Formulario de Métodos Matemáticos 1
Coordenadas Curvilineas *

L. A. Núñez**
Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela. y
Centro Nacional de Cálculo Científico Universidad de Los Andes
(CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Noviembre 2004 Versión α 2.1

Índice

1. Disgreción Derivativa

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bién esa característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su

---

* **ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.**

** e-mail: `nunez@ula.ve` Web: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/

dirección, su sentido o todo junto o separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y constante en otra.

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t)\,|\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} = \tilde{a}^k\,|\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle_{(t)} = \hat{a}^k(t)\,|\hat{\mathbf{e}}_k\rangle$$

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable $|a\rangle_{(t)} \iff \vec{a}(t)$ uno rápidamente piensa en establecer un cociente incremental

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|a\rangle_{(t+\Delta t)} - |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\,|a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\left(|a\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t}$$

La misma propuesta se cumplirá para las formas diferenciales ${}_{(t)}\langle a|$. Como siempre, las propiedades de esta operación serán

$$\frac{\mathrm{d}\left(|a\rangle_{(t)} + |b\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(|a\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(|b\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\alpha(t)\,|a\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\alpha(t)\right)}{\mathrm{d}t}\,|a\rangle_{(t)} + \alpha(t)\,\frac{\mathrm{d}\left(|a\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left({}_{(t)}\langle a\,|b\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\left({}_{(t)}\langle a|\right)}{\mathrm{d}t}\right)|b\rangle_{(t)} + \langle a|_{(t)}\left(\frac{\mathrm{d}\left(|b\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}\right)$$

Ahora bien, esto implica que

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t)\,|\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\left(|a\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(a^k(t)\,|\mathbf{e}_k\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ a^k(t)}{\mathrm{d}t}\,|\mathbf{e}_k\rangle_{(t)} + a^k(t)\,\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{e}_k\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que sean constantes y otros con bases variables. Así, el radio vector posición de una partícula genera los vectores velocidad y aceleración.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(\vec{r}(t)\right)}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(\vec{v}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\left(\vec{r}(t)\right)}{\mathrm{d}t^2}$$

ahora bien

$$\vec{r} \equiv |r\rangle = r_P\,|\mathbf{u}_r\rangle = x_P\,|\mathbf{i}\rangle + y_P\,|\mathbf{j}\rangle + z_P\,|\mathbf{k}\rangle \qquad \text{con } |\mathbf{u}_r\rangle = \cos\theta\ |\mathbf{i}\rangle + \sin\theta\ |\mathbf{j}\rangle$$

si suponemos que la partícula describe un movimiento entonces

$$\left.\begin{array}{r} r_P = r_P(t) \\ \\ \theta = \theta(t) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right. ; \quad |\mathbf{u}_r\rangle = |\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\,; \qquad \begin{array}{l} |\mathbf{i}\rangle = \text{const} \\ |\mathbf{j}\rangle = \text{const} \\ |\mathbf{k}\rangle = \text{const} \end{array}$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{u}_r\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\cos\theta\left(t\right)\ |\mathbf{i}\rangle + \sin\theta\left(t\right)\ |\mathbf{j}\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = -\left(\sin\theta\left(t\right)\right)\frac{\mathrm{d}\theta\left(t\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta\left(t\right)\frac{\mathrm{d}\theta\left(t\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{j}\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{u}_r\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[-\left(\sin\theta\left(t\right)\right)|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle\right]}_{|\mathbf{u}_\theta\rangle} = \frac{\mathrm{d}\theta\left(t\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_\theta\rangle$$

ya que

$$\left\||\mathbf{u}_r\rangle\right\| = \sqrt{\langle\mathbf{u}_r\ |\mathbf{u}_r\rangle} = \sqrt{\left[\cos\theta\left(t\right)\ \langle\mathbf{i}| + \sin\theta\left(t\right)\ \langle\mathbf{j}|\right]\left[\cos\theta\left(t\right)\ |\mathbf{i}\rangle + \sin\theta\left(t\right)\ |\mathbf{j}\rangle\right]} = 1$$

$$\left\||\mathbf{u}_\theta\rangle\right\| = \sqrt{\langle\mathbf{u}_\theta\ |\mathbf{u}_\theta\rangle} = \sqrt{\left[-\left(\sin\theta\left(t\right)\right)\langle\mathbf{i}| + \cos\theta\left(t\right)\langle\mathbf{j}|\right]\left[-\left(\sin\theta\left(t\right)\right)|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle\right]} = 1$$

y

$$\langle\mathbf{u}_r\ |\mathbf{u}_\theta\rangle = \langle\mathbf{u}_\theta\ |\mathbf{u}_r\rangle = \left[-\left(\sin\theta\left(t\right)\right)\langle\mathbf{i}| + \cos\theta\left(t\right)\langle\mathbf{j}|\right]\left[\cos\theta\left(t\right)\ \langle\mathbf{i}| + \sin\theta\left(t\right)\ |\mathbf{j}\rangle\right] = 0$$

Más aún

$$\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{u}_\theta\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(-\left(\sin\theta\left(t\right)\right)|\mathbf{i}\rangle + \cos\theta\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = -\left(\cos\theta\left(t\right)|\mathbf{i}\rangle + \sin\theta\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle\right) = -\frac{\mathrm{d}\theta\left(t\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_r\rangle$$

Con lo cual, una partícula que describe un movimiento genérico vendrá descrita en coordenadas cartesianas por

$$\vec{r} \equiv |r\rangle = x_P\left(t\right)|\mathbf{i}\rangle + y_P\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle + z_P\left(t\right)|\mathbf{k}\rangle$$

y su velocidad será

$$\begin{aligned}\vec{v}\left(t\right) &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(|r\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(x_P\left(t\right)|\mathbf{i}\rangle + y_P\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle + z_P\left(t\right)|\mathbf{k}\rangle\right)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\left(x_P\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{i}\rangle + \frac{\mathrm{d}\left(y_P\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{j}\rangle + \frac{\mathrm{d}\left(z_P\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{k}\rangle = v_{xP}\left(t\right)|\mathbf{i}\rangle + v_{yP}\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle + v_{zP}\left(t\right)|\mathbf{k}\rangle\end{aligned}$$

y la aceleración

$$\vec{a}\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}\left(v_{xP}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{i}\rangle + \frac{\mathrm{d}\left(v_{yP}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{j}\rangle + \frac{\mathrm{d}\left(v_{zP}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{k}\rangle = a_{xP}\left(t\right)|\mathbf{i}\rangle + a_{yP}\left(t\right)|\mathbf{j}\rangle + a_{zP}\left(t\right)|\mathbf{k}\rangle$$

Mientras que en coordenadas polares será

$$\vec{r} \equiv |r\rangle = r_P\left(t\right)|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} \quad \Longrightarrow \vec{v}\left(t\right) = \frac{\mathrm{d}\left(r\left(t\right)_P|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(r\left(t\right)_P\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + r\left(t\right)_P\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}$$

con lo cual la velocidad

$$\vec{v}\left(t\right) = v_r\left(t\right)_P|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + r\left(t\right)_P\frac{\mathrm{d}\theta\left(t\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_\theta\rangle$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}(\vec{v}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + r(t)_P\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_\theta\rangle\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(v_r(t)_P|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(r(t)_P\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_\theta\rangle\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = {} & \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + \frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t} \\ & + \frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)} + r(t)_P\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}|\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)} + r(t)_P\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\left(|\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)}\right)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = \left\{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} - r(t)_P\left(\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + \left\{2\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + r(t)_P\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}|\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)}$$

Claramente para el caso de un movimiento circular

$$r = R = \text{const} \quad \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = R|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} \\ \\ \vec{v}(t) = R\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}_\theta\rangle \\ \\ \vec{a}(t) = -R\left(\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2|\mathbf{u}_r\rangle_{(t)} + R\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}|\mathbf{u}_\theta\rangle_{(t)} \end{array}\right.$$

De aquí podemos ver claramente que velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ son ortogonales. La velocidad, $\vec{v}(t)$, siempre es tangente a la trayectoria $\vec{r}(t)$ y en este caso la trayectoria es una circunsferencia. En general el vector

$$\vec{r}_{med} = \sum_i \Delta\ \vec{r}(t_i) = \sum_i (\vec{r}(t_i + \Delta t_i) - \vec{r}(t_i)) \quad \Longrightarrow \lim_{\Delta t \to 0}\sum_i \Delta\ \vec{r}(t_i) = \int \mathrm{d}\vec{r}(t) = \vec{r}(t)$$

es decir $\mathrm{d}\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_i \Delta\ \vec{r}(t_i)$ es tangente a la trayectoria. Es claro que

$$\mathrm{d}\vec{r}(t) = \mathrm{d}\left[x_P(t)|\mathbf{i}\rangle + y_P(t)|\mathbf{j}\rangle + z_P(t)|\mathbf{k}\rangle\right] \equiv \frac{\partial x_P(t)}{\partial t}|\mathbf{i}\rangle + \frac{\partial y_P(t)}{\partial t}|\mathbf{j}\rangle + \frac{\partial z_P(t)}{\partial t}|\mathbf{k}\rangle$$

2. Curvas y parámetros

Podemos generalizar esta afirmación y considerar un parámetro genérico λ, en este caso

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}(x_P(\lambda), y_P(\lambda), z_P(\lambda)) \quad & \Longrightarrow \\ \mathrm{d}\vec{r}(x_P(\lambda), y_P(\lambda), z_P(\lambda)) = & \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_P(\lambda)}\frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y_P(\lambda)}\frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z_P(\lambda)}\frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial\lambda}\right)\mathrm{d}\lambda \\ = & \left(\frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_P(\lambda)} + \frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial\vec{r}}{\partial y_P(\lambda)} + \frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial\vec{r}}{\partial z_P(\lambda)}\right)\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}\left(\bullet\right)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\partial x_P\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\left(\bullet\right)}{\partial x_P\left(\lambda\right)}+\frac{\partial y_P\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\left(\bullet\right)}{\partial y_P\left(\lambda\right)}+\frac{\partial z_P\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\frac{\partial\left(\bullet\right)}{\partial z_P\left(\lambda\right)}$$

con lo cual podemos considerar las cantidades $\left(\frac{\partial x_P(\lambda)}{\partial\lambda},\frac{\partial y_P(\lambda)}{\partial\lambda},\frac{\partial z_P(\lambda)}{\partial\lambda}\right)$ como las componentes del vector, $\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right),$ (y en general del operador $\frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}\lambda}$) tangente a la trayectoria parametrizada con λ.

Más aún las cantidades $\left(\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_P(\lambda)},\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_P(\lambda)},\frac{\partial(\bullet)}{\partial z_P(\lambda)}\right)$ serán los vectores base en esas coordenadas.

Así al considerar coordenadas generalizadas $\left(q^1\left(\lambda\right),q^2\left(\lambda\right),q^3\left(\lambda\right)\right)$

$$\left|\mathbf{r}\right\rangle=\tilde{\mathbf{r}}=\tilde{\mathbf{r}}\left(q^1\left(\lambda\right),q^2\left(\lambda\right),q^3\left(\lambda\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}\vec{r}\left(q^1\left(\lambda\right),q^2\left(\lambda\right),q^3\left(\lambda\right)\right)=\frac{\partial q^1\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1\left(\lambda\right)}+\frac{\partial q^2\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2\left(\lambda\right)}+\frac{\partial q^3\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3\left(\lambda\right)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\partial q^1\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1\left(\lambda\right)}}_{\left|q^1\right\rangle}+\frac{\partial q^2\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2\left(\lambda\right)}}_{\left|q^2\right\rangle}+\frac{\partial q^3\left(\lambda\right)}{\partial\lambda}\underbrace{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3\left(\lambda\right)}}_{\left|q^3\right\rangle}$$

donde $\left\{\left|q^1\right\rangle=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^1(\lambda)},\left|q^2\right\rangle=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^2(\lambda)},\left|q^3\right\rangle=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^3(\lambda)},\right\}$ son la base de vectores.

Por otro lado el módulo del vector $\left\|\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)\right\|$ representará la longitud de arco $\mathrm{d}s$ para esa curva. Por consiguiente

$$\left(\mathrm{d}s\right)^2=\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)\bullet\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)=\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)\bullet\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)=\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}\lambda}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{r}\left(\lambda\right)}{\mathrm{d}\lambda}\right)\left(\mathrm{d}\lambda\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial q^i}{\partial\lambda}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\right)\left(\frac{\partial q^j}{\partial\lambda}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j}\right)\left(\mathrm{d}\lambda\right)^2=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q^j}\underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{d}q^i}\underbrace{\frac{\partial q^j}{\partial\lambda}\mathrm{d}\lambda}_{\mathrm{d}q^j}$$

$$=\frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ q^i}\frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ q^j}\ \mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j$$

donde $\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ es el vector tangente a la curva. Dado que

$$\left(\mathrm{d}s\right)^2=g_{ij}\ \mathrm{d}x^i\ \mathrm{d}x^j=\tilde{g}_{ij}\ \mathrm{d}\tilde{x}^i\ \mathrm{d}\tilde{x}^j=\bar{g}_{ij}\ \mathrm{d}q^i\ \mathrm{d}q^j=\underbrace{\frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ q^i}\frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ q^j}}_{\bar{g}_{ij}}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j$$

identificamos claramente

$$\frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ q^i}\frac{\partial\ \vec{r}}{\partial\ q^j}\equiv\bar{g}_{ij}$$

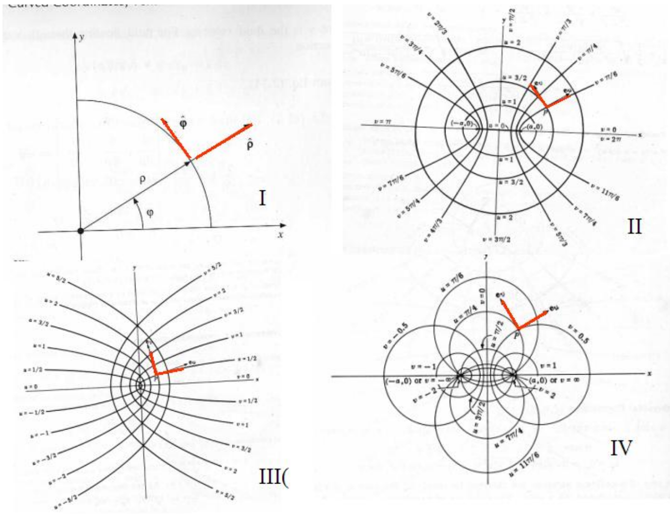


Figura 1: Coordenadas Curvilíneas en 2D.
Cuadrante I, coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi;\quad z = z$
Cuadrante II, coordenadas cilíndricas elípticas $x = a\cosh u\cos v;\quad y = a\sinh u\sin v;\quad z = z$
Cuadrante III coordenadas cilíndricas parabólicas $x = \frac{1}{2}\left(u - v^2\right);\quad y = uv;\quad z = z$
Cuadrante IV coordenadas cilíndricas bipolares $x^2 + (y - a\cot u)^2 = a^2\csc^2 u;\quad \left(x - a\frac{\sinh v}{\cosh v}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 v};\quad z = z$

3. Coordenadas Curvilíneas Generalizadas

Como hemos visto siempre se podrá definir un sistema de coordenadas generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ tales que

$$|\mathbf{r}\rangle = \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}\left(q^1, q^2, q^3\right) \quad \Longrightarrow \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^1}\mathrm{d}q^1 + \frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^2}\mathrm{d}q^2 + \frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^3}\mathrm{d}q^3 \quad \Longrightarrow$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{ij}\ \mathrm{d}x^i\ \mathrm{d}x^j \equiv \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}}\cdot\mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^i}\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^j}\ \mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g_{ij} = \frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^i}\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ q^j} \\ \\ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^j}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^j} \end{array} \right.$$

genere una tríada de vectors base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ ortonormales de vectores unitarios tales que

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1}; \quad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2}; \quad |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^3}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^3};$$

los cuales son vectores tangentes a las curvas que define el radio vector $|\mathbf{r}\rangle$. Claramente si el sistema es ortogonal los factores de escala son importantes para su categorización

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1}\right\|; \quad h_2 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2}\right\|; \quad \text{y} \quad h_3 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^3}\right\|;$$

con lo cual podemos definir el elemento de línea como

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\ \mathrm{d}q^1\right)^2 + \left(h_2\ \mathrm{d}q^2\right)^2 + \left(h_3\ \mathrm{d}q^3\right)^2 = g_{ij}\ \mathrm{d}q^i\ \mathrm{d}q^j$$

Es decir que identificamos la métrica como

$$h_1 = \sqrt{g_{11}}; \quad h_2 = \sqrt{g_{22}}; \quad h_3 = \sqrt{g_{33}}.$$

De tal forma que los casos particulares se recuperan fácilmente.

3.1. Coordenadas Cartesianas

El primer caso, el más trivial, lo constituyen las coordenadas cartesianas. Vale decir

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (x, y, z)$$

$$|\mathbf{r}\rangle = x\,|\mathbf{i}\rangle + y\,|\mathbf{j}\rangle + z\,|\mathbf{k}\rangle = \tilde{\mathbf{r}} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}\,(x, y, z) \Longrightarrow \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ z}\right)\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,|\mathbf{i}\rangle + \mathrm{d}y\,|\mathbf{j}\rangle + \mathrm{d}z\,|\mathbf{k}\rangle$$

cosecuentemente

$$\begin{array}{lcl} h_x = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ x}\right\| = 1 & & |\tilde{\mathbf{e}}_x\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ x}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ x} = |\mathbf{i}\rangle \\ h_y = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ y}\right\| = 1 & \text{y} & |\tilde{\mathbf{e}}_y\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial y}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ x} = |\mathbf{j}\rangle \quad ; \\ h_z = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ z}\right\| = 1 & & |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ z}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ z} = |\mathbf{k}\rangle \end{array}$$

El elemento de línea viene definido como

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\ \mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2\ \mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3\ \mathrm{d}x^3\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}s^2 = \ \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

y el tensor métricó será

$$g_{11} = g_{xx} = 1; \quad g_{22} = g_{yy} = 1; \quad g_{22} = g_{zz} = 1.$$

El hecho que para el caso de las coordenadas cartesianas $h_x = h_y = h_z = 1$ significará que las tomaremos como coordenadas base respecto a las cuales expresaremos las demás.

3.2. Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se expresan como

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (\rho, \varphi, z)$$

$$|\mathbf{r}\rangle = x\,(\rho,\varphi)\,|\mathbf{i}\rangle + y\,(\rho,\varphi)\,|\mathbf{j}\rangle + z\,|\mathbf{k}\rangle \Longleftrightarrow \tilde{\mathbf{r}} = x\,(\rho,\varphi)\,\hat{\imath} + y\,(\rho,\varphi)\,\hat{\jmath} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}\,(\rho,\varphi,z) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ \rho}\right)\mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ \varphi}\right)\mathrm{d}\varphi + \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ z}\right)\mathrm{d}z$$

y estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordendas cartesianas

$$\left.\begin{array}{l} x = x\,(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi \\[2ex] y = y\,(\rho,\varphi) = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\[2ex] z = z \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \cos\varphi\mathrm{d}\rho - \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\mathrm{d}\varphi \\[2ex] \mathrm{d}y = \mathrm{sen}\,\varphi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \\[2ex] \mathrm{d}z = \mathrm{d}z \end{array}$$

con lo cual es fácil identificar

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial\ x(\rho,\varphi)}{\partial\ \rho} = \cos\varphi \\[2ex] \frac{\partial\ y(\rho,\varphi)}{\partial\ \rho} = \mathrm{sen}\,\varphi \\[2ex] \frac{\partial\ z}{\partial\ \rho} = 0 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\ x(\rho,\varphi)}{\partial\ \varphi} = -\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\[2ex] \frac{\partial\ y(\rho,\varphi)}{\partial\ \varphi} = \rho\cos\varphi \\[2ex] \frac{\partial\ z}{\partial\ \varphi} = 0 \end{array}\right); \quad \mathrm{y} \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\ x(\rho,\varphi)}{\partial\ z} = 0 \\[2ex] \frac{\partial\ y(\rho,\varphi)}{\partial\ z} = 0 \\[2ex] \frac{\partial\ z}{\partial\ z} = 1 \end{array}\right)$$

y de allí

$$h_\rho = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ \rho}\right\| = \left\|\frac{\partial\ \left(x\,(\rho,\varphi)\,\hat{\imath} + y\,(\rho,\varphi)\,\hat{\jmath} + z\hat{\mathbf{k}}\right)}{\partial\ \rho}\right\| = \left\|\frac{\partial\ x\,(\rho,\varphi)}{\partial\ \rho}\hat{\imath} + \frac{\partial\ y\,(\rho,\varphi)}{\partial\ \rho}\hat{\jmath}\right\|$$

$$h_\rho = \|\cos\varphi\ \hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\varphi\ \hat{\jmath}\| = 1$$

y del mismo modo

$$h_\varphi = \left\|\frac{\partial\ \left(x\,(\rho,\varphi)\,\hat{\imath} + y\,(\rho,\varphi)\,\hat{\jmath}\right)}{\partial\ \varphi}\right\| = r; \qquad h_z = \left\|\frac{\partial\ (z)}{\partial\ z}\hat{\mathbf{k}}\right\| = 1.$$

mientras que los vectores unitarios serán

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\rho\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ \rho}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ \rho} = \frac{\partial\ x(\rho,\varphi)}{\partial\ \rho}\hat{\imath} + \frac{\partial\ y(\rho,\varphi)}{\partial\ \rho}\hat{\jmath} = \cos\varphi\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\ \hat{\jmath}$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ \varphi}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ \varphi} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\ x(\rho,\varphi)}{\partial\ \varphi}\ \hat{\imath} + \frac{\partial\ y(\rho,\varphi)}{\partial\ \varphi}\ \hat{\jmath}\right) = -\operatorname{sen}\varphi\ \hat{\imath} + \cos\varphi\ \hat{\jmath}\ ;$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ z}\right\|}\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ z} = \frac{\partial\ \left(x(\rho,\varphi)\hat{\imath} + y(\rho,\varphi)\hat{\jmath} + z\hat{\mathbf{k}}\right)}{\partial\ z} = \hat{\mathbf{k}}$$

El elemento de línea viene definido como

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(h_1\ \mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2\ \mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3\ \mathrm{d}x^3\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\ \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$$

y el tensor métricó será

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

3.3. Coordenadas Esféricas

Para construir el sistema de coordenadas esféricas

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (r, \varphi, \theta)$$

$$|\mathbf{r}\rangle = x\,(r,\varphi,\theta)\,|\mathbf{i}\rangle + y\,(r,\varphi,\theta)\,|\mathbf{j}\rangle + z\,(r,\varphi,\theta)\,|\mathbf{k}\rangle = x\,(r,\varphi,\theta)\,\hat{\imath} + y\,(r,\varphi,\theta)\,\hat{\jmath} + z\,(r,\varphi,\theta)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}\,(r,\varphi,\theta) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\tilde{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ r}\right)\mathrm{d}r + \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ \varphi}\right)\mathrm{d}\varphi + \left(\frac{\partial\ \tilde{\mathbf{r}}}{\partial\ \theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

y estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordendas cartesianas

$$\left.\begin{array}{l} x = x\,(r,\varphi,\theta) = r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ y = y\,(r,\varphi,\theta) = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ z\,(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \mathrm{d}x = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}r - r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ \\ \mathrm{d}y = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}r + r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\varphi + r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ \\ \mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\operatorname{sen}\theta\mathrm{d}\theta \end{array}$$

con lo cual es fácil identificar

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial\ x(r,\varphi,\theta)}{\partial\ r} = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ \frac{\partial\ y(r,\varphi,\theta)}{\partial\ r} = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ \frac{\partial\ z(r,\varphi,\theta)}{\partial\ r} = \cos\theta \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial\ x(r,\varphi,\theta)}{\partial\ \varphi} = -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ \frac{\partial\ y(r,\varphi,\theta)}{\partial\ \varphi} = r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \\ \frac{\partial\ z(r,\varphi,\theta)}{\partial\ \varphi} = 0 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{l} \frac{\partial\ x(r,\varphi,\theta)}{\partial\ \theta} = r\cos\varphi\cos\theta \\ \\ \frac{\partial\ y(r,\varphi,\theta)}{\partial\ \theta} = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \\ \frac{\partial\ z(r,\varphi,\theta)}{\partial\ \theta} = -r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right)$$

y de allí

$$h_r = \left\| \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ r} \right\| = \left\| \frac{\partial \ \left(x\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\imath} + y\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\jmath} + z\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\mathbf{k}} \right)}{\partial \ r} \right\|$$

$$h_r = \left\| \frac{\partial \ x\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ r}\hat{\imath} + \frac{\partial \ y\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ r}\hat{\jmath} + \frac{\partial \ z\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ r}\hat{\mathbf{k}} \right\|$$

$$h_r = \left\| \cos\varphi \sin\theta \ \hat{\imath} + \sin\varphi \sin\theta \ \hat{\jmath} + \cos\theta \ \hat{\mathbf{k}} \right\| = \sqrt{\cos^2\varphi \ \ \sin^2\theta + \sin^2\varphi \sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

y del mismo modo

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial \ \left(x\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\imath} + y\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\jmath} + z\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\mathbf{k}} \right)}{\partial \ \varphi} \right\| = \left\| \frac{\partial \ x\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ \varphi}\hat{\imath} + \frac{\partial \ y\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ \varphi}\hat{\jmath} \right\|$$

$$h_\varphi = \left\| -r\sin\varphi \sin\theta \ \hat{\imath} + r\cos\varphi \sin\theta \ \hat{\jmath} \right\| = \sqrt{\left(r\sin\varphi\sin\theta\right)^2 + \left(r\cos\varphi\sin\theta\right)^2} = r\sin\theta$$

Finalmente,

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \ \left(x\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\imath} + y\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\jmath} + z\left(r,\varphi,\theta\right)\hat{\mathbf{k}} \right)}{\partial \ \theta} \right\|$$

$$h_\theta = \left\| \frac{\partial \ x\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ \theta} \ \hat{\imath} + \frac{\partial \ y\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ \theta} \ \hat{\jmath} + \frac{\partial \ z\left(r,\varphi,\theta\right)}{\partial \ \theta} \ \hat{\mathbf{k}} \right\|$$

$$h_\theta = \left\| r\cos\varphi \cos\theta \ \hat{\imath} + r\sin\varphi \cos\theta \ \hat{\jmath} - \sin\theta \ \hat{\mathbf{k}} \right\|$$

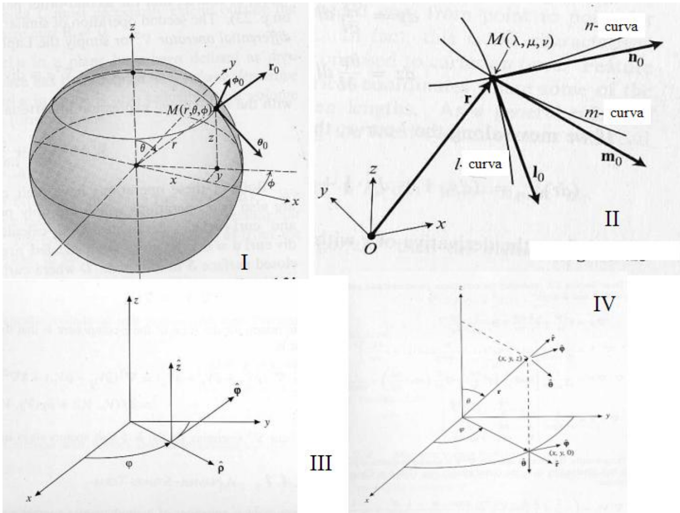
$$h_\theta = \sqrt{\left(r\cos\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(r\sin\varphi\cos\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\right)^2} = r$$

mientras que los vectores unitarios serán

$$\begin{aligned}
|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ r} \right\|} \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ r} = \cos\varphi\sin\theta \ \hat{\imath} + \sin\varphi\sin\theta \ \hat{\jmath} + \cos\theta \ \hat{\mathbf{k}} \\
|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ \varphi} \right\|} \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ \varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\varphi\sin\theta \ \hat{\imath} + r\cos\varphi\sin\theta \ \hat{\jmath}\right) \qquad ; \\
|\tilde{\mathbf{e}}_\theta\rangle &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ \theta} \right\|} \frac{\partial \ |\mathbf{r}\rangle}{\partial \ \theta} = \frac{1}{r}\left(r\cos\varphi\cos\theta \ \hat{\imath} + r\sin\varphi\cos\theta \ \hat{\jmath} - \sin\theta \ \hat{\mathbf{k}} \right)
\end{aligned}$$

El elemento de línea viene definido como

$$\left(\mathrm{d}s\right)^2 = \left(h_1 \ \mathrm{d}x^1\right)^2 + \left(h_2 \ \mathrm{d}x^2\right)^2 + \left(h_3 \ \mathrm{d}x^3\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\sin^2\theta \ \mathrm{d}\varphi^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$$



El tensor métricó será

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta \;; \quad g_{33} = g_{\theta\theta} = r^2.$$

Por completitud, enumeraremos algunos otros sistemas de coordenadas y dejaremos al lector la labor de calcular los vectores unitarios y la métrica del espacio expresada en estas coordenadas.

3.4. Otros Sistemas Coordenados

3.4.1. Coordenadas Toroidales

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (\lambda, \mu, \alpha)\,; \qquad |\mathbf{r}\rangle = x\,(\lambda, \mu, \alpha)\,\hat{\imath} + y\,(\lambda, \mu, \alpha)\,\hat{\jmath} + z\,(\lambda, \mu, \alpha)\,\hat{\mathbf{k}}$$

con

$$x = x\,(\lambda, \mu, \alpha) = r\ \cos\alpha; \qquad \text{con } r = \frac{\sinh\lambda}{\cosh\lambda + \cos\mu}$$

$$y = y\,(\lambda, \mu, \alpha) = r\ \sin\alpha$$

$$z = z\,(\lambda, \mu, \alpha) = r\ \frac{\sin\mu}{\cosh\lambda + \cos\mu}$$

la métrica queda como

$$\mathrm{d}s^2 = r^2\left(\frac{\mathrm{d}\lambda^2 + \mathrm{d}\mu^2}{\sinh^2\lambda}\right)$$

Las superficies $\lambda = const$ representan toros alederor del eje z; las superficies $\mu = const$ son esferas con centro sobre el eje z;y finalmente las superficies $\alpha = const$ son planos que contiene al eje z

3.4.2. Coordenadas Elipsoidales

Dados tres números a, b y c; con $a > b > c > 0$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+\alpha} + \frac{y^2}{b^2+\alpha} + \frac{z^2}{c^2+\alpha} = 1$$

representa las superficies cuádricas[1] homofocales (es decir, con el mismo foco u origen en $(x = 0, y = 0, z = 0)$). Dependiendo del valor del parámetro α, estas ecuaciones representarán superficies

Elipsoides	si	$\alpha > -c^2$
Hiperboloides de una hoja	si	$-c^2 > \alpha > -b^2$
Hiperboloides de dos hojas	si	$-b^2 > \alpha > -c^2$

Esto quiere decir que por cada punto (x, y, z) del espacio, pasan tres superficies cuádricas (dependiendo del valor de α). Conocidos a, b y c y el punto, $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$, los valores de α vienen dados por las raíces de la ecuación cúbica

$$\frac{x^2}{a^2+\alpha} + \frac{y^2}{b^2+\alpha} + \frac{z^2}{c^2+\alpha} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^3 + \Delta\ \alpha^2 + \Phi\ \alpha + \Omega = 0$$

con

$$\Delta = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$\Phi = \left(b^2 + c^2\right) x_0^2 + \left(a^2 + c^2\right) y_0^2 + \left(a^2 + b^2\right) z_0^2 - a^2b^2 - \left(a^2 + b^2\right) c^2$$

$$\Omega = x_0^2 b^2 c^2 + y_0^2 a^2 c^2 + z_0^2 a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2$$

Las raíces de esta ecuación $(\alpha_1 = \lambda; \alpha_2 = \mu; \alpha_3 = \nu)$ definen las coordenadas elipsoidales del punto $(x, y, z) = (x(\lambda, \mu, \nu), y(\lambda, \mu, \nu), z(\lambda, \mu, \nu))$

$$\left(q^1, q^2, q^3\right) \Longleftrightarrow (\lambda, \mu, \nu)\,; \qquad |\mathbf{r}\rangle = x(\lambda, \mu, \nu)\,\hat{\imath} + y(\lambda, \mu, \nu)\,\hat{\jmath} + z(\lambda, \mu, \nu)\,\hat{\mathbf{k}}$$

y la ley de transformación queda como

$$x = x(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}$$

$$y = y(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}$$

$$z = z(\lambda, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}}$$

por cual la métrica será

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = & \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\mathrm{d}\lambda^2 + \frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{4(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}\mathrm{d}\mu^2 \\ & + \frac{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)}{4(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)}\mathrm{d}\nu^2 \end{aligned}$$

[1] Nótese que la proyección de estas superficies en el plano (x, y) representan curvas cónicas homofocales

4. Vectores, Tensores, Métrica y Transformaciones

Nos toca ahora construir expresiones de vectores y tensores a partir de sus leyes de transformación, hemos dicho que los vectores y los tensores son independiente del sistema de coordenadas (la base) en la cual se exprese.

4.1. Transformando Vectores

Así si dada dos bases de vectores coordenados $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$ para el espacio vectorial $\Re^3$ Entonces, se cumple que:

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \langle \mathbf{e}^i | a\rangle = a^i \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}^i | a\rangle = \tilde{a}^i \end{array} \right\} \Longrightarrow \quad \tilde{a}^i = a^j \langle \tilde{\mathbf{e}}^i | \mathbf{e}_j\rangle \Longleftrightarrow \tilde{a}^i = \underbrace{\frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^j}}_{\langle \tilde{\mathbf{e}}^i | \mathbf{e}_j\rangle} a^j$$

con ello de cartesianas a cilíndricas

$$x = x(r,\varphi) = \rho \cos\varphi; \quad y = y(r,\varphi) = \rho \operatorname{sen}\varphi; \quad z = z$$

de lo cual se deriva

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial\, x(\rho,\varphi)}{\partial\, \rho} = \cos\varphi \\ \\ \frac{\partial\, y(\rho,\varphi)}{\partial\, \rho} = \operatorname{sen}\varphi \\ \\ \frac{\partial\, z}{\partial\, \rho} = 0 \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\, x(\rho,\varphi)}{\partial\, \varphi} = -\rho \operatorname{sen}\varphi \\ \\ \frac{\partial\, y(\rho,\varphi)}{\partial\, \varphi} = \rho\cos\varphi \\ \\ \frac{\partial\, z}{\partial\, \varphi} = 0 \end{array} \right); \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\, x(\rho,\varphi)}{\partial\, z} = 0 \\ \\ \frac{\partial\, y(\rho,\varphi)}{\partial\, z} = 0 \\ \\ \frac{\partial\, z}{\partial\, z} = 1 \end{array} \right)$$

Entonces dados

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = a_x |\mathbf{i}\rangle + a_y |\mathbf{j}\rangle + a_z |\mathbf{k}\rangle$$

$$|a\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = a_r |\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle + a_\varphi |\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle + a_z |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

con

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\rho\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial\, |\rho\rangle}{\partial\, \rho} \right\|} \frac{\partial\, |\rho\rangle}{\partial\, \rho} = \frac{\partial\, x(\rho,\varphi)}{\partial\, \rho} \hat{\imath} + \frac{\partial\, y(\rho,\varphi)}{\partial\, \rho} \hat{\jmath} = \cos\varphi\ \hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\ \hat{\jmath}$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial\, |\rho\rangle}{\partial\, \varphi} \right\|} \frac{\partial\, |\rho\rangle}{\partial\, \varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\, x(\rho,\varphi)}{\partial\, \varphi}\ \hat{\imath} + \frac{\partial\, y(\rho,\varphi)}{\partial\, \varphi}\ \hat{\jmath} \right) = -\operatorname{sen}\varphi\ \hat{\imath} + \cos\varphi\ \hat{\jmath}\ ;$$

$$|\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial\, |\rho\rangle}{\partial\, z} \right\|} \frac{\partial\, |\rho\rangle}{\partial\, z} = \frac{\partial\, \left(x(\rho,\varphi)\hat{\imath} + y(\rho,\varphi)\hat{\jmath} + z\hat{\mathbf{k}} \right)}{\partial\, z} = \hat{\mathbf{k}}$$

Si tenemos en concreto un vector $|a\rangle = 5|\mathbf{i}\rangle + 4|\mathbf{j}\rangle + 3|\mathbf{k}\rangle$ quisiéramos conocer su expresión en coordenadas cilíndricas. Hay que hacer la acotación que existe una familia de sistemas de coordenados cilíndricos parametrizados por el ángulo φ y NO un único sistema coordenado. Obviamente se puede especificar el sistema coordenado y entonces tendremos un conjunto de componentes definito. Así la familia de componentes en cilíndricas del vector $|a\rangle$ serán

$$\tilde{a}^j = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | a\rangle = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | \left(\tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle \right) = \langle \tilde{\mathbf{e}}^j | \left(a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle \right)$$

con lo cual al expresar los vectores base

$$\tilde{a}^1 = a_r = \langle \tilde{\mathbf{e}}_r | \left(5 |\mathbf{i}\rangle + 4 |\mathbf{j}\rangle + 3 |\mathbf{k}\rangle\right) = (\cos\varphi \ \hat{\imath} + \sin\varphi \ \hat{\jmath}) \cdot \left(5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{\mathbf{k}}\right) = 5\cos\varphi + 4\sin\varphi$$

$$\tilde{a}^2 = a_\varphi = \langle \tilde{\mathbf{e}}_\varphi | \left(5 |\mathbf{i}\rangle + 4 |\mathbf{j}\rangle + 3 |\mathbf{k}\rangle\right) = (-\operatorname{sen}\varphi \ \hat{\imath} + \cos\varphi \ \hat{\jmath}) \cdot \left(5\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{\mathbf{k}}\right) = -5\operatorname{sen}\varphi + 4\cos\varphi$$

$$\tilde{a}^3 = a_z = \langle \tilde{\mathbf{e}}_z | \left(5 |\mathbf{i}\rangle + 4 |\mathbf{j}\rangle + 3 |\mathbf{k}\rangle\right) = \langle \mathbf{k} | \left(5 |\mathbf{i}\rangle + 4 |\mathbf{j}\rangle + 3 |\mathbf{k}\rangle\right) = 3$$

con lo cual

$$|a\rangle = 5 |\mathbf{i}\rangle + 4 |\mathbf{j}\rangle + 3 |\mathbf{k}\rangle = (5\cos\varphi + 4\sin\varphi) |\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle + (-5\operatorname{sen}\varphi + 4\cos\varphi) |\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle + 3 |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

donde es claro que existen infinitos sistemas cil'indricos parametrizados por el 'angulo φ , digamos

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_r = 5\cos\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) + 4\sin\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{25}{41}\sqrt{41} + \frac{16}{41}\sqrt{41} = \sqrt{41} \\ a_\varphi = -5\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) + 4\cos\left(\arctan\left(\frac{4}{5}\right)\right) = -\left(\frac{20}{41}\sqrt{41}\right) + \left(\frac{20}{41}\sqrt{41}\right) = 0 \\ a_z = 3 \end{cases}$$

con lo cual hemos alineado el eje $|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle$ a lo largo del vector $|a\rangle$. Ese es un sistema de coordenadas cil'indrico muy particular.

4.2. Transformando Tensores

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio vectorial. Consideremos el siguiente tensor

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\} \quad \Longrightarrow T^i_j = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es decir es un tensor que hemos expresado en coordenadas cartesianas y queremos pasarlo a cil'indricas. Para ello recordamos que

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}\ T^i_j \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \begin{cases} x^1 = x = x(\rho,\varphi) = \rho\cos\varphi \\ x^2 = y = y(\rho,\varphi) = \rho\operatorname{sen}\varphi \\ x^3 = z = z \end{cases} \\ \begin{cases} \tilde{x}^1 = \rho = \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tilde{x}^2 = \varphi = \varphi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \tilde{x}^3 = z = z \end{cases} \end{cases}$$

con lo cual

$$\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^1} = \frac{\partial\ \rho}{\partial\ x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^2} = \frac{\partial\ \rho}{\partial\ y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^3} = \frac{\partial\ \rho}{\partial\ z} = 0 \\ \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^1} = \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ x} = \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^2} = \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ y} = \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^3} = \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ z} = 0 \\ \frac{\partial\ \tilde{x}^3}{\partial\ x^1} = \frac{\partial\ z}{\partial\ x} = 0 & \frac{\partial\ \tilde{x}^3}{\partial\ x^2} = \frac{\partial\ z}{\partial\ y} = 0 & \frac{\partial\ \tilde{x}^3}{\partial\ x^3} = \frac{\partial\ z}{\partial\ z} = 1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que

$$\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ x^1}{\partial\ \tilde{x}^1} = \frac{\partial\ x}{\partial\ \rho} = \cos\varphi & \frac{\partial\ x^1}{\partial\ \tilde{x}^2} = \frac{\partial\ x}{\partial\ \varphi} = -\rho\operatorname{sen}\varphi & \frac{\partial\ x^1}{\partial\ \tilde{x}^3} = \frac{\partial\ x}{\partial\ z} = 0 \\ \frac{\partial\ x^2}{\partial\ \tilde{x}^1} = \frac{\partial\ y}{\partial\ \rho} = \operatorname{sen}\varphi & \frac{\partial\ x^2}{\partial\ \tilde{x}^2} = \frac{\partial\ y}{\partial\ \varphi} = \rho\cos\varphi & \frac{\partial\ x^2}{\partial\ \tilde{x}^3} = \frac{\partial\ y}{\partial\ z} = 0 \\ \frac{\partial\ x^3}{\partial\ \tilde{x}^1} = \frac{\partial\ z}{\partial\ \rho} = 0 & \frac{\partial\ x^3}{\partial\ \tilde{x}^2} = \frac{\partial\ z}{\partial\ \varphi} = 0 & \frac{\partial\ x^3}{\partial\ \tilde{x}^3} = \frac{\partial\ z}{\partial\ z} = 1 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\ T^i_j \frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m} \quad \Rightarrow \tilde{T}^k_m = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^i_j \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\tilde{T}^k_m = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\frac{\sin\varphi}{\rho} & \frac{\cos\varphi}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{T}^k_m = \begin{pmatrix} -\cos^2\varphi + 3\cos\varphi\sin\varphi + 3 & \rho\sin\varphi\cos\varphi - 2\rho + 3\rho\cos^2\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \frac{\cos\varphi\sin\varphi + 3\cos^2\varphi - 1}{\rho} & -3\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\varphi + 2 & -3\frac{\sin\varphi}{\rho} + 4\frac{\cos\varphi}{\rho} \\ \cos\varphi + 2\sin\varphi & -\rho\sin\varphi + 2\rho\cos\varphi & 2 \end{pmatrix}$$

Si suponemos que el origen del sistema de coordenadas cil'indrico est'a en el vector anterior. Esto es

$$|a\rangle = 5\,|\mathbf{i}\rangle + 4\,|\mathbf{j}\rangle + 3\,|\mathbf{k}\rangle \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow \rho = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4}{5}\right) = 0{,}67474 \quad rad \end{cases}$$

y entonces

$$\tilde{T}_m^k = \begin{pmatrix} 3{,}8537 & 2{,}030\,3 & 4{,}841\,4 \\ 0{,}20569 & 1.\,146\,3 & 0{,}195\,12 \\ 2{,}030\,3 & 6{,}0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos una nueva base

$$\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = |\mathbf{i}\rangle + |\mathbf{j}\rangle + |\mathbf{k}\rangle \end{array} \right. \qquad \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle \tilde{\mathbf{e}}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = 1 \\ \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = 2 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = 2 \\ \\ \langle \tilde{\mathbf{e}}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = 1 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = 2 & \langle \tilde{\mathbf{e}}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = 3 \end{pmatrix}$$

para ese mismo espacio $\Re^3$ encontraremos una nueva expresión que toma T_j^i en esa base. Igualmente encontraremos las expresiones para los siguientes tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$. Nótese que esta nueva base **no es ortogonal** ,$\langle \tilde{\mathbf{e}}^k |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \neq \delta_i^k$, con lo cual no se cumplen muchas cosas entre ellas $|\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle \langle \tilde{\mathbf{e}}^k| \neq 1$

Para encontrar la expersión $\tilde{T}_j^i$ expresamos los vectores base $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ en término de la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$

$$\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{e}_1\rangle = |\mathbf{i}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_2\rangle = |\mathbf{j}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle \\ \\ |\mathbf{e}_3\rangle = |\mathbf{k}\rangle = |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle \end{array} \right.$$

recordamos que un vector genérico

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \Longrightarrow$$

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle = \tilde{a}^1 |\mathbf{e}_1\rangle + \tilde{a}^2 (|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle) + \tilde{a}^3 (|\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle + |\mathbf{e}_3\rangle)$$

con lo cual

$$a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = \left(\tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3\right) |\mathbf{e}_1\rangle + \left(\tilde{a}^2 + \tilde{a}^3\right) |\mathbf{e}_2\rangle + \tilde{a}^3 |\mathbf{e}_3\rangle$$

y como

$$\left. \begin{array}{l} a^1 = \tilde{a}^1 + \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{a}^3 \\ a^3 = \tilde{a}^3 \end{array} \right\} \Longrightarrow a^i = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\, \tilde{a}^k \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1} = 1; & \frac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^3} = 1; \\ \\ \frac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2} = 1; & \frac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^3} = 1; \\ \\ \frac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1} = 0; & \frac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2} = 0; & \frac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^3} = 1; \end{array} \right.$$

Es de hacer notar que dado que la base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ se tiene que

$$|a\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = \tilde{a}^i |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle \quad \Longrightarrow \langle \mathbf{e}^i | a\rangle = a^j \langle \mathbf{e}^i |\mathbf{e}_j\rangle = a^j \delta_j^i = a^i = \tilde{a}^k \langle \mathbf{e}^i |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle \quad \Longrightarrow \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k} = \langle \mathbf{e}^i |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle$$

El mismo procedimiento se puede aplicar para expresar el vector $|a\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle$

$$|a\rangle = \tilde{a}^j |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle = a^j |\mathbf{e}_j\rangle = a^1 |\mathbf{e}_1\rangle + a^2 |\mathbf{e}_2\rangle + a^3 |\mathbf{e}_3\rangle = a^1 |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle + a^2 (|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle) + a^3 (|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle - |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}^1 = a^1 - a^2 \\ \tilde{a}^2 = a^2 - a^3 \\ \tilde{a}^3 = a^3\end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{a}^k = a^i \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1} = 1; & \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2} = -1; & \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^3} = 0; \\ \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^1} = 0; & \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^2} = 1; & \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^3} = -1; \\ \frac{\partial\, \tilde{x}^3}{\partial\, x^1} = 0; & \frac{\partial\, \tilde{x}^3}{\partial\, x^2} = 0; & \frac{\partial\, \tilde{x}^3}{\partial\, x^3} = 1; \end{array}\right.$$

Nótese que, como era de esperarse,

$$\frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k}\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^j} = \delta^i_j \quad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con las expresiones matriciales para las transformaciones ,estamos en capacidad de calcular, componente a componente, las representación del tensor en la nueva base con lo cual

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i}\frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m}\, T^i_j \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}^1_1 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad & \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^1_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^1_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^1_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^2_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^2_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^2_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^3}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^3_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^3_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^3_3\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}\tilde{T}^1_1 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad & 1 \cdot \left(1\; T^1_1 + 0\; T^1_2 + 0\; T^1_3\right) \\ & -1 \cdot \left(1\; T^2_1 + 0\; T^2_2 + 0\; T^2_3\right) \\ & +0 \left(1\; T^3_1 + 0\; T^3_2 + 0\; T^3_3\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{T}^1_1 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad T^1_1 - T^2_1 = 2 - 2 = 0$$

del mismo modo

$$\begin{aligned}\tilde{T}^1_2 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^i_j = \quad & \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^1_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^1_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^1_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^2_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^2_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^2_3\right) \\ & + \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^3}\left(\tfrac{\partial\, x^1}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^3_1 + \tfrac{\partial\, x^2}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^3_2 + \tfrac{\partial\, x^3}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^3_3\right)\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}\tilde{T}^1_2 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^2}\, T^i_j = \quad & 1 \cdot \left(1\; T^1_1 + 1\; T^1_2 + 0\; T^1_3\right) \\ & -1 \cdot \left(1\; T^2_1 + 1\; T^2_2 + 0\; T^2_3\right) \\ & +0 \left(1\; T^3_1 + 1\; T^3_2 + 0\; T^1_3\right)\end{aligned}$$

$$\tilde{T}^1_2 = \quad \tfrac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^i}\tfrac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^1}\, T^i_j = \quad \left(T^1_1 + T^1_2\right) - \left(T^2_1 + T^2_2\right) = (2+1) - (2+3) = -2$$

se puede continuar término a término o realizar la multiplicación de las matrices $\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i}, T^i_j$ y $\frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m}$ provenientes de la transformación de componentes de tensores. Vale decir

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i}\, T^i_j\, \frac{\partial\, x^j}{\partial\, \tilde{x}^m} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

hay que resaltar un especial cuidado que se tuvo en la colocacíon de la matrices para su multiplicación. Si bien en la expresión $\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}\ T^i_j$ las cantidades $\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}$ son números y no importa el orden con el cual se multipliquen, cuando se colocan como matrices debe respetarse la "concatenación interna de índices". Esto es cuando querramos expresar $\tilde{T}^k_m$ como una matriz, donde el índice contravariante k indica filas y el índice covariante m las columnas, fijamos primero estos índices y luego respetamos la "concatenación índices" covariantes con los contravariantes. Esta es la convención para expresar la multiplicación de matrices en la notación de índices[2]. Esto es

$$\tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}\ T^i_j \quad \Longrightarrow \tilde{T}^k_m = \frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}\ T^i_j\ \frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}$$

Ahora los objetos $\frac{\partial\ \tilde{x}^k}{\partial\ x^i}, T^i_j$ y $\frac{\partial\ x^j}{\partial\ \tilde{x}^m}$ pueden ser sustitidos (en sus puestos correspondientes) por su representación matricial.

Con lo cual hemos encontrado la respresentación matricial $\tilde{T}^k_m$ de las componentes del tensor $\mathcal{T}$ en la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}^1_1 = 0 & \tilde{T}^1_2 = -2 & \tilde{T}^1_2 = -3 \\ \tilde{T}^2_1 = 1 & \tilde{T}^2_2 = 2 & \tilde{T}^2_3 = 4 \\ \tilde{T}^3_1 = 1 & \tilde{T}^3_2 = 3 & \tilde{T}^3_3 = 5 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la expresión para $\tilde{T}_{km}$ recordamos que $\tilde{T}_{km} = \tilde{g}_{kn}\tilde{T}^n_m$ es decir, requerimos las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico $\tilde{g}_{kn}$ que genera esta base. Para ello recordamos que para para una base genérica, $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos tensor métrico como

$$\mathbf{g}\left[\overset{|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}}, \overset{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle}{\overset{\downarrow}{\circ}},\right] = \tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{g}_{ij} \equiv \tilde{g}_{ji} = \mathbf{g}\left[|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\right] \equiv \langle\tilde{\mathbf{e}}_i\ |\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \equiv \langle\tilde{\mathbf{e}}_j\ |\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle$$

$$\mathbf{g}\left[\overset{\langle\tilde{\mathbf{e}}^i|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}, \overset{\langle\tilde{\mathbf{e}}^j|}{\overset{\downarrow}{\bullet}}\right] = \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ij} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{g}^{ij} \equiv \tilde{g}^{ij} = (\tilde{g}_{ij})^{-1}$$

Es de hacer notar que la representación matricial para la métrica covariante g_{ij} de una base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle\} \equiv \{|\mathbf{i}\rangle, |\mathbf{j}\rangle, |\mathbf{k}\rangle\}$ es siempre diagonalEsto es

$$g_{11} = \langle\mathbf{e}_1\ |\mathbf{e}_1\rangle = \langle\mathbf{i}\ |\mathbf{i}\rangle = 1; \qquad g_{12} = \langle\mathbf{e}_1\ |\mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{i}\ |\mathbf{j}\rangle = 0; \quad g_{13} = \langle\mathbf{e}_1\ |\mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{i}\ |\mathbf{j}\rangle = 0;$$

$$g_{21} = \langle\mathbf{e}_2\ |\mathbf{e}_1\rangle = \langle\mathbf{j}\ |\mathbf{i}\rangle = 0; \qquad g_{22} = \langle\mathbf{e}_2\ |\mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{j}\ |\mathbf{j}\rangle = 1\tilde{n}; \quad g_{23} = \langle\mathbf{e}_2\ |\mathbf{e}_3\rangle = \langle\mathbf{j}\ |\mathbf{k}\rangle = 0;$$

$$g_{31} = \langle\mathbf{e}_3\ |\mathbf{e}_1\rangle = \langle\mathbf{k}\ |\mathbf{i}\rangle = 0; \qquad g_{32} = \langle\mathbf{e}_3\ |\mathbf{e}_2\rangle = \langle\mathbf{k}\ |\mathbf{j}\rangle = 0; \quad g_{33} = \langle\mathbf{e}_3\ |\mathbf{e}_3\rangle = \langle\mathbf{k}\ |\mathbf{k}\rangle = 1;$$

[2]Quizá una forma de comprobar si los índices está bien concatenados se observa si se "bajan" los índices contravariantes pero se colcan de antes que los covariantes. Esto es $T^i_j \rightarrow T_{ij}$ Así la multiplicación de matrices queda representada por $C^i_j = A^i_k B^k_j \rightarrow C_{ij} = A_{ik}B_{kj}$ y aquí es claro que ínidices consecutivos están "concatenados" e indican multiplicación

con lo cual

$$\left.\begin{array}{r}\langle T^n_m\rangle\\[1em] \langle T_{km}\rangle\equiv\langle g_{kn}T^n_m\rangle\\[1em] \langle T^{nm}\rangle\equiv\left\langle g^{nk}T^m_k\right\rangle\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad\begin{pmatrix}0&-2&-3\\1&2&4\\1&3&5\end{pmatrix}$$

donde hemos denotado $\langle\bullet\rangle$ como la representación matricial del objeto

Para el caso de la base genérica no ortonormal $\{|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle\}$ tenemos dos formas de calcular el tensor (las componentes covariantes y contravariantes) del tensor métrico. La primera es la forma directa

$$\tilde{g}_{11}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_1\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle=\langle\mathbf{i}\,|\mathbf{i}\rangle=1;\qquad \tilde{g}_{12}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_1\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle=\langle\mathbf{i}|\,(|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle)=1;$$

$$\tilde{g}_{21}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_2\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle=(\langle\mathbf{i}|+\langle\mathbf{j}|)\,|\mathbf{i}\rangle=1;\qquad \tilde{g}_{22}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_2\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle=(\langle\mathbf{i}|+\langle\mathbf{j}|)\,(|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle)=2$$

$$\tilde{g}_{31}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_3\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle=(\langle\mathbf{i}|+\langle\mathbf{j}|+\langle\mathbf{k}|)\,|\mathbf{i}\rangle=1;\qquad \tilde{g}_{32}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_3\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle=(\langle\mathbf{i}|+\langle\mathbf{j}|+\langle\mathbf{k}|)\,(|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle)=2;$$

y

$$\tilde{g}_{13}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_1\,|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle=\langle\mathbf{i}|\,(|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle+|\mathbf{k}\rangle)=1;$$

$$\tilde{g}_{23}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_2\,|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle=(\langle\mathbf{i}|+\langle\mathbf{j}|)\,(|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle+|\mathbf{k}\rangle)=2$$

$$\tilde{g}_{33}=\langle\tilde{\mathbf{e}}_3\,|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle=(\langle\mathbf{i}|+\langle\mathbf{j}|+\langle\mathbf{k}|)\,(|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle+|\mathbf{k}\rangle)=3$$

consecuentemente

$$\tilde{g}_{ij}\equiv\tilde{g}_{ji}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\tilde{g}^{ij}\equiv\tilde{g}^{ij}=(\tilde{g}_{ij})^{-1}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

La otra forma de calcular la métrica correspondiente la base ortonormal $\{|\mathbf{e}_1\rangle,|\mathbf{e}_2\rangle,|\mathbf{e}_3\rangle\}\equiv\{|\mathbf{i}\rangle,|\mathbf{j}\rangle,|\mathbf{k}\rangle\}$ y transformarla a la base no ortonormal $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle,|\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\}\equiv\{|\mathbf{i}\rangle,|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle,|\mathbf{i}\rangle+|\mathbf{j}\rangle+|\mathbf{k}\rangle\}$ esto es

$$\tilde{g}_{km}=\frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^k}\frac{\partial\,x^j}{\partial\,\tilde{x}^m}\;g_{ij}\quad\Longrightarrow\tilde{g}_{km}=\frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^k}\;g_{ij}\;\frac{\partial\,x^j}{\partial\,\tilde{x}^m}$$

La métrica para el la base ortonormal será diagonal y además $g_{ii}=\frac{1}{g^{ii}}$, con lo cual

$$g_{ij}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad g^{ij}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad g^i_j\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

y

$$\tilde{g}_{km}=\frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^k}\;g_{ij}\;\frac{\partial\,x^j}{\partial\,\tilde{x}^m}\quad;\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$$

nótese para conservar la convención de índices y matrices hemos representado que hemos traspuesto la matriz correspondiente a $\frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^k}$. La razón, como dijimos arriba es

$$\tilde{g}_{km}=\frac{\partial\,x^i}{\partial\,\tilde{x}^k}\;g_{ij}\;\frac{\partial\,x^j}{\partial\,\tilde{x}^m}\quad\longrightarrow\tilde{g}_{km}=\Pi_{ik}\;g_{ij}\;\Pi_{jm}\quad\longrightarrow\tilde{g}_{km}=\bar{\Pi}_{ki}\;g_{ij}\;\Pi_{jm}$$

Para poder representar multipicación de matrices los índices deben estar consecutivos, por tanto hay que trasponer la represetación matricial para poder multiplicarlar.

Ya estamos en capacidad de obtener las representacines matriciales para los tensores: $\tilde{T}_i^j, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}^{ij}$.

$$\left\langle \tilde{T}_i^j \right\rangle = \left\langle \tilde{T}_j^i \right\rangle^{\mathrm{T}} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \tilde{T}_i^j \right\rangle$$

$$\left\langle \tilde{T}_{km} \right\rangle = \left\langle \tilde{g}_{kn} \tilde{T}_m^n \right\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\langle \tilde{T}_{km} \right\rangle$$

$$\left\langle \tilde{T}^{kn} \right\rangle = \left\langle \tilde{T}_m^n \tilde{g}^{mk} \right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & -13 \\ 7 & 13 & 17 \\ 9 & 17 & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \tilde{T}^{km} \right\rangle$$

Referencias

[1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) `QA300 A66C3 1972`

[2] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[3] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[5] Gel´fand, I.M. (1961) **Lectures on Linear .Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[6] Lovelock, D, y Rund, H. (1975) **Tensors, Differential Forms & Variational Principles** (*John Wiley Interscience, Nueva York*).

[7] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)

[8] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)