Métodos Matemáticos 1
Tarea 4
Tensores e Indices
Abril 2005

1. En un espacio euclideano E^n se define un vector $\tilde{u}$ unitario. Muestre que

   a) Si definimos el tensor $P^i_j = u^i u_j$ entonces $P^i_j = P^k_j P^i_k$. Este tipo de objetos lo llamaremos proyector.

   b) Encuentre u^i para $n = 3$ para cada una de las representaciones de

$$P^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P^i_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Muestre que si $A_{hijk}x^h x^i y^j y^k = 0 \ \forall x^j, y^k \in E^n$ entonces

$$A_{hijk} + A_{jihk} + A_{hkji} + A_{jkhi} = 0$$

3. En Relatividad General, el tensor de curvatura de Riemman satisface las siguientes ecuaciones de simetría

$$R_{\mu\nu\lambda\zeta} = -R_{\mu\nu\zeta\lambda} = -R_{\nu\mu\lambda\zeta} \qquad \text{con } \mu\nu\lambda\zeta = 0, 1, 2, 3.$$

   muestre que el número de componentes independientes se reduce de 256 a 36. Si adicionalmente cumple con $R_{\mu\nu\lambda\zeta} = R_{\lambda\zeta\mu\nu}$el número de componentes independientes se reduce a 21. Más aún, si cumple con

$$R_{\mu\nu\lambda\zeta} + R_{\mu\lambda\zeta\nu} + R_{\mu\zeta\nu\lambda} = 0$$

   son 20 las componentes independientes.

4. Considere un tensor de rango 4, T_{hijk} antisimétrica respecto a cualquier par de índices. ¿ cuántas componentes independientes tiene T_{hijk} ?

5. Dados T^i_j y $a^i \in E^3$ con

$$T_{ij} = T^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{a} = 5i_1 + 2i_2 - 5i_3 \qquad \text{con } a^i \equiv a_i$$

   a) Calcule $T^i_j a_i$ y $T^i_j a^j$

   b) Si ahora $\vec{b} = -2i_1 + 5i_2 + 4i_3$ Calcule $T^i_j a_i b^j, T^i_j b_i b^j$.

   c) Construya y muestre las partes simétrica S_{ij} y antisimétrica A_{kl} del tensor T^i_j

   d) Calcule $S^i_j a_i b^j$, $A^i_j a_i b^j, S^i_j a_i a^j$, $A^i_j b_i b^j$

6. El momento de inercia se define como
$$I^i_j = \int_V \mathrm{d}v \rho\left(\vec{r}\right)\left(\delta^i_j\left(x^k x_k\right) - x^i x_j\right) \qquad \text{con} \;\; x^i = \{x, y, z\} \text{ y } \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \;\mathrm{d}y \;\mathrm{d}z$$
   a) Muestre que I^i_j es un tensor
   b) Encuentre la representación matricial para I^i_j
   c) Considere un cubo de lado l y masa total M tal que tres de sus aristas coinciden con un sistema de coordenadas cartesiano. Encuentre el Tensor momento de Inercia, I^i_j.

7. Dado un tensor genérico de segundo orden T_{ij} Demostrar
   a) El determinante , $\det[\mathbf{T}] \equiv \det\left[T^i_j\right] = T$ y la traza, $\mathrm{tr}\left[T^i_j\right] = T^i_i$ de los tensores son un invariantes, en otras palabras $\det\left[T^i_j\right]$ y $\mathrm{tr}\left[T^i_j\right]$ son escalares respecto a transformaciones de coordenadas.
   b) Si definimos la matriz adjunta, $\mathrm{adj}\,[\mathbf{A}]$, como la traspuesta de la matriz de cofactores
$$\mathrm{adj}\,[\mathbf{A}] = (\mathbf{A}^c)^T \qquad \Longrightarrow \mathrm{adj}\left[A^i_j\right] = \left((A^c)^i_j\right)^T = (A^c)^j_i$$
   donde la matriz de cofactores $(A^c)^i_j$ viene dada por
$$A^i_j = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow (A^c)^i_j = \begin{pmatrix} (A^c)^1_1 & (A^c)^1_2 & (A^c)^1_3 \\ (A^c)^2_1 & (A^c)^2_2 & (A^c)^2_3 \\ (A^c)^3_1 & (A^c)^3_2 & (A^c)^3_3 \end{pmatrix}$$
   y los cofactores son
$$(A^c)^1_1 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^1_2 = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^1_3 = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}$$
$$(A^c)^2_1 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^2_2 = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^2_3 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix}$$
$$(A^c)^3_1 = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^3_2 = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^3_3 = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix}$$
   Para la transformación $\tilde{x}^i = a\; x^i$ con a un escalar constante, muestre que
      1) $\tau^i_j = \frac{\mathrm{adj}\left[T^i_j\right]}{T}$ es un tensor
      2) Su determinante, $\det\left[\tau^i_j\right] = \tau$ y su traza, $\mathrm{tr}\left[\tau^i_j\right] = \tau^i_i$ también serán invariantes.
      3) $T^i_j = \frac{\mathrm{adj}\left[\tau^i_j\right]}{\tau}$
      4) $\tau T = 1$