producto tensorial. Esta afirmación puede verse del hecho que si $|\Psi\rangle \in \mathcal{E}$ entonces

$$|\Psi\rangle = c^{i,j} |u_i(1)v_j(2)\rangle$$

por ser $\{|u_i(1)v_j(2)\rangle\}$ base para $\mathcal{E}$. Es claro que dados dos números n_1 y n_2 habrá $c^{i,j}$ que no provienen de la multiplicación de $n_1 n_2$.

4.5. Tensores, sus componentes y sus contracciones

4.5.1. Componentes de un tensor

Denominaremos componentes de un tensor, aquellos números que surgen de incorporar bases de formas diferenciales y vectores. Así si $\{|u_i(1)\rangle, |v_j(2)\rangle, |t_k(3)\rangle\}$ y $\{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\}$ son bases para los vectores y las formas, respectivamente. Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S^{mn}_{ijk} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |t_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ\ , & \circ\ , & \circ\ ; & \bullet\ , & \bullet \end{array}\right]$$

claramente, esta definición de componente contiene a las componentes $c^{i,j}$ de aquellos espacios tensoriales generados por el producto tensorial. Ya si consideramos un tensor como resultado de un producto tensorial y consideramos que las base $\{|u_i(1)\rangle, \langle x^m(1)|\}$ su componentes se pueden expresar $\{\varphi^m(1)\chi_i(1)\}$, vale decir,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow |\varphi(1)\rangle \otimes \langle\Delta(1)| \Longrightarrow \langle x^m(1)\, |\varphi(1)\rangle \otimes \langle\Delta(1)|\, u_i(1)\rangle \Longleftrightarrow \{\varphi^m(1)\delta_i(1)\}$$

4.5.2. Combinaciones lineales de Tensores

Es claro que podremos sumar (componentes) de tensores como lo hemos hecho con la suma de (componentes) de vectores

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\,\hat{\imath} + (a_y + b_y)\,\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\,\hat{\mathbf{k}} = \left(a^1 + b^1\right)\hat{\imath} + \left(a^2 + b^2\right)\hat{\jmath} + \left(a^3 + b^3\right)\hat{\mathbf{k}} = \left(a^i + b^i\right)|\mathbf{e}_i\rangle$$

$$R^{ij}_{kl} = \left(\alpha Q^{ij}_{kl} + \beta P^{ij}_{kl}\right)$$

4.5.3. Producto Tensorial de Tensores

Podemos extender aún más la idea del producto directo y ahora realizarla entre tensores. Así dos tensores tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ si se cumple que

$$\left.\begin{array}{r} |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \mathcal{T}\left[\begin{array}{ccc} \langle\zeta(1)| & & \langle\xi(2)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & , & \bullet \end{array}\right] \\ \\ |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle = |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle\Theta\,(1)| = \mathcal{P}\left[\begin{array}{ccccc} |u_i(1)\rangle & & \langle\varepsilon(1)| & & \langle\phi(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & ; & \bullet & , & \bullet \end{array}\right] \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle\Theta\,(1)|$$

$$= \mathcal{T}\left[\begin{array}{ccc} \langle\zeta(1)| & & \langle\xi(2)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & , & \bullet \end{array}\right] \otimes \mathcal{P}\left[\begin{array}{ccccc} |u_i(1)\rangle & & \langle\varepsilon(1)| & & \langle\phi(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & ; & \bullet & , & \bullet \end{array}\right]$$

$$= \mathcal{R}\left[\begin{array}{ccccccccc} |u_i(1)\rangle & & \langle\varepsilon(1)| & & \langle\phi(2)| & & \langle\zeta(3)| & & \langle\xi(4)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & ; & \bullet & , & \bullet & , & \bullet & , & \bullet \end{array}\right]$$

4.5.4. Contracción de un Tensor

Denominaremos una contracción cuando sumamos las componentes covariantes y contravariantes, esto es $\varphi^i(1)\chi_i(1)$ lo cual genera un escalar independiente de la base. Esta situación será más evidente cuando definamos métricas y contracción de tensores. Por analogía y considerando un caso más general, dada una componente S^{mn}_{ijk} correspondiente a un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ podremos construir un nuevo tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir de una contracción. Las componentes de este nuevo tensor serán $S^{in}_{ijk} \equiv \tilde{S}^{n}_{jk}$. Del mismo modo, dadas las componentes de dos tensores, P^{lm} y Q^{ij}_{zk} generarán componentes de nuevos tensores $R^{lij}_{k} = P^{lm}Q^{ij}_{mk}$. Así

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{lm} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q^{ij}_{zk} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow R^{lij}_{k} = P^{lm}Q^{ij}_{mk}$$

Es claro que si dos tensores derivan de productos tensoriales y si $\{|u_i(1)\rangle\}, \{\langle u^m(1)|\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ son bases ortonormales para $\mathcal{E}_1$ $\mathcal{E}_1^*$y $\mathcal{E}_2$, entonces sus productos podrán ser expresados como

$$\left.\begin{array}{l} |\gamma(1)\delta(2)\rangle = \underbrace{\left(\gamma^i(1)\delta^j(2)\right)}_{P^{ij}} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \\ \\ |\alpha(1)\beta(1)\rangle = \underbrace{\left(\alpha^l(1)\beta_m(2)\right)}_{Q^l_m} |u_l(1)\rangle \otimes \langle u^m(1)| \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left[\left(\alpha^l(1)\beta_m(2)\right) |u_l(1)\rangle \otimes \langle u^m(1)|\right] \left[\left(\gamma^i(1)\delta^j(2)\right) |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle\right] \Longrightarrow$$

$$\alpha^l(1)\beta_m(2) \left(\gamma^i(1)\delta^j(2)\right) \underbrace{\{\langle u^m(1)\, |u_i(1)\rangle\}}_{\delta^m_i} |v_j(2)\rangle \otimes |u_l(1)\rangle \Longrightarrow$$

$$\alpha^l(1)\beta_k(2) \left(\gamma^k(1)\delta^j(2)\right) |v_j(2)\rangle \otimes |u_l(1)\rangle = P^{ij}Q^l_i\, |v_j(2)u_l(1)\rangle = R^{jl}\, |v_j(2)u_l(1)\rangle$$

Pero más aún si $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in \mathcal{E}$ es base de $\mathcal{E}$ entonces se puede demostrar lo anterior sin circunscribirnos a tensores cuyas componentes provengan de multiplicación de las componentes en cada espacio vectorial.

4.5.5. Simetrización de Tensores

Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}; \qquad S^{ij} = S^{ji}; \qquad S_{ij\cdots kl\cdots mn} = S_{ij\cdots lk\cdots mn} \qquad S^{ij\cdots kl\cdots mn} = S^{ij\cdots lk\cdots mn}$$

y será antisimétrico si

$$A_{ij} = -A_{ji}; \qquad A^{ij} = -A^{ji} \qquad A_{ij\cdots kl\cdots mn} = -A_{ij\cdots lk\cdots mn} \qquad A^{ij\cdots kl\cdots mn} = -A^{ij\cdots lk\cdots mn}$$

Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz. La matriz que representa un tensor de rango 2, tendrá como máximo 6 componentes distintas será

$$S^i_j = S^j_i = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 & S^1_3 \\ S^2_1 & S^2_2 & S^2_3 \\ S^3_1 & S^3_2 & S^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 & S^1_3 \\ S^1_2 & S^2_2 & S^2_3 \\ S^1_3 & S^2_3 & S^3_3 \end{pmatrix}$$

mientras que un tensor antisimétrico de segundo orden tendrá, cuando máximo, tres componentes con valor absoluto distintos de cero

$$A^i_j = -A^j_i = \begin{pmatrix} 0 & A^1_2 & A^1_3 \\ -A^2_1 & 0 & A^2_3 \\ -A^3_1 & -A^3_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow \quad S_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} + T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots(kl)\cdots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow \quad A_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} - T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots[kl]\cdots mn}$$

Más aún, es evidente que las componentes de un tensor genérico T_{ij}, pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}$$

Obviamente que algo equivalente se puede realizar para componentes contravariantes de tensores.

4.6. Tensor Métrico, Indices y Componentes

Para una base genérica, $\{|\mathbf{x}_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor simétrico $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos tensor métrico como

$$\mathbf{g}\left[\begin{array}{cc} |\mathbf{x}_i\rangle & |\mathbf{x}_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ \;, & \circ, \\ & \end{array}\right] = g_{ij} \equiv g_{ji} \quad \Longrightarrow \quad g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle\right]$$

$$\mathbf{g}\left[\begin{array}{cc} \langle\mathbf{x}^i| & \langle\mathbf{x}^j| \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet \;, & \bullet \\ & \end{array}\right] = g^{ij} \equiv g^{ij} \quad \Longrightarrow \quad g^{ij} \equiv g^{ij} = \left(g_{ij}\right)^{-1}$$

Nótese que las $g_{ij} \equiv g_{ji}$ son las componentes del tensor $\mathbf{g}\left[\begin{array}{cc} |\mathbf{x}_i\rangle & |\mathbf{x}_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ \;, & \circ, \\ & \end{array}\right]$ una vez que la base $\{|\mathbf{x}_j\rangle\}$ ha actuado. La denominación de tensor **métrico**, no es gratuita, $\mathbf{g}\left[\begin{array}{cc} |\mathbf{x}_i\rangle & |\mathbf{x}_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ \;, & \circ, \\ & \end{array}\right]$ cumple con todas las propiedades de la métrica definida para un espacio vectorial euclidiano. Vale decir

1. $\mathbf{g}\left[\begin{array}{cc} |\mathbf{x}_i\rangle & |\mathbf{x}_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ \;, & \circ, \\ & \end{array}\right] = \mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle\right] = g_{ij} \equiv g_{ji} \geq 0 \quad \forall\, |\mathbf{x}_j\rangle \qquad \text{y si} \quad \mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle\right] = 0 \Rightarrow i = j$

2. $\mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle\right] = \mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_j\rangle, |\mathbf{x}_i\rangle\right] \Rightarrow g_{ij} \equiv g_{ji}$

3. $\mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle\right] \leq \mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{z}_k\rangle\right] + \mathbf{g}\left[|\mathbf{z}_k\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle\right]$ La desigualdad Triangular

Si la base genérica, $\{|\mathbf{x}_j\rangle\}$, es ortonormal entonces estas propiedades emergen de manera natural y es claro que

$$\mathbf{g}\begin{bmatrix} \overset{|\mathbf{e}_i\rangle}{\downarrow} & \overset{|\mathbf{e}_j\rangle}{\downarrow} \\ \circ\,, & \circ, \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{g}\left[\circ,\circ\right] \equiv g_{ij}\left\langle \mathbf{e}^i\right| \otimes \left\langle \mathbf{e}^j\right| \equiv g_{ji}\left\langle \mathbf{e}^j\right| \otimes \left\langle \mathbf{e}^i\right| \qquad \text{y} \qquad \mathbf{g}\left[\bullet,\bullet\right] \equiv g^{ij}\left|\mathbf{e}_i\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_j\right\rangle \equiv g^{ji}\left|\mathbf{e}_j\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_i\right\rangle$$

con lo cual sus componentes serán matrices simétricas $g_{ij} = g_{ji}$ y igualmente $g^{ij} = g^{ji}$. En general impondremos que

$$\left(g_{ij}\left\langle \mathbf{e}^i\right| \otimes \left\langle \mathbf{e}^j\right|\right)\left(g^{km}\left|\mathbf{e}_k\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_m\right\rangle\right) = g_{ij}g^{km}\left\langle \mathbf{e}^i \,|\mathbf{e}_k\right\rangle\left\langle \mathbf{e}^j \,|\mathbf{e}_m\right\rangle = g_{ij}g^{km}\delta^i_k\delta^j_m = g_{ij}g^{ji} = \delta^i_i = n$$

ya que $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$. Con lo cual g_{ij} es la matriz inversa de g^{ij}. Es decir, claramente, hemos definido las componentes contravariantes del tensor de modo que cumplan con $g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i$

Adicionalmente, es también es claro que

$$\left(g_{ij}\left\langle \mathbf{e}^i\right| \otimes \left\langle \mathbf{e}^j\right|\right)|a\rangle = a^k\left(g_{ij}\left\langle \mathbf{e}^i\right| \otimes \left\langle \mathbf{e}^j\right|\right)|\mathbf{e}_k\rangle = a^k g_{ij}\left\langle \mathbf{e}^j \,|\mathbf{e}_k\right\rangle\left\langle \mathbf{e}^i\right| = a^k g_{ij}\delta^j_k\left\langle \mathbf{e}^i\right| = a^k g_{ik}\left\langle \mathbf{e}^i\right| \equiv a_i\left\langle \mathbf{e}^i\right|$$

con lo cual $a_i = a^k g_{ik}$. De esta manera, el tensor métrico nos permite asociar componentes covariantes a componentes contravariantes. Dicho rápido y mal pero muy frecuente, el tensor métrico nos permite subir y bajar índices. De la misma forma

$$\langle a|\left(g^{ij}\left|\mathbf{e}_i\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_j\right\rangle\right) = \langle a|\left(g^{ij}\left|\mathbf{e}_i\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_j\right\rangle\right) = g^{ij}\left\langle a \,|\mathbf{e}_i\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_j\right\rangle = a_k g^{ij}\left\langle \mathbf{e}^k \,|\mathbf{e}_i\right\rangle\left|\mathbf{e}_j\right\rangle = a_k g^{kj}\left|\mathbf{e}_j\right\rangle \equiv a^j\left|\mathbf{e}_j\right\rangle$$

otra vez $a^j = a_k g^{kj}$, y subimos el índice correspondiente. La importancia de esta

Otra forma de verlo es combinando las propiedades del producto directo de tensores y contracción de índices

$$g^{ij}\left|\mathbf{e}_i\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_j\right\rangle \otimes P^{lmn}_k\left|\mathbf{e}_l\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_m\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_n\right\rangle \otimes \left\langle \mathbf{e}^k\right| \qquad \Longrightarrow$$

$$g^{ij}P^{lmn}_k\left|\mathbf{e}_j\right\rangle \otimes P^{lmn}_k\left|\mathbf{e}_l\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_m\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_n\right\rangle \otimes \left\langle \mathbf{e}^k \right|\left.\mathbf{e}_i\right\rangle =$$

$$g^{ij}P^{lmn}_k\left|\mathbf{e}_j\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_l\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_m\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_n\right\rangle \cdot \underbrace{\left\langle \mathbf{e}^k \right|\left.\mathbf{e}_i\right\rangle}_{\delta^k_i} = P^{jlmn}\left|\mathbf{e}_j\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_l\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_m\right\rangle \otimes \left|\mathbf{e}_n\right\rangle$$

$$g^{ij}P^{lmn}_i \equiv P^{jlmn}$$

Adicionalmente, el tensor métrico permite la contracción de índices. Así, dado un producto tensorial de dos vectores que se pueden expresar en una base ortonormal

$$|a,b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = a^k b^m \, |\mathbf{e}_k\rangle \otimes |\mathbf{e}_m\rangle$$
$$\Downarrow$$
$$\left(g_{ij} \left\langle \mathbf{e}^i \right| \otimes \left\langle \mathbf{e}^j \right|\right) \left(a^k \, |\mathbf{e}_k\rangle \otimes b^m \, |\mathbf{e}_m\rangle\right) = a^k b^m g_{ij} \delta^i_k \delta^j_m = a^k b^m g_{km} = a^k b_k = \langle b \, |a\rangle = \langle a \, |b\rangle$$

Con lo cual ,el producto interno de dos vectores involucra, de manera natural, la métrica del espacio. Esto es

$$\langle b \, |a\rangle = \langle a \, |b\rangle = a^k b_k = a_k b^k = a^k b^m g_{km} = a_k b_m g^{km}$$

Obviamente la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\| |a\rangle \|^2 = \langle a \, |a\rangle = a_i a^j \left\langle \mathbf{e}^i \, |\mathbf{e}_j\right\rangle = a_i a^i = a_i a_j \; g^{ij} = a^i a^j \; g_{ij}$$

El caso más emblemático lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal. Para una base genérica, $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ no necesariamente ortogonal de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como

$$(\mathrm{d}s)^2 \equiv \langle \mathrm{d}\mathbf{r} \, |\mathrm{d}\mathbf{r}\rangle = \left(\mathrm{d} \; \tilde{x}_k \; \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k \right|\right) \left(\mathrm{d} \; \tilde{x}^m \; \; |\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\right) = \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^k \, |\tilde{\mathbf{e}}_m\right\rangle \; \mathrm{d} \; \tilde{x}_k \; \mathrm{d} \; \tilde{x}^m = \mathrm{d} \; \tilde{x}_m \; \mathrm{d} \; \tilde{x}^m = \tilde{g}_{km} \; \mathrm{d} \; \tilde{x}^k \mathrm{d} \; \tilde{x}^m$$

Si la base $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ es ortogonal (cosa más o menos común pero no necesariamente cierta siempre) las matrices g_{ij} y g^{ij} son diagonales cumplen con

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} \qquad \Longrightarrow (\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1 \; \mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2 \; \mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3 \; \mathrm{d}x^3\right)^2$$

donde $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ con $i, j = 1, 2, 3$.

5. Un par de tensores

5.1. El tensor de esfuerzos (stress)

5.1.1. El caso 2D

Supongamos un cuerpo que se encuentra en equilibrio y está sometido a un conjunto de fuerzas externas. Para facilitar las cosas consideremos el efecto de esas fuerzas sobre un plano que contiene a un determinado punto P (ver figura 1 cuadrante Ia) Es decir, vamos a considerar los efectos de las componentes de todas las fuerzas sobre ese plano y obviaremos efecto del resto de las componentes. Como observamos en la figura 1 Ib y Ic, si cortamos la superficie en dos líneas (AB y $A'B'$), observaremos que el efecto del conjunto de fuerzas externas es distinto sobre P en la dirección perpendicular a cada una de esas líneas. De hecho al “cortar” la superficie las fuerzas que aparecen sobre las líneas AB (y $A'B'$) antes eran fuerzas internas y ahora los son externas al nuevo cuerpo

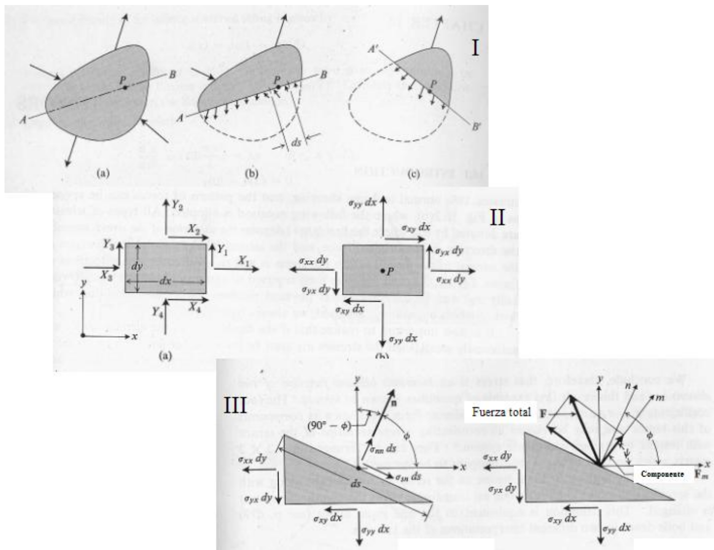

Figura 1: Tensor de Esfuerzos (*stress*) en 2 dimensiones

"cortado". Así, estas fuerzas por unidad de longitud[1] sobre el punto P existen un conjunto de fuerzas que generan esfuerzos (*stress*). Por lo tanto es claro que los esfuerzos sobre un punto dependen del punto, de las fuerzas externas y de la dirección del efecto.

Para irnos aclarando consideremos un elemento de área infinitesimal $\mathrm{d}s$ sobre la cual actúan un conjunto de fuerzas externas, las cuales las podemos descomponer como normales y tangenciales a la línea sobre la cual están aplicadas (ver figura 1 cuadrante II). Es costumbre denotar los esfuerzos normales y tangenciales

$$
\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc}
 & \uparrow Y_2 = \sigma_2 \mathrm{d}x \quad \longrightarrow X_2 = \tau_2 \mathrm{d}x & \\
 & \mathrm{d}x & \\
Y_3 = \tau_3 \mathrm{d}y \uparrow & & \uparrow Y_1 = \tau_1 \mathrm{d}y \\
X_3 = \sigma_3 \mathrm{d}y \rightarrow & \mathrm{d}y \quad \mathrm{d}s \quad \mathrm{d}y & \rightarrow X_1 = \sigma_1 \mathrm{d}y \\
 & \mathrm{d}x & \\
 & \uparrow Y_4 = \sigma_4 \mathrm{d}x \quad \rightarrow X_4 = \tau_4 \mathrm{d}x &
\end{array} \right.
$$

La segunda ley de Newton nos lleva a

$$
\sum \vec{F}_i^{ext} = \mathrm{d}m\ \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
\tau_1 \mathrm{d}y + \sigma_2 \mathrm{d}x + \tau_3 \mathrm{d}y + \sigma_4 \mathrm{d}x = 0 = (\sigma_2 + \sigma_4)\,\mathrm{d}x + (\tau_1 + \tau_3)\,\mathrm{d}y \\
\\
\sigma_1 \mathrm{d}y + \tau_2 \mathrm{d}x + \sigma_3 \mathrm{d}y + \tau_4 \mathrm{d}x = 0 = (\tau_2 + \tau_4)\,\mathrm{d}x + (\sigma_1 + \sigma_3)\,\mathrm{d}y
\end{array} \right.
$$

con lo cual

$$
\sigma_2 = -\sigma_4; \qquad \tau_1 = -\tau_3
$$

$$
\tau_2 = -\tau_4 \qquad \sigma_1 = -\sigma_3
$$

[1]En el caso tridimensional, las fuerzas que generan los esfuerzos serán definidas como fuerzas por unidad de área. Ese caso lo veremos en la próxima sección.

pero más aún, como está en equilibrio, también la sumatoria de torques se tendrá que anular. Esto es

$$\left.\begin{array}{l}(\tau_1 \mathrm{d}y)\,\frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_2 \mathrm{d}x)\,\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0 \\ \\ (\tau_3 \mathrm{d}y)\,\frac{\mathrm{d}x}{2} - (\tau_4 \mathrm{d}x)\,\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$$

con lo cual, nos damos cuenta que existen sólo tres cantidades independientes: dos esfuerzos normales σ_1 y σ_2; y un esfuerzo tangencial τ_1. Adicionalmente notamos que los esfuerzos tienen que ver, con la dirección de la fuerza y la superficie sobre la cual va aplicada. Con ello podemos diseñar la siguiente notación para los esfuerzos: σ_{ij}. El primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo dirección de la normal de la superficie donde está aplicada. Así, tal y como muestra la figura (ver figura 1 cuadrante II)

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{xx}; \quad -\sigma_4 \equiv \sigma_{yy}; \quad \tau_2 \equiv \sigma_{xy} \equiv \sigma_{yx}$$

El cambio de signo se debe a lo incómodo de la notación $\sigma_4 \equiv \sigma_{y-y}$ ya que la normal de lado 4 apunta en la dirección $-y$. Es importante también señalar que los esfuerzos en cualquier punto contenido en el diferencial de área $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ deben ser considerado constantes. O, lo que es lo mismo, que podemos hacer tender a cero el área del diferencial y con ello asociar los esfuerzos σ_{ij} a un punto P contenido en $\mathrm{d}A$ sobre la cual hemos calculado los esfuerzos.

En esta misma línea de razonamiento, nos podemos preguntar cual es la expresión de los esfuerzos cuando se miden respecto a una superficie genérica, definida por un vector normal $\vec{n}$ (ver figura 1 cuadrante III). Es decir, queremos conocer los esfuerzos medidos en el punto P en la dirección $\vec{n}$, es decir σ_{nn}. Tendremos que en

$$x \to \sigma_{xx}\mathrm{d}y + \sigma_{xy}\mathrm{d}x = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\cos\phi + \sigma_{sn}\mathrm{d}s\,\mathrm{sen}\,\phi; \quad y \to \sigma_{yy}\mathrm{d}x + \sigma_{yx}\mathrm{d}y = \sigma_{nn}\mathrm{d}s\,\mathrm{sen}\,\phi - \sigma_{sn}\mathrm{d}s\cos\phi$$

Ahora bien, dado que $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\cos\phi$ y $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\,\mathrm{sen}\,\phi$, entonces podemos expresar

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx}\cos^2\phi + \sigma_{xy}\sin\phi\cos\phi + \sigma_{yx}\sin\phi\cos\phi + \sigma_{yy}\sin^2\phi$$

$$\sigma_{sn} = \sigma_{xx}\sin\phi\cos\phi + \sigma_{xy}\sin^2\phi - \sigma_{yx}\cos^2\phi - \sigma_{yy}\sin\phi\cos\phi$$

y si ahora nos damos cuenta que si construimos una matriz

$$A^i_j = \begin{pmatrix} A^x_n = \cos\phi & A^x_s = \sin\phi \\ A^y_n = \sin\phi & A^y_s = -\cos\phi \end{pmatrix}$$

entonces podemos expresar

$$\sigma_{nn} = A^x_n A^x_n \sigma_{xx} + A^x_n A^y_n \sigma_{xy} + A^y_n A^x_n \sigma_{yx} + A^y_n A^y_n \sigma_{yy} \quad \to \sigma_{nn} = A^i_n A^j_n \sigma_{ij} \quad \text{con } i,j = n,s$$

$$\sigma_{sn} = A^x_s A^x_n \sigma_{xx} + A^x_s A^y_n \sigma_{xy} + A^y_s A^x_n \sigma_{yx} + A^y_s A^y_n \sigma_{yy} \quad \to \sigma_{sn} = A^i_n A^j_n \sigma_{ij} \quad \text{con } i,j = n,s$$

es decir $\sigma_{kl} = A^i_k A^j_l \sigma_{ij}$ con $i,j,k,l = n,s$.

Como veremos más adelante, cualquier objeto que transforme como $\sigma_{kl} = A^i_k A^j_l \sigma_{ij}$ lo llamaremos tensor de segundo orden.

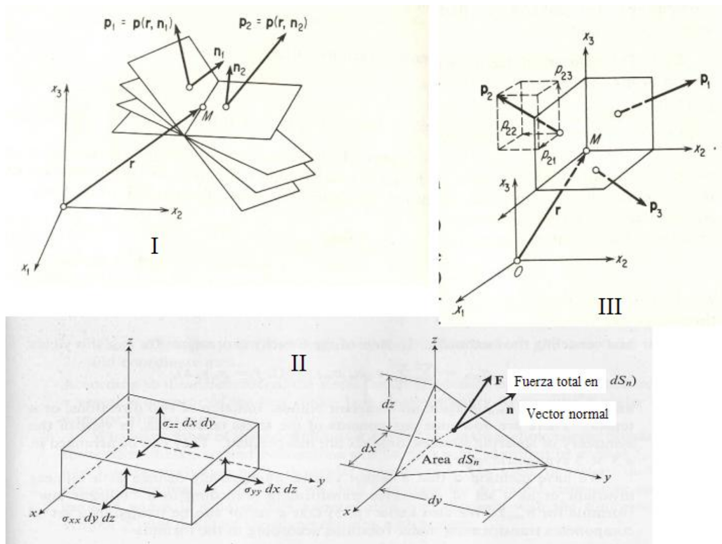

Figura 2: Tensor de Esfuerzos en 3 dimensiones

5.1.2. El caso 3D

Analicemos ahora el caso tridimensional. En este caso también procedemos como en el caso anterior estableciendo las condiciones de equilibrio

$$\sum \vec{F}_i^{ext} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \vec{\tau}_i^{ext} = 0$$

con ello construimos un volumen (cúbico) diferencial y construimos los esfuerzos normales y tangenciales, los cuales serán

$$\sigma_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z; \quad \sigma_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}z; \quad \sigma_{zz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \quad \sigma_{xz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \quad \sigma_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \quad \sigma_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}z;$$

Siguiendo el mismo proceso que involucra imponer el equilibrio es fácil demostrar que al igual que el caso anterior, el tensor de esfuerzos σ_{ij} cumple con:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

y por lo tanto tendremos 6 componentes (tres normales y tres tangenciales) independientes. Es decir, si bien el tensor de esfuerzos σ_{ij} viene representado por una matriz 3×3 y por lo tanto tiene 9 elementos, sólo 6 son independientes. Construyamos ahora el caso general para un tensor de esfuerzos en un medio elástico. Para ello construimos un tetraedro regular tal y como muestra la figura 2, y sobre su cara genérica asociada a un vector normal $\vec{n}$ una fuerza

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \hat{u}_n = F^i \mathrm{I}_i = F_x \hat{\imath} + F_y \hat{\jmath} + F_z \hat{\mathrm{k}} \quad \to \left\{ \begin{array}{c} F_x = \sigma_{xn}\mathrm{d}S_n \\ \\ F_y = \sigma_{yn}\mathrm{d}S_n \\ \\ F_z = \sigma_{zn}\mathrm{d}S_n \end{array} \right\} \quad \to F^i = \sigma^i_j n^j \mathrm{d}S \quad \to \vec{F} = \sigma \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

se especifica como la fuerza que actúa sobre un determinado elemento de superficie. Es claro que la condición de equilibrio se traduce en

$$\sum F_{xi} = 0 \quad \rightarrow \sigma_{xn} \mathrm{d}S_n - \frac{1}{2}\sigma_{xx} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{xy} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{xz} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0$$

$$\sum F_{yi} = 0 \quad \rightarrow \sigma_{yn} \mathrm{d}S_n - \frac{1}{2}\sigma_{yx} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{yy} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{yz} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0$$

$$\sum F_{zi} = 0 \quad \rightarrow \sigma_{zn} \mathrm{d}S_n - \frac{1}{2}\sigma_{zx} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{zy} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\sigma_{zz} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 0$$

Si consideramos que la proyección de $\mathrm{d}S_n$ sobre cada uno de los planos del sistema cartesiano tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{d}S^n \cos(\hat{\imath};\vec{n}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}S^n\ A^x_n \\ \\ \mathrm{d}S^n \cos(\hat{\jmath};\vec{n}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}S^n\ A^y_n \\ \\ \mathrm{d}S^n \cos(\hat{\mathrm{k}};\vec{n}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}S^n\ A^z_n \end{array}\right\} \quad \rightarrow \sigma_{xn} = \sigma_{xx} A^x_n + \sigma_{xy} A^y_n + \sigma_{xz} A^z_n$$

y equivalentemente

$$\sigma_{yn} = \sigma_{yx} A^x_n + \sigma_{yy} A^y_n + \sigma_{yz} A^z_n; \quad \mathrm{y} \quad \sigma_{zn} = \sigma_{zx} A^x_n + \sigma_{zy} A^y_n + \sigma_{zz} A^z_n$$

las cuales se conocen como las relaciones de Cauchy y representan los esfuerzos sobre la superficie con normal $\vec{n}$. Ahora bien, dado que $\vec{F} = \sigma \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ es una relación vectorial podemos proyectar en la dirección $\hat{u}_m$

$$\hat{u}_m \cdot \vec{F} = \hat{u}_m \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \rightarrow F^m = \sigma^m_n \mathrm{d}S^n = \left(\sigma^m_i A^i_n\right) \mathrm{d}S^n = \left(\sigma^m_i A^i_n\right) \mathrm{d}S^n$$

$$\sigma_{mn} \mathrm{d}S^n = \left(\sigma_{mi} A^i_n\right) \mathrm{d}S^n \quad \rightarrow \sigma_{mn} \mathrm{d}S^n = \left(\sigma_{ki} A^k_m A^i_n\right) \mathrm{d}S^n \quad \text{con } i,j = x,y,z$$

Una vez más vemos que transforma como un tensor.

5.2. El Tensor de Inercia

Consideremos el caso de un sistema de n partículas. La cantidad de movimiento angular para este sistema vendrá dada por

$$\vec{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\vec{r}_{(i)} \times \vec{v}_{(i)}\right)$$

donde hemos indicado que la $i-$ésima partícula que está en la posición $\vec{r}_{(i)}$ tiene una velocidad $\vec{v}_{(i)}$. Si las distancias entre las partículas y entre las partículas y el origen de coordenadas es constante podremos expresar la velocidad de cada una de ellas como

$$\vec{v}_{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(i)}$$

(¿ por qué ?). Donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema. Entonces tendremos que

$$\vec{L} = \sum_i m_{(i)} \left(\vec{r}_{(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{(i)}\right)\right) = \sum_i m_{(i)} \left(\vec{\omega}\left(\vec{r}_{(i)} \cdot \vec{r}_{(i)}\right) - \vec{r}_{(i)}\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{(i)}\right)\right)$$

y para cada partícula se cumple que, las componentes de la cantidad de movimiento angular serán

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left(\omega^k \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(\omega^m r_{(i)m}\right)\right)$$

Si vemos que $\omega^k_{(i)} = \delta^k_l \omega^l_{(i)}$ entonces

$$L^k = \left(\sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \omega^l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(\omega^m r_{(i)m}\right)\right)\right) = \omega^l_{(i)} \underbrace{\left(\sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(r_{(i)l}\right)\right)\right)}_{I^k_l}$$

es decir

$$L^k = \omega^l_{(i)} I^k_l \qquad \text{donde } I^k_l = \sum_i m_{(i)} \left(\delta^k_l \left(r^m_{(i)} r_{(i)m}\right) - r^k_{(i)} \left(r_{(i)l}\right)\right)$$

el objeto I^k_l se conoce como el tensor de inercia y corresponde a 9 cantidades (a pesar que sólo 6 son independientes porque es un tensor simétrico)

$$I^k_l = \begin{pmatrix} I_{xx} = \sum_i m_{(i)} \left(y^2_{(i)} + z^2_{(i)}\right) & I_{xy} = -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)}\right) & I_{xz} = -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)}\right) \\ I_{yx} = \sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)}\right) & I_{yy} = \sum_i m_{(i)} \left(x^2_{(i)} + z^2_{(i)}\right) & I_{yz} = -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)}\right) \\ I_{zx} = \sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)}\right) & I_{zy} = \sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)}\right) & I_{zz} = \sum_i m_{(i)} \left(z^2_{(i)} + y^2_{(i)}\right) \end{pmatrix}$$

nos contentaremos por ahora, suponer que esta construcción es un tensor y lo demostraremos más adelante.

6. Repensando los vectores, otra vez

6.1. Vectores, Covectores y Leyes de Transformación

Hemos visto que un determinado vector $|a\rangle \in V$ puede expresarse en una base ortogonal $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ como $a^j\,|\mathbf{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes del vector *contravariantes* en la base que se ha indicado. En general, como es muy largo decir "componentes del vector contravariante" uno se refiere (y nos referiremos de ahora en adelante) al conjunto $\left\{a^j\right\}$ como un *vector contravariante* obviando la precisión de *componente*, pero realmente las a^j **son** las componentes del vector.

Adicionalmente, en esta etapa pensaremos a las bases como distintos observadores o sistemas de referencias. Con ello tendremos (algo que ya sabíamos) que un vector se puede expresar en distintas bases y tendrá distintas componentes referidas a esa base

$$|a\rangle = a^j \, |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^j \, |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$$

Así una misma cantidad física vectorial "se verá" distinta (tendrá distintas componentes) desde diferentes sistemas de coordenadas. Las distintas "visiones" están conectadas mediante un transformación de sistema de referencia que veremos más adelante.

Igualmente hemos dicho que una forma diferencial $\langle b| \in V^*$ es susceptible de expresarse en una base $\left\{\left\langle \mathbf{e}^i \right|\right\}$ del espacio dual V^* como $b_i \left\langle \mathbf{e}^i \right|$ y, como el espacio está equipado con un producto interno entonces

$$\langle a \,|b\rangle = \langle b \,|a\rangle = \left(b_i \left\langle \mathbf{e}^i \right|\right) \cdot \left(a^j \, |\mathbf{e}_j\rangle\right) = b_i a^j \delta^i_j = a^i b_i$$

Con lo cual avanzamos otra vez en la interpretación de cantidades físicas: una cantidad física escalar "se vera" igual (será invariante) desde distintos sistemas de referencia.

Además sabemos que unas y otras componentes se relacionan como

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle \mathbf{e}^i \,|a\right\rangle = a^j \left\langle \mathbf{e}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle = a^j \delta^i_j = \tilde{a}^j \left\langle \mathbf{e}^i \,|\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle \\ \\ \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \,|a\right\rangle = \tilde{a}^j \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \,|\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle = \tilde{a}^j \delta^i_j = a^j \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^i = A^i_j \tilde{a}^j \\ \\ \tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j \end{array}\right.$$

donde claramente

$$\left\langle \mathbf{e}^i \,|\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle = A^i_j; \qquad \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle = \tilde{A}^i_j \qquad \text{y} \quad A^i_k \tilde{A}^k_j = \delta^i_j \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{A}^i_j = \left(A^i_j\right)^{-1}$$

Diremos entonces que aquellos objetos cuyas componentes transforman como $a^i = A^i_j \tilde{a}^j$ o equivalentemente $\tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j$ serán vectores o en un lenguaje un poco más antiguo, vectores contravariantes. Tradicionalmente, e inspirados en la ley de transformación, la representación matricial de las componentes contravariantes de un vector, $\left\langle \mathbf{e}^i \,|a\right\rangle = a^j$, para una base determinada $\{|\mathbf{e}_j\rangle\}$ se estructuran en una columna

$$|a\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left\langle \mathbf{e}^i \,|a\right\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \cdots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{array}\right)$$

De la misma manera, en el espacio dual, V^*, las formas diferenciales se podrán expresar en término de una base de ese espacio vectorial como $\langle b| = b_i \left\langle \mathbf{e}^i \right| = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \right|$ Las $\{b_i\}$ serán las componentes de las formas diferenciales o las componentes *covariantes* de un vector $|b\rangle$ o dicho rápidamente un *vector covariante* o *covector*. Al igual que en el caso de las componentes contravariantes las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente "ley de transformación":

$$\left.\begin{array}{l} \langle b \,|\mathbf{e}_j\rangle = b_i \left\langle \mathbf{e}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle = b_i \delta^i_j = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \,|\mathbf{e}_j\right\rangle \\ \\ \langle b \,|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = \tilde{b}_i \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \,|\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle = \tilde{b}_i \delta^i_j = b_i \left\langle \mathbf{e}^i \,|\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_i = \tilde{b}_i A^i_j \\ \\ \tilde{b}_i = b_i \tilde{A}^i_j \end{array}\right.$$

Otra vez, objetos cuyas componentes transformen como $b_i = \tilde{b}_i A^i_j$ los denominaremos formas diferenciales o *vectores covariantes* o *covectores* y serán representados matricialmente como un arreglo tipo fila

$$\langle b| \quad \Longrightarrow \quad \langle b\, |\mathbf{e}_j\rangle \qquad \text{con } i = 1,2,3,\cdots,n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

6.2. Cartesianas y Polares, otra vez

El ejemplo más simple, y por ello, clásico y emblemático de lo anterior lo constituye las expresiones de un mismo vector en dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle\}$ y $\{|\mathbf{u}_r\rangle, |\mathbf{u}_\theta\rangle\}$. Esto es

$$|a\rangle = a_x\, |\mathbf{i}\rangle + a_x\, |\mathbf{j}\rangle = a^1\, |\mathbf{e}_1\rangle + a^2\, |\mathbf{e}_2\rangle \qquad \text{y} \qquad |a\rangle = a_r\, |\mathbf{u}_r\rangle + a_\theta\, |\mathbf{u}_\theta\rangle = \tilde{a}^1\, |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2\, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle$$

Al expresar una base en términos de la otra obtenemos

$$|\mathbf{u}_r\rangle = \cos\theta\ \ |\mathbf{i}\rangle + \operatorname{sen}\theta\ \ |\mathbf{j}\rangle \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{u}_\theta\rangle = -\operatorname{sen}\theta\ \ |\mathbf{i}\rangle + \cos\theta\ \ |\mathbf{j}\rangle$$

con lo cual

$$\left\langle \mathbf{e}^i\, |\tilde{\mathbf{e}}_j\right\rangle = A^i_j \quad \Longleftrightarrow \quad A^i_j = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{i}\, |\mathbf{u}_r\rangle & \langle \mathbf{i}\, |\mathbf{u}_\theta\rangle \\ \langle \mathbf{j}\, |\mathbf{u}_r\rangle & \langle \mathbf{j}\, |\mathbf{u}_\theta\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y

$$\left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i\, |\mathbf{e}_j\right\rangle = \tilde{A}^i_j \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{A}^i_j = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}_r\, |\mathbf{i}\rangle & \langle \mathbf{u}_r\, |\mathbf{j}\rangle \\ \langle \mathbf{u}_\theta\, |\mathbf{i}\rangle & \langle \mathbf{u}_\theta\, |\mathbf{j}\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

cumpliendo además

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad A^i_k \tilde{A}^k_j = \delta^i_j$$

De este modo si

$$|a\rangle = a_r\, |\mathbf{u}_r\rangle + a_\theta\, |\mathbf{u}_\theta\rangle = \tilde{a}^1\, |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2\, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = a_x\, |\mathbf{i}\rangle + a_x\, |\mathbf{j}\rangle = a^1\, |\mathbf{e}_1\rangle + a^2\, |\mathbf{e}_2\rangle$$

tendremos que

$$\tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x\cos\theta + a_y \operatorname{sen}\theta \\ -a_x \operatorname{sen}\theta + a_y\cos\theta \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$a_r = a_x\cos\theta + a_y\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad a_\theta = -a_x\operatorname{sen}\theta + a_y\cos\theta$$

del mismo modo

$$a^i = A^i_j \tilde{a}^j \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r\cos\theta - a_\theta\operatorname{sen}\theta \\ a_r\operatorname{sen}\theta + a_\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

y

$$a_x = a_r\cos\theta - a_\theta\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad a_y = a_r\operatorname{sen}\theta + a_\theta\cos\theta$$

6.3. Repensando las componentes

En general podemos pensar que las componentes de los vectores pueden ser funciones de las otras. Consideremos el ejemplo anterior con esta visión. Tendremos que un punto en el plano viene representado en coordenadas cartesianas por dos números (x, y) y en coordenadas polares por otros dos números (r, θ). Siguiendo el ejemplo anterior un punto P, en el plano lo describimos como

$$|P\rangle = r_P\,|\mathbf{u}_r\rangle = x_P\,|\mathbf{i}\rangle + y_P\,|\mathbf{j}\rangle$$

Veamos como están relacionadas estas dos descripciones. Para este caso las ecuaciones de transformación son

$$\left.\begin{array}{c} x_P = x_P\,(r,\theta) = x^1 = x^1\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\right) \\ y_P = y_P\,(r,\theta) = x^2 = x^2\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\right) \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} r_P = r_P\,(x,y) = \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1\left(x^1, x^2\right) \\ \theta = \theta_P\,(x,y) = \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2\left(x^1, x^2\right) \end{array}\right.$$

y explícitamente

$$\begin{array}{rcl} x_P = r_P\;\cos\theta_P & \Longrightarrow & x^1 = \tilde{x}^1\;\cos\tilde{x}^2 \\ y_P = r_P\;\operatorname{sen}\theta_P & \Longrightarrow & x^2 = \tilde{x}^1\;\operatorname{sen}\tilde{x}^2 \end{array}$$

$$\text{y}$$

$$\begin{array}{lcl} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} & \Longrightarrow & \tilde{x}^1 = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2} \\ \theta_P = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) & \Longrightarrow & \tilde{x}^2 = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \end{array}$$

Es claro que ambas coordenadas están relacionadas y que se puede invertir la relación

$$\left.\begin{array}{c} \tilde{x}^1 = \tilde{x}^1\left(x^1, x^2\right) \\ \tilde{x}^2 = \tilde{x}^2\left(x^1, x^2\right) \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x^1 = x^1\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\right) \\ x^2 = x^2\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\right) \end{array}\right.$$

si se piden cosas razonables:

- que las funciones $x^i = x^i\,(\tilde{x}^m)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j\,(x^m)$ sean al menos $\mathcal{C}^2$ (función y derivada continua)
- que el determinante de la matriz Jacobiana sean finito y distinto de cero $\det\left(\frac{\partial\; x^i\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\right)}{\partial\;\tilde{x}^l}\right) \neq 0.$

Más aún, si

$$x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\,(x^m)\right) \quad \Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \frac{\partial\; x^i}{\partial\;\tilde{x}^k}\frac{\partial\;\tilde{x}^k}{\partial\; x^l} = \delta^i_l \quad \Longrightarrow \mathrm{d}\; x^i = \frac{\partial\; x^i}{\partial\;\tilde{x}^k}\mathrm{d}\;\tilde{x}^k$$

con lo cual intuímos dos cosas:

1. que las componentes de un vector, deben transformar bajo un cambio de coordenadas como $x^i = \frac{\partial\; x^i\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\right)}{\partial\;\tilde{x}^l}\tilde{x}^l$.
2. Las matrices Jacobianas $\frac{\partial\; x^i}{\partial\;\tilde{x}^k}$ y $\frac{\partial\;\tilde{x}^i}{\partial\; x^k}$ son una la inversa de la otra.

Veamos si es cierto para el caso de vectores en el plano. Para ello calculamos la matriz Jacobiana (matriz de derivadas) la cual será

$$\left(\frac{\partial\ x^i\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^l}\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{\partial\ x^1\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^1} & \frac{\partial\ x^1\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^2}\\ \frac{\partial\ x^2\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^1} & \frac{\partial\ x^2\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\cos\tilde{x}^2 & -\tilde{x}^1\operatorname{sen}\tilde{x}^2\\ \operatorname{sen}\tilde{x}^2 & \tilde{x}^1\cos\tilde{x}^2\end{array}\right)$$

y seguidamente, identificando

$$x^i=\frac{\partial\ x^i\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^l}\tilde{x}^l\quad\Longrightarrow\left(\begin{array}{c}x^1\\ x^2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\cos\tilde{x}^2 & -\tilde{x}^1\operatorname{sen}\tilde{x}^2\\ \operatorname{sen}\tilde{x}^2 & \tilde{x}^1\cos\tilde{x}^2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\tilde{x}^1\\ 0\end{array}\right)$$

Igualmente, si calculamos la inversa de la matriz Jacobiana

$$\left(\frac{\partial\ x^i\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2\right)}{\partial\ \tilde{x}^l}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cc}\cos\tilde{x}^2 & \operatorname{sen}\tilde{x}^2\\ \frac{-\operatorname{sen}\tilde{x}^2}{\tilde{x}^1} & \frac{\cos\tilde{x}^2}{\tilde{x}^1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\\ \frac{-x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\end{array}\right)$$

tendremos

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{x}^1\\ 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\\ \frac{-x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x^1\\ x^2\end{array}\right)\quad\Longrightarrow\tilde{x}^i=\frac{\partial\ \tilde{x}^i\left(x^1,x^2\right)}{\partial\ x^l}x^l$$

Es decir

$$\tilde{x}^1=\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2}\quad\Longrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}\qquad\text{y}\qquad 0=0$$

Supongamos ahora que tenemos el caso tridimensional en esos mismos dos sistemas de coordenadas: uno cartesiano $\left(x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z\right)$ y otro esférico $\left(\tilde{x}^1=r,\quad\tilde{x}^2=\theta,\quad\tilde{x}^3=\phi\right)$, tal y como hemos supuesto anteriormente el punto P vendrá descrito por

$$|P\rangle=r_P\,|\mathbf{u}_r\rangle=x_P\,|\mathbf{i}\rangle+y_P\,|\mathbf{j}\rangle+z_P\,|\mathbf{k}\rangle$$

otra vez

$$\left.\begin{array}{c}x=x\left(r,\theta,\phi\right)=x^1=x^1\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3\right)\\ y=y\left(r,\theta,\phi\right)=x^2=x^2\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3\right)\\ z=z\left(r,\theta,\phi\right)=x^3=x^3\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3\right)\end{array}\right\}\quad\Longleftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{c}r=r\left(x,y,z\right)=\tilde{x}^1=\tilde{x}^1\left(x^1,x^2,x^3\right)\\ \theta=\theta\left(x,y,z\right)=\tilde{x}^2=\tilde{x}^2\left(x^1,x^2,x^3\right)\\ \phi=\phi\left(x,y,z\right)=\tilde{x}^3=\tilde{x}^3\left(x^1,x^2,x^3\right)\end{array}\right.$$

Las ecuaciones de transformación serán

$$\begin{array}{lcl}x_P=r_P\ \operatorname{sen}\theta_P\ \cos\phi_P & \Longrightarrow & x^1=\tilde{x}^1\ \operatorname{sen}\tilde{x}^2\ \cos\tilde{x}^3\\ y_P=r_P\ \operatorname{sen}\theta_P\ \operatorname{sen}\phi_P & \Longrightarrow & x^2=\tilde{x}^1\ \operatorname{sen}\tilde{x}^2\ \operatorname{sen}\tilde{x}^3\\ z_P=r_P\ \cos\theta_P & \Longrightarrow & x^3=\tilde{x}^1\ \cos\tilde{x}^2\end{array}$$

y

$$\begin{array}{lcl}r_P=\sqrt{x_P^2+y_P^2+z_P^2} & \Longrightarrow & \tilde{x}^1=\sqrt{\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2+\left(x^3\right)^2}\\ \phi_P=\arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) & \Longrightarrow & \tilde{x}^2=\arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right)\\ \theta_P=\arctan\left(\frac{\sqrt{x_P^2+y_P^2}}{z_P}\right) & \Longrightarrow & \tilde{x}^3=\arctan\left(\frac{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}{x^3}\right)\end{array}$$

con lo cual la matriz de las derivadas será para esta transformación en particular será

$$\frac{\partial\ x^i\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3\right)}{\partial\ \tilde{x}^l}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) & -r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi) & r\operatorname{sen}(\theta)\cos(\phi) & r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

es decir

$$\frac{\partial\ x^i\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3\right)}{\partial\ \tilde{x}^l}=\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\left(\tilde{x}^2\right)\cos\left(\tilde{x}^3\right) & -\tilde{x}^1\operatorname{sen}\left(\tilde{x}^2\right)\operatorname{sen}\left(\tilde{x}^3\right) & \tilde{x}^1\cos\left(\tilde{x}^2\right)\cos\left(\tilde{x}^3\right) \\ \sin\left(\tilde{x}^2\right)\sin\left(\tilde{x}^3\right) & \tilde{x}^1\operatorname{sen}\left(\tilde{x}^2\right)\cos\left(\tilde{x}^3\right) & \tilde{x}^1\cos\left(\tilde{x}^2\right)\operatorname{sen}\left(\tilde{x}^3\right) \\ \cos\left(\tilde{x}^2\right) & 0 & -\tilde{x}^1\operatorname{sen}\left(\tilde{x}^2\right) \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$\frac{\partial\ \tilde{x}^i\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\ x^l}=\begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta) \\ -\frac{\operatorname{sen}(\phi)}{r\operatorname{sen}(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r\operatorname{sen}(\theta)} & 0 \\ \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r} & \frac{\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)}{r} & -\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{r} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\ \tilde{x}^i\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\ x^l}=\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)} \end{pmatrix}$$

dejaremos al lector comprobar que, efectivamente,

$$x^i=\frac{\partial\ x^i\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\tilde{x}^3\right)}{\partial\ \tilde{x}^l}\tilde{x}^l \quad\Longleftrightarrow\quad \tilde{x}^i=\frac{\partial\ \tilde{x}^i\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\ x^l}x^l$$

7. Transformaciones, vectores y tensores

En general las afirmaciones anteriores se pueden generalizar considerando que las coordenadas que definen un determinado punto, P, expresado en un sistema de coordenadas particular, son $\left(x^1,x^2,\cdots,x^n\right)$ y las coordenadas de ese mismo punto P, expresado en otro sistema de coordenadas es $\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^n\right)$ ambas coordenadas estarán relacionadas por

$$\left.\begin{array}{c} \tilde{x}^1=\tilde{x}^1\left(x^1,x^2,\cdots,x^n\right) \\ \tilde{x}^2=\tilde{x}^2\left(x^1,x^2,\cdots,x^n\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}^n=\tilde{x}^n\left(x^1,x^2,\cdots,x^n\right) \end{array}\right\} \quad\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{c} x^1=x^1\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^n\right) \\ x^2=x^2\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^n\right) \\ \vdots \\ x^n=x^n\left(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,\cdots,\tilde{x}^n\right) \end{array}\right.$$

es decir $\tilde{x}^i=\tilde{x}^i\left(x^j\right) \quad\Longleftrightarrow\quad x^i=x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ con $i,j=1,2,3,\cdots,n$. Otra vez, sólo exigiremos (y es bastante) que:

1. las funciones $x^i=x^i\left(\tilde{x}^m\right)$ y $\tilde{x}^j=\tilde{x}^j\left(x^m\right)$ sean al menos $\mathcal{C}^2$ (función y derivada continua)

2. que el determinante de la matriz Jacobiana sean finito y distinto de cero $\det\left(\frac{\partial\ x^i(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2)}{\partial\ \tilde{x}^l}\right) \neq 0$. Esto es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^1} & \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^n} \\ \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^2} & \\ & & \\ \frac{\partial\ \tilde{x}^n}{\partial\ x^1} & \frac{\partial\ \tilde{x}^n}{\partial\ x^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^n}{\partial\ x^n} \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \quad x^i = x^i\left(\tilde{x}^m\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{x}^j = \tilde{x}^j\left(x^m\right)$$

Ahora bien, una vez más, derivando y utilizando la regla de la cadena

$$x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\left(x^m\right)\right) \quad \Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^l} = \delta^i_l \quad \Longrightarrow \mathrm{d}\ x^i = \frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}\mathrm{d}\ \tilde{x}^k$$

y como hemos comprobado para dos casos particulares, de ahora en adelante tendremos que:

ReDefinición Tal y como hemos visto, un conjunto de cantidades $\left\{a^1, a^2, \cdots, a^n\right\}$ se denominarán componentes *contravariantes* de un vector $|a\rangle \in V$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$ si

1. dada dos base ortonormales de vectores coordenados. $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, \cdots |\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle\}$ se cumple que

$$|a\rangle = a^j\,|\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^i\,|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left\langle \mathbf{e}^i \right| a\rangle = a^i \\ \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i \right| a\rangle = \tilde{a}^i \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{a}^i = a^j\left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i\ |\mathbf{e}_j\right\rangle$$

2. o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n.$, estas cantidades transforman como

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial\ x^k}\ a^k \quad \Longleftrightarrow \quad a^i = \frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}\ \tilde{a}^k \quad \text{con} \quad \frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^l} = \delta^i_l$$

y donde las cantidades $\frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial\ x^k}$ y $\frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P .

ReDefinición Un conjunto de cantidades $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ se denominarán componentes *covariantes* de un vector $\langle b| \in V^*$ en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$ si

1. dada dos base de formas $\left\{\left\langle \mathbf{e}^1\right|, \left\langle \mathbf{e}^2\right|, \cdots \left\langle \mathbf{e}^n\right|\right\}$ y $\left\{\left\langle \tilde{\mathbf{e}}^1\right|, \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^2\right|, \cdots \left\langle \tilde{\mathbf{e}}^n\right|\right\}$ se cumple que

$$\langle b| = b_j\left\langle \mathbf{e}^j\right| = \tilde{b}_i\left\langle \tilde{\mathbf{e}}^i\right| \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle b|\ \mathbf{e}^i\rangle = b^i \\ \langle b|\ \tilde{\mathbf{e}}^i\rangle = \tilde{b}^i \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{b}^i = b^j\left\langle \mathbf{e}_j\ \middle|\tilde{\mathbf{e}}^i\right\rangle$$

2. o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n.$, estas cantidades transforman como

$$\tilde{b}_k = \frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}\ b_i \quad \Longleftrightarrow \quad b_k = \frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial\ x^k}\ \tilde{b}_i \quad \text{con} \quad \frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^l} = \delta^i_l$$

y donde las cantidades $\frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial\ x^k}$ y $\frac{\partial\ x^i}{\partial\ \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P.

ReDefinición Generalizamos los conceptos anteriores de la siguiente manera. Dado un conjunto bases para de formas diferenciales $\{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\}$ hemos definido las componentes *contravariantes* de un tensor

$$T^{ij} = \mathcal{T}\left[\begin{array}{ccc} \langle x^i(1)| & & \langle y^j(2)| \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & , & \bullet \\ & & \end{array}\right] \in V \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{T^{ij}\right\} \equiv \left\{T^{11}, T^{12}, \cdots, T^{1n}, T^{21}, T^{22}, \cdots, T^{2n}, \cdots, T^{nn}\right\}$$

ahora, en esta visión, las componentes contravariantes en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$,serán aquella que bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n.$, estas cantidades transforman como

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^k}\frac{\partial\, \tilde{x}^j}{\partial\, x^m}\, T^{km} \quad \Longleftrightarrow \quad T^{ij} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m}\, \tilde{T}^{km} \quad \text{con} \quad \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^l} = \delta^i_l$$

y donde $\frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^k}$ y $\frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P . Esta generalización nos permite construir el caso más general.

ReDefinición Si $\{|t_i(1)\rangle, |u_j(2)\rangle, \cdots, |v_k(m)\rangle\}$ y $\left\{\langle x^e(1)|, \left\langle y^f(2)\right|, \cdots, \langle z^g(n)|\right\}$ son bases para los vectores y las formas, respectivamente. Las componentes de un tensor serán

$$T^{mn}_{ijk} = \mathcal{T}\left[\begin{array}{ccccccccccccc} |t_i(1)\rangle & & |u_j(2)\rangle & & & & |v_k(m)\rangle & & \langle x^e(1)| & & \left\langle y^f(2)\right| & & & & \langle z^g(n)| \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \circ & , & \circ, & , & \cdots & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet & , & \cdots & , & \bullet \\ & & & & & & & & & & & & & & \end{array}\right]$$

un conjunto de cantidades $\left\{T^{1\cdots 1}_{1\cdots 1}, T^{2\cdots 1}_{1\cdots 1}, \cdots, T^{\cdots 1}_{1\cdots 1}, T^{\tilde{n}\cdots 1}_{1\cdots 1}, T^{\tilde{n}\cdots 1}_{2\cdots 1}, \cdots, T^{1\cdots 1}_{\tilde{m}\cdots 1}, \cdots, T^{\tilde{n}\cdots \tilde{n}}_{\tilde{m}\cdots \tilde{m}}\right\}$ se denominarán componentes *contravariantes* y *covariantes,* respectivamente, de un tensor mixto en un punto P de coordenadas $\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right)$ si bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\right)$ con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n.$, estas cantidades transforman como

$$\tilde{T}^{i\cdots k}_{e\cdots g} = \frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^p}\cdots\frac{\partial\, \tilde{x}^j}{\partial\, x^q}\frac{\partial\, x^a}{\partial\, \tilde{x}^e}\cdots\frac{\partial\, x^d}{\partial\, \tilde{x}^g}\, T^{p\cdots q}_{a\cdots d} \quad \Longleftrightarrow \quad T^{i\cdots k}_{e\cdots g} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^p}\cdots\frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^q}\frac{\partial\, \tilde{x}^a}{\partial\, x^e}\cdots\frac{\partial\, \tilde{x}^d}{\partial\, x^g}\, T^{p\cdots q}_{a\cdots d}$$

con $\frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^l} = \delta^i_l$ y donde las cantidades $\frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^k}$ y $\frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}$ deberán ser evaluadas en el punto P.

7.1. Un ejemplo

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio vectorial. Una vez más consideremos dos bases de vectores coordenados $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$ para el espacio vectorial $\Re^3$ La expresión de un determinado tensor en la base $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\}$ será

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\} \quad \Longrightarrow T^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos una nueva base

$$\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\} \Rightarrow \begin{cases} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle\tilde{\mathbf{e}}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = 1 & \langle\tilde{\mathbf{e}}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = 1 & \langle\tilde{\mathbf{e}}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = 1 \\ \\ \langle\tilde{\mathbf{e}}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = 1 & \langle\tilde{\mathbf{e}}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = 2 & \langle\tilde{\mathbf{e}}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = 2 \\ \\ \langle\tilde{\mathbf{e}}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = 1 & \langle\tilde{\mathbf{e}}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = 2 & \langle\tilde{\mathbf{e}}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = 3 \end{pmatrix}$$

para ese mismo espacio $\Re^3$ encontraremos la expresión que toma T_j^i en esa base. Igualmente encontraremos las expresiones para los siguientes tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$. Nótese que esta nueva base **no es ortogonal** ,$\langle\tilde{\mathbf{e}}^k |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \neq \delta_i^k$, con lo cual no se cumplen muchas cosas entre ellas $|\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle \langle\tilde{\mathbf{e}}^k| \neq 1$

Para encontrar la expresión $\tilde{T}_j^i$ expresamos los vectores base $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ en término de la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \quad \Longrightarrow \begin{cases} |\mathbf{e}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_2\rangle = |\mathbf{j}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_3\rangle = |\mathbf{k}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle \end{cases}$$

recordamos que un vector genérico

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \Longrightarrow$$

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \tilde{a}^1 |\mathbf{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 (|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle) + \tilde{a}^3 (|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle + |\mathbf{e}_3\rangle)$$

con lo cual

$$a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = \left(\tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3\right) |\mathbf{e}_1\rangle + \left(\tilde{a}^2 + \tilde{a}^3\right) |\mathbf{e}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\mathbf{e}_3\rangle$$

y como

$$\left.\begin{array}{l} a^1 = \tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^3 = \tilde{a}^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow a^i = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\, \tilde{a}^k \quad \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1} = 1; & \frac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^3} = 1; \\ \\ \frac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^3} = 1; \\ \\ \frac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2} = 0; & \frac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^3} = 1; \end{cases}$$

Es de hacer notar que dado que la base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ se tiene que

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \quad \Longrightarrow \langle\mathbf{e}^i| \, a\rangle = a^j \langle\mathbf{e}^i |\mathbf{e}_j\rangle = a^j \delta_j^i = a^i = \tilde{a}^k \langle\mathbf{e}^i |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle \quad \Longrightarrow \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k} = \langle\mathbf{e}^i |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle$$

El mismo procedimiento se puede aplicar para expresar el vector $|a\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$

$$|a\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 (|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle) + a^3 (|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}^1 = a^1 - a^2 \\ \tilde{a}^2 = a^2 - a^3 \\ \tilde{a}^3 = a^3\end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{a}^k = a^i \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i} \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1} = 1; & \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2} = -1; & \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^3} = 0; \\ \\ \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^1} = 0; & \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^2} = 1; & \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^3} = -1; \\ \\ \frac{\partial\, \tilde{x}^3}{\partial\, x^1} = 0; & \frac{\partial\, \tilde{x}^3}{\partial\, x^2} = 0; & \frac{\partial\, \tilde{x}^3}{\partial\, x^3} = 1; \end{array}\right.$$

Nótese que, como era de esperarse,

$$\frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^j} = \delta^i_j \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con las expresiones matriciales para las transformaciones ,estamos en capacidad de calcular, componente a componente, las representación del tensor en la nueva base con lo cual

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i}\frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m}\, T^i_j \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1_1 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad & \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^1_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^1_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^1_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^2_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^2_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^2_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^3}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^3_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^3_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^3_3\right) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1_1 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad & 1\cdot\left(1\ T^1_1 + 0\ T^1_2 + 0\ T^1_3\right) \\ & -1\cdot\left(1\ T^2_1 + 0\ T^2_2 + 0\ T^2_3\right) \\ & +0\left(1\ T^3_1 + 0\ T^3_2 + 0\ T^3_3\right) \end{aligned}$$

$$\tilde{T}^1_1 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad T^1_1 - T^2_1 = 2 - 2 = 0$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1_2 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^i_j = \quad & \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^1_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^1_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^1_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^2_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^2_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^2_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^3}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^3_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^3_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^3_3\right) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1_2 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^i_j = \quad & 1\cdot\left(1\ T^1_1 + 1\ T^1_2 + 0\ T^1_3\right) \\ & -1\cdot\left(1\ T^2_1 + 1\ T^2_2 + 0\ T^2_3\right) \\ & +0\left(1\ T^3_1 + 1\ T^3_2 + 0\ T^1_3\right) \end{aligned}$$

$$\tilde{T}^1_2 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad \left(T^1_1 + T^1_2\right) - \left(T^2_1 + T^2_2\right) = (2+1) - (2+3) = -2$$

se puede continuar término a término o realizar la multiplicación de las matrices $\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}, T^i_j$ y $\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}$ provenientes de la transformación de componentes de tensores. Vale decir

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\ T^i_j\ \frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

hay que resaltar un especial cuidado que se tuvo en la colocación de la matrices para su multiplicación. Si bien en la expresión $\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}\ T^i_j$ las cantidades $\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}$ son números y no importa el orden con el cual se multipliquen, cuando se colocan como matrices debe respetarse la "concatenación interna de índices". Esto es cuando queramos expresar $\tilde{T}^k_m$ como una matriz, donde el índice contravariante k indica filas y el índice covariante m las columnas, fijamos primero estos índices y luego respetamos la "concatenación índices" covariantes con los contravariantes. Esta es la convención para expresar la multiplicación de matrices en la notación de índices[2]. Esto es

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}\ T^i_j \quad \Longrightarrow \tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\ T^i_j\ \frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}$$

Ahora los objetos $\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}, T^i_j$ y $\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}$ pueden ser sustituidos (en sus puestos correspondientes) por su representación matricial.

Con lo cual hemos encontrado la representación matricial $\tilde{T}^k_m$ de las componentes del tensor $\mathcal{T}$ en la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}^1_1 = 0 & \tilde{T}^1_2 = -2 & \tilde{T}^1_2 = -3 \\ \tilde{T}^2_1 = 1 & \tilde{T}^2_2 = 2 & \tilde{T}^2_3 = 4 \\ \tilde{T}^3_1 = 1 & \tilde{T}^3_2 = 3 & \tilde{T}^3_3 = 5 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la expresión para $\tilde{T}_{km}$ recordamos que $\tilde{T}_{km} = \tilde{g}_{kn}\tilde{T}^n_m$ es decir, requerimos las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico $\tilde{g}_{kn}$ que genera esta base. Para ello recordamos que para una base genérica, $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos tensor métrico como

$$\mathbf{g}\left[\begin{array}{c} |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \quad |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ \circ\ , \quad \circ, \end{array}\right] = \tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} = \mathbf{g}\left[|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\right] \equiv \langle\tilde{\mathbf{e}}_i\ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \equiv \langle\tilde{\mathbf{e}}_j\ |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle$$

$$\mathbf{g}\left[\begin{array}{c} \langle\tilde{\mathbf{e}}^i| \quad \langle\tilde{\mathbf{e}}^j| \\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ \bullet\ , \quad \bullet \end{array}\right] = \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ij} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ij} = (\tilde{g}_{ij})^{-1}$$

[2]Quizá una forma de comprobar si los índices está bien concatenados se observa si se "bajan" los índices contravariantes pero se colcan de antes que los covariantes. Esto es $T^i_j \to T_{ij}$ Así la multiplicación de matrices queda representada por $C^i_j = A^i_k B^k_j \to C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$ y aquí es claro que ínidices consecutivos están "concatenados" e indican multiplicación

Es de hacer notar que la representación matricial para la métrica covariante g_{ij} de una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ es siempre diagonal. Esto es

$$g_{11} = \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1\rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{i}\rangle = 1; \qquad g_{12} = \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2\rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{j}\rangle = 0; \qquad g_{13} = \langle \mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2\rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{j}\rangle = 0;$$

$$g_{21} = \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_1\rangle = \langle \mathbf{j} | \mathbf{i}\rangle = 0; \qquad g_{22} = \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2\rangle = \langle \mathbf{j} | \mathbf{j}\rangle = 1\tilde{n}; \qquad g_{23} = \langle \mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_3\rangle = \langle \mathbf{j} | \mathbf{k}\rangle = 0;$$

$$g_{31} = \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_1\rangle = \langle \mathbf{k} | \mathbf{i}\rangle = 0; \qquad g_{32} = \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_2\rangle = \langle \mathbf{k} | \mathbf{j}\rangle = 0; \qquad g_{33} = \langle \mathbf{e}_3 | \mathbf{e}_3\rangle = \langle \mathbf{k} | \mathbf{k}\rangle = 1;$$

con lo cual

$$\left.\begin{array}{c} \langle T^n_m\rangle \\ \\ \langle T_{km}\rangle \equiv \langle g_{kn}T^n_m\rangle \\ \\ \langle T^{nm}\rangle \equiv \left\langle g^{nk}T^m_k\right\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

donde hemos denotado $\langle\bullet\rangle$ como la representación matricial del objeto

Para el caso de la base genérica no ortonormal $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ tenemos dos formas de calcular el tensor (las componentes covariantes y contravariantes) del tensor métrico. La primera es la forma directa

$$\tilde{g}_{11} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | \tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = \langle \mathbf{i} | \mathbf{i}\rangle = 1; \qquad \tilde{g}_{12} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | \tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \langle \mathbf{i}| (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) = 1;$$

$$\tilde{g}_{21} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | \tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = (\langle \mathbf{i}| + \langle \mathbf{j}|) |\mathbf{i}\rangle = 1; \qquad \tilde{g}_{22} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | \tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = (\langle \mathbf{i}| + \langle \mathbf{j}|)(|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) = 2$$

$$\tilde{g}_{31} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = (\langle \mathbf{i}| + \langle \mathbf{j}| + \langle \mathbf{k}|) |\mathbf{i}\rangle = 1; \qquad \tilde{g}_{32} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = (\langle \mathbf{i}| + \langle \mathbf{j}| + \langle \mathbf{k}|)(|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle) = 2;$$

y

$$\tilde{g}_{13} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_1 | \tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \langle \mathbf{i}| (|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) = 1;$$

$$\tilde{g}_{23} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_2 | \tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = (\langle \mathbf{i}| + \langle \mathbf{j}|)(|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) = 2$$

$$\tilde{g}_{33} = \langle \tilde{\mathbf{e}}_3 | \tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = (\langle \mathbf{i}| + \langle \mathbf{j}| + \langle \mathbf{k}|)(|\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle) = 3$$

consecuentemente

$$\tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ij} = (\tilde{g}_{ij})^{-1} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La otra forma de calcular la métrica correspondiente la base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ y transformarla a la base no ortonormal $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle\}$ esto es

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m}\, g_{ij} \quad \Longrightarrow \tilde{g}_{km} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\, g_{ij}\, \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m}$$

La métrica para el la base ortonormal será diagonal y además $g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}}$, con lo cual

$$g_{ij} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g^{ij} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g^i_j \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

y

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\; g_{ij}\; \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m} \quad ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

nótese para conservar la convención de índices y matrices hemos representado que hemos traspuesto la matriz correspondiente a $\frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}$. La razón, como dijimos arriba es

$$\tilde{g}_{km} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\; g_{ij}\; \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m} \quad \longrightarrow \tilde{g}_{km} = \Pi_{ik}\; g_{ij}\; \Pi_{jm} \quad \longrightarrow \tilde{g}_{km} = \bar{\Pi}_{ki}\; g_{ij}\; \Pi_{jm}$$

Para poder representar multiplicación de matrices los índices deben estar consecutivos, por tanto hay que trasponer la representación matricial para poder multiplicarla.

Ya estamos en capacidad de obtener las representaciones matriciales para los tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$.

$$\left\langle \tilde{T}_i^j \right\rangle = \left\langle \tilde{T}_j^i \right\rangle^{\mathrm{T}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \tilde{T}_i^j \right\rangle$$

$$\left\langle \tilde{T}_{km} \right\rangle = \left\langle \tilde{g}_{kn} \tilde{T}_m^n \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \tilde{T}_{km} \right\rangle$$

$$\left\langle \tilde{T}^{kn} \right\rangle = \left\langle \tilde{T}_m^n \tilde{g}^{mk} \right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -13 \\ 7 & 13 & 17 \\ 9 & 17 & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \tilde{T}^{km} \right\rangle$$

8. Teorema del Cociente

Al igual que existe el producto directo entre tenores, cabe preguntarse si es posible multiplicar una componente de un tensor por otra de otro tensor y el producto ¿ será un tensor ? Existe importantes situaciones físicas en las cuales es aplicable esta pregunta. Si T_{ij} son las componentes de un tensor de rango 2 y V^i ¿ el producto $T_{ij}V^i = B_j$ serán componentes de un vector ? La respuesta no es siempre afirmativa, y puede ser utilizado como un criterio de cuando una componente es un tensor. Este criterio que se denomina el *Teorema del Cociente.*

La respuesta a esta pregunta surge de una respuesta a una pregunta distinta pero equivalente. Dados n^2 números a_{ij} y un (una componente de un) vector genérico V^i, entonces la cantidad si $a_{ij}V^iV^j$ es un escalar entonces la parte simétrica $a_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$ será un (una componente de) tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. La demostración involucra algunos de los conceptos antes expuesto y la haremos para fijar conceptos.

Dados dos sistemas de coordenadas $x^i = x^i\left(\tilde{x}^m\right)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j\left(x^m\right)$ con $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ se cumple que

$$a_{ij}\; x^i x^j = \psi = \tilde{\psi} = \tilde{a}_{ij}\; \tilde{x}^i \tilde{x}^j \quad \text{donde } \psi = \tilde{\psi} \text{ constituye un escalar}$$

y por lo tanto derivando y utilizando la regla de la cadena

$$x^i = x^i\left(\tilde{x}^j\left(x^m\right)\right) \quad \Longrightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^l} = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^l} = \delta^i_l \quad \Longrightarrow$$
$$\left(a_{ij}\; x^i x^j - \tilde{a}_{ij}\; \tilde{x}^i\tilde{x}^j\right) \equiv \left(a_{ij}\; - \tilde{a}_{kl}\; \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i}\frac{\partial\, \tilde{x}^l}{\partial\, x^j}\right) x^i x^j = 0$$

como hay una suma en ij no se puede afirmar la cantidad del paréntesis se anula. Como esta afirmación vale para cualquier sistema de coordenadas Seleccionaremos las componentes coordenadas en la base canónica.

$$x^1 = (1,0,0,\cdots,0)\,; \quad x^2 = (0,1,0,\cdots,0)\,;\cdots \quad \cdots x^n = (0,0,0,\cdots,1)$$

con lo cual

$$a_{11}\; - \tilde{a}_{kl}\; \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^1}\frac{\partial\, \tilde{x}^l}{\partial\, x^1} = 0; \quad a_{22}\; - \tilde{a}_{kl}\; \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^2}\frac{\partial\, \tilde{x}^l}{\partial\, x^2} = 0;\cdots \quad \cdots a_{nn}\; - \tilde{a}_{kl}\; \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^n}\frac{\partial\, \tilde{x}^l}{\partial\, x^n} = 0$$

como siempre podemos hacer $\tilde{a}_{(kl)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_{kl} + \tilde{a}_{lk}\right)$ y $\tilde{a}_{[kl]} = \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_{kl} - \tilde{a}_{lk}\right)$ y separar el tensor

$$\tilde{a}_{kl} = \tilde{a}_{(kl)} + \tilde{a}_{[kl]} \quad \Longrightarrow \quad a_{(hh)}\; - \left(\tilde{a}_{(kl)} + \tilde{a}_{[kl]}\right)\; \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^h}\frac{\partial\, \tilde{x}^l}{\partial\, x^h} = 0 \quad \Longrightarrow$$
$$a_{(hh)}\; - \tilde{a}_{(kl)}\; \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^h}\frac{\partial\, \tilde{x}^l}{\partial\, x^h} = 0$$

con lo cual se garantiza que la parte simétrica de un tensor transforma como un verdadero tensor una vez que se contrae con un par de vectores.

Referencias

[1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) `QA300 A66C3 1972`

[2] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[3] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[5] Gel´fand, I.M. (1961) **Lectures on Linear .Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[6] Lovelock, D, y Rund, H. (1975) **Tensors, Differential Forms & Variational Principles** (*John Wiley Interscience, Nueva York*).

[7] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)

[8] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)