

Métodos Matemáticos 1

Tarea 4

Análisis Vectorial

Mayo 2005

1. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

2. La ecuación de equilibrio hidrostático para una esférica es

$$\vec{\nabla}P(r) + \rho(r)\vec{\nabla}\varphi(r) = 0$$

donde $P(r)$ es la presión, $\rho(r)$ la densidad y $\varphi(r)$ el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

3. Dado $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ con $\|\vec{r}\| = r = cte$, $f(r)$ un campo escalar bien comportado y \vec{a} y \vec{c} vectores constantes, muestre que

$$a) \vec{\nabla}r = \hat{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}; \quad \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}f(r)) = \vec{a}f(r) + (\vec{a} \cdot \vec{r})f'(r)\hat{\mathbf{u}}_r$$

$$b) \vec{\nabla} \cdot (\vec{r}f(r)) = 3f(r) + rf'(r); \quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}) = 4(\vec{a} \cdot \vec{r}) \\ \vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{c}) = \vec{\nabla} \cdot ((\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}); \quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{c}) = -2(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

$$c) \text{ Encuentre los enteros } n \text{ tales que } \vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = 0$$

$$d) \vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times (f(r)\vec{r}) = 0; \quad \vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c}; \quad \vec{\nabla} \times (\vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{r})) = \vec{a} \times \vec{c} \\ \vec{\nabla} \times ((\vec{c} \times \vec{r})\vec{a}) = \vec{a} \times \vec{c}$$

$$e) (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})f(r) = r^2\Delta f(r) - r^2\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial f(r)}{\partial r} \text{ con } \Delta f(r) \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})f(r)$$

4. Encuentre la expresión para la divergencia y el rotor de la velocidad \vec{v} y la aceleración \vec{a} de un cuerpo rígido alrededor de un punto (x, y, z)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \vec{a} = \vec{c} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y \vec{c} es un vector constante.

5. Pruebe que el campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r})$ de un disco que rota alrededor de su centro con una velocidad angular $\vec{\omega}$ cumple con la relación $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$
6. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los siguientes campos.

- a) $\vec{a} = \frac{1}{2}(-y \hat{i} + x \hat{j})$
 b) $\vec{a} = (xy + 1) \hat{i} + (\frac{1}{2}x^2 + x + 2) \hat{j}$

7. Encuentre el rotor y el flujo para el campo vectorial

$$\vec{a} = (x^2 + y - 4) \hat{i} + 3xy \hat{j} + (2xz + z^2) \hat{k}$$

a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z > 0$

8. Muestre la relación

$$\Delta \vec{a} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a})$$

y a partir de ella encuentre las componentes del Laplaciano $\Delta \vec{a}$ en coordenadas cilíndricas

9. Muestre que el vector, $\vec{A}(\vec{r})$, solución a la ecuación

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - k^2 \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{\nabla} + k^2) \vec{A} = 0$$

con la condición solenoidal $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. La ecuación $(\vec{\nabla} + k^2) \vec{A} = 0$ se conoce como la ecuación de Helmholtz.

10. Dado un campo de fuerzas $\vec{F} = r^n \vec{r}$. Verifique si existe una función escalar $\varphi(x, y, z)$ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi(x, y, z)$. En el caso de que sea posible, encuentre esa función $\varphi(x, y, z)$.
11. En mecánica clásica la cantidad de movimiento viene definida como $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Para pasar a mecánica cuántica se asocia \vec{r} y \vec{p} con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \mathbf{X} | \psi \rangle &= x \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = x \psi(\vec{r}) & \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_x | \psi \rangle &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r}) \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{Y} | \psi \rangle &= y \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = y \psi(\vec{r}) & \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_y | \psi \rangle &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \psi(\vec{r}) \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{Z} | \psi \rangle &= z \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = z \psi(\vec{r}) & \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_z | \psi \rangle &= \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \psi(\vec{r}) \end{aligned}$$

En definitiva, en coordenadas cartesianas en la representación de coordenadas $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ tendremos que

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{R} | \psi \rangle = \vec{r} \psi(\vec{r}) \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{r} | \mathbf{P}_x | \psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{r})$$

a) Muestre que en Mecánica cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular son

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{L}_x | \psi \rangle = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\vec{r}); \quad \langle \mathbf{r} | \mathbf{L}_y | \psi \rangle = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{L}_z | \psi \rangle = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\vec{r})$$

b) Utilizando las definiciones anteriores muestre que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantidad de movimiento angular cumple con

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = i\hbar \mathbf{L}_z \quad \text{y en general } \varepsilon_{ijk} \mathbf{L}^i \mathbf{L}^j = i\hbar \mathbf{L}_i \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{L}} \times \tilde{\mathbf{L}} = i\tilde{\mathbf{L}}$$

con $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_x$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_y$; $\mathbf{L}^3 = \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_z$ y $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_x \hat{i} + \mathbf{L}_y \hat{j} + \mathbf{L}_z \hat{k}$

c) Dados dos Operadores Vectoriales $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ que conmutan entre ellos y con $\tilde{\mathbf{L}}$ tales que

$$[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}] = [\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{L}}] = [\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}}] = 0$$

demuestre entonces que

$$[\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}] = i (\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \tilde{\mathbf{L}}$$

12. El campo magnético generado por una corriente I es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j} \right)$$

Encuentre un vector potencial magnético, \vec{A} , tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

13. Si un campo vectorial tiene la forma $\vec{B} = \vec{\nabla} \phi \times \vec{\nabla} \varphi$, entonces \vec{B} es solenoidal y su potencial vectorial es: $\vec{A} = \frac{1}{2} (\phi \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \phi)$.

14. Dados, el potencial vectorial, $\vec{A}(\vec{r})$, del momento magnético dipolar, \vec{m} , y la fuerza $\vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{m})$ que registra un momento magnético dipolar, \vec{m} , sometido a un campo magnético externo, \vec{B} , muestre que la fuerza ejercida por un dipolo magnético sobre otro viene dada por

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_{\vec{m}}(\vec{r}) &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right) \vec{m} \times \vec{r} \\ \vec{F}_{\vec{m}}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{m}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad \vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{2m_{1r} m_{2r} - m_{1\varphi} m_{2\varphi} - m_{1z} m_{2z}}{r^3} \right)$$

con $\vec{m} = m_r \hat{u}_r + m_\varphi \hat{u}_\varphi + m_z \hat{u}_z$

15. Desarrolle el Teorema de Gauss para el caso bidimensional. Esto es, suponga una línea de carga orientada en la dirección del eje z genera un potencial

$$\varphi(\rho) = -q \frac{\ln \rho}{2\pi\epsilon_0}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \quad \text{con } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

16. Pruebe la generalización del Teorema de Green

$$\iiint_V \{\zeta(\vec{r}) \mathcal{L}\xi(\vec{r}) - \xi(\vec{r}) \mathcal{L}\zeta(\vec{r})\} dV = p(\vec{r}) \iint_S \{\zeta(\vec{r}) \tilde{\nabla}\xi(\vec{r}) - \xi(\vec{r}) \tilde{\nabla}\zeta(\vec{r})\} \cdot d\vec{S}$$

donde \mathcal{L} es el operador autoadjunto definido por $\mathcal{L} = \vec{\nabla} \cdot (p(\vec{r}) \vec{\nabla}) + q(\vec{r})$

17. Considere una esfera de radio $r = a$ y carga Q . Grafique su potencial electrostático para $0 < r < \infty$.

18. Considere una esfera de densidad uniforme, ρ_0 , radio $r = a$, y masa M .

- Muestre que la fuerza gravitacional por unidad de masa es $\vec{F} = -\left(\frac{4\pi G \rho_0}{3r}\right) \hat{\mathbf{u}}_r$ para $0 < r \leq a$
- Encuentre el potencial gravitacional asociado a esta fuerza
- Imagine un túnel que atravieze la esfera pasado por su centro. Encuentre la ecuación de movimiento y la expresión del período para una partícula de masa m , que se deja caer por ese túnel.

19. Dado un vector potencial magnético, \vec{A} , tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ muestre que

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad \text{es invariante de calibre: } \vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$$

20. La fuerza de Lorentz para una partícula con carga q que se mueve con una velocidad \vec{v} en un campo eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} es $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Muestre que

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F} = \left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) \right]$$