Métodos Matemáticos de la Física 1
Examen Parcial
Análisis Vectorial
Junio 2004

Nombre____

1. Considere los siguientes campos de fuerzas

   a) $\vec{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n \left(x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{k}\right)$

   1) Calcule en trabajo $\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$ a lo largo de un arco de circunferencia unitaria, colocado en el plano x, y: primero girando en sentido antihorario de $0 \to \pi$ y luego en sentido horario $0 \to -\pi$.
   ¿ qué puede concluir del campo de fuerzas ? (2 ptos.)
   Solución:
   Se puede resolver de varías maneras.
   a) La forma elegante es expresando el campo de fuerza $\vec{F}$ en coordenadas esféricas. Esto es
   $$\vec{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n \left(x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{k}\right) \equiv r^{2n}\vec{r} \equiv r^{2n+1}\hat{u}_r$$
   luego recordamos que d $\vec{r}$ siempre es tangente a la trayectoria, y en este caso la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano x, y, entonces
   $$\mathrm{d}\,\vec{r} \propto \hat{u}_\phi \quad \Rightarrow \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = 0 \quad \textit{en todo punto}$$
   con lo cual esta fuerza es conservativa porque
   $$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = 0 \quad \forall\,(x, y) \quad \Rightarrow \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = 0$$
   b) *la otra forma es con la fuerza bruta cartesiana*
   $$\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int \left(x^2+y^2+z^2\right)^n \left(x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}\ x\ \hat{\imath} + \mathrm{d}\ y\ \hat{\jmath} + \mathrm{d}\ z\ \hat{k}\right)$$
   como la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano x, y, entonces $y = \sqrt{1-x^2}$, $z = 0$, con x variando entre 1 y -1 tanto el en caso de circularla en sentido antihorario de $0 \to \pi$ y en sentido horario $0 \to -\pi$.
   $$\int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_1^{-1} \left(x^2+y^2\right)^n x\ \mathrm{d}\ x + \int_0^0 \left(x^2+y^2\right)^n y\ \mathrm{d}\ y$$
   $$= \int_1^{-1} \left(x^2 + \left(1-x^2\right)\right)^n x\ \mathrm{d}\ x = \int_1^{-1} x\ \mathrm{d}\ x = 0$$
   No es suficiente, pero podemos sospechar que la fuerza es conservativa, por cuanto dos circulaciones distintas nos dieron el mismo valor de la integral.

2) ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial $\varphi(x,y,z)$ asociado tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$? Justifique su respuesta.
Si existe el potencial, encuéntrelo y determine el valor del exponente n de tal forma que la función potencial diverge simultáneamente en el origen y en infinito. (4 ptos.)
Solución:
Otra vez, planteamos la ecuación $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi(x,y,z)$ en esféricas. Esto es

$$\vec{F} = r^{2n+1}\hat{u}_r = -\left(\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}\hat{u}_\phi\right)$$

con lo cual tienen que cumplirse las siguientes ecuaciones

$$r^{2n+1} = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial r}; \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}; \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r,\theta,\phi)}{\partial\phi}$$

Las dos últimas ecuaciones, válidas para $r \neq 0$, implican que φ no depende ni de θ, ni de ϕ. La primera puede ser integrada y nos queda como

$$r^{2n+1} = \frac{\mathrm{d}\varphi(r)}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \int r^{2n+1}\mathrm{d}\ r = \varphi(r) \quad \Rightarrow \varphi(r) = \frac{-r^{2n+2}}{2n+2} + C$$

resultado que claramente diverge para $n = -1$, tanto cuando $r \to 0$ como cuando $r \to \infty$
Obviamente, valí a también hacerlo en cartesianas

$$\vec{F} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n \left(x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{k}\right) = -\left(\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}\hat{k}\right)$$

con lo cual

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n x = -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} \tag{1}$$

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n y = -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y} \tag{2}$$

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n z = -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} \tag{3}$$

Integrando la primera de esas ecuaciones

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n x = -\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi(x,y,z) = -\int \left(x^2+y^2+z^2\right)^n x\ \mathrm{d}\ x = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(y,z)$$

Donde $C(y,z)$ es una función que tendremos que ir descubriendo poco a poco. Ahora bien, sustituyendo esa forma de $\varphi(x,y,z)$ en la ecuación (2), tendremos que

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n y = -\frac{\partial\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}(y,z)\right)}{\partial y} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n y - \frac{\partial \mathcal{C}(y,z)}{\partial y}$$

con lo cual concluimos que C es independiente de y

$$0 = \frac{\partial\left(\mathcal{C}(y,z)\right)}{\partial y} \quad \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}(z) \quad \Rightarrow \varphi(x,y,z) = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(z)$$

y ahora sustituyo esta nueva forma de la función $\varphi(x,y,z)$ en la ecuación (3)

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^n z = -\frac{\partial\left(-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1}+\mathcal{C}(z)\right)}{\partial z} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^n z - \frac{\partial \mathcal{C}(z)}{\partial z}$$

entonces C también es independiente de z. Finalmente se determina que

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n+1}}{n+1}$$

obviamente es el mismo resultado cuando recordamos que $r^2 = x^2+y^2+z^2$ y tiene el mismo comportamiento para $n=-1$.

b) $\vec{F} = \frac{2A\cos\theta}{r^3}\hat{u}_r + \frac{A\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}\hat{u}_\theta$ con $A = const$ y $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta\}$ vectores unitarios base en coordenadas esféricas

1) Calcule el rotor $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ (2 ptos.)
El rotor en coordenadas esféricas viene dado por

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{u}_r & r\ \hat{u}_\theta & r\sin\theta\ \hat{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \frac{2A\cos\theta}{r^3} & r\ \frac{A\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r}\ \hat{u}_\phi\left(\frac{\partial\left(\frac{A\sin\theta}{r^2}\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(\frac{2A\cos\theta}{r^3}\right)}{\partial\theta}\right) = 0$$

2) Calcule en trabajo $\oint\vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ ¿ qué puede concluir del campo de fuerzas ? (2 ptos.)
Por el teorema de Stokes el trabajo en un circuito cerrado se anula

$$\oint\vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{r} = \iint\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{S} = 0$$

Se pueda además concluir que la fuerza es conservativa.

3) ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial asociado tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$? Justifique su respuesta y de ser posible, encuentre la expresión para ese potencial (4 ptos.)
Una vez más
$$\frac{2A\cos\theta}{r^3}\hat{u}_r+\frac{A\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}\hat{u}_\theta = -\left(\frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\theta}\hat{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\varphi}\hat{u}_\phi\right)$$
con lo cual, también una vez más
$$\frac{2A\cos\theta}{r^3} = -\frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial r}$$
$$\frac{A\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\theta}$$
$$0 = \frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\phi}$$
La última ecuación indica que φ no depende de ϕ. Ahora bien integrando la primera de estas ecuaciones, tendremos
$$\frac{2A\cos\theta}{r^3} = -\frac{\partial\varphi\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial r} \quad \Rightarrow \varphi\left(r,\theta\right) = -\int\frac{2A\cos\theta}{r^3}\mathrm{d}\ r + \mathcal{C}\left(\theta\right) = A\frac{\cos\theta}{r^2} + \mathcal{C}\left(\theta\right)$$
al sustituir la forma del potencial en la tercera ecuación tendremos
$$\frac{A\sin\theta}{r^2} = -\frac{\partial\left(A\frac{\cos\theta}{r^2} + \mathcal{C}\left(\theta\right)\right)}{\partial\theta} \quad \Rightarrow \frac{\partial\mathcal{C}\left(\theta\right)}{\partial\theta} = 0$$
De esta forma
$$\varphi\left(r,\theta\right) = A\frac{\cos\theta}{r^2}$$

c) $\vec{F} = \frac{1}{r^2}\hat{u}_r$ Encuentre algún posible campo vectorial $\vec{A}$ tal que $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{F}$ (4 ptos.).
Otra vez
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left|\begin{array}{ccc} \hat{u}_r & r\ \hat{u}_\theta & r\sin\theta\ \hat{u}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r\left(r,\theta,\phi\right) & r\ A_\theta\left(r,\theta,\phi\right) & r\sin\theta\ A_\phi\left(r,\theta,\phi\right) \end{array}\right| = -\frac{1}{r^2}\hat{u}_r$$
con lo cual
$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(r\sin\theta\ A_\phi\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial\left(r\ A_\theta\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial\phi}\right)$$
$$0 = \left(\frac{\partial\left(r\sin\theta\ A_\phi\left(r,\theta\right)\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\phi}\right)$$
$$0 = \left(\frac{\partial\left(r\ A_\theta\left(r,\theta,\phi\right)\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r\left(r,\theta,\phi\right)}{\partial\theta}\right)$$

Ahora hay que hacer algún tipo de suposición para que podamos encontrar, fácilmente algún potencial vectorial. Supongamos pues que

$$\left.\begin{array}{c} A_r(r,\theta,\phi) = cte \\ \\ A_\phi(r,\theta,\phi) \\ \\ A_\theta(r,\theta,\phi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin\theta = \dfrac{\partial\left(r\ \sin\theta\ A_\phi(r,\theta,\phi)\right)}{\partial\theta} \\ \\ 0 = \dfrac{\partial A_r(r,\theta,\phi)}{\partial\phi} \\ \\ 0 = A_\theta(r,\theta,\phi) + r\dfrac{\partial\ A_\theta(r,\theta,\phi)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r(r,\theta,\phi)}{\partial\theta} \end{array}\right.$$

Integrando la primera obtendremos

$$\sin\theta = \frac{\partial\left(r\ \sin\theta\ A_\phi(r,\theta,\phi)\right)}{\partial\theta} \quad \Rightarrow A_\phi(r,\theta,\phi) = \frac{-\cos\theta}{r\sin\theta} + C_1(r,\theta)$$

de la segunda concluimos que $A_r = A_r(r,\theta)$ *es decir,* A_r *es independiente de* ϕ*. Finalmente de la tercera ecuación concluimos que podemos hacer adicionalmente* $A_r = A_r(r)$ *y* $C_1(r,\theta) = 0$*. Resumiendo*

$$\vec{F} = -\frac{1}{r^2}\hat{u}_r \quad \wedge \quad \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{F} \quad \Rightarrow \vec{A} = A_r(r)\,\hat{u}_r + \frac{-\cos\theta}{r\sin\theta}\ \hat{u}_\phi$$

d) $\vec{F} = \left(x^2\ \hat{\imath} + y^2\ \hat{\jmath} + z^2\ \hat{k}\right)$ y evalúe las siguientes integrales

1) $\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\ \vec{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria (2 ptos.)
Por el Teorema de Stokes

$$\oint_c \vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{r} = \iint_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\mathrm{d}\ \vec{S}$$

con lo cual

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \oint_c \vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{r} = 0$$

2) $\oint\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{S}$ a lo largo de una esfera unitaria (2 ptos.)
Por el Teorema de la divergencia

$$\oint\oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\ \vec{S} = \iiint_v \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\ \mathrm{d}V$$

por consiguiente

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\ \mathrm{d}V = \iiint_V \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x^2\ \hat{\imath} + y^2\ \hat{\jmath} + z^2\ \hat{k}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

$$= \iiint_V (2x + 2y + 2z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

si ahora transformamos a coordenadas esféricas tendremos que

$$x = r\sin\theta\cos\varphi; \quad y = r\sin\theta\sin\varphi; \quad z = r\cos\theta; \quad \text{con } \mathrm{d}V = r^2\sin\theta \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$$

con lo cual

$$\iiint_V (2x+2y+2z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V (2r\sin\theta\cos\varphi + 2r\sin\theta\sin\varphi + 2r\cos\theta)\, r^2\sin\theta \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi$$

$$\iiint_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\ \mathrm{d}V = -\frac{1}{4}\pi$$