Los vectores de siempre*

L. A. Núñez**
Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,
(CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Versión β 1.0 Marzo 2005

Índice

*__ADVERTENCIA:__ El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.**

**e-mail: `nunez@ula.ve` Web: http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/

1. Para comenzar

Este conjunto de secciones pretende hacer una repaso, un recordatorio y avanzar sobre lo que la mayoría de Uds. conocen o han escuchado a lo largo de sus cursos de Física, Matemáticas y Química.

2. Vectores y escalares y álgebra vectorial

Desde siempre, desde los primeros cursos de Física en educación media, venimos hablando de vectores como cantidades que tienen que ser representadas con más de un número. Son muchas las razones que obligan a introducir este (y otro) tipo de cantidades, enumeraremos algunas que a criterio personal son como más representativas.

1. **Necesidad de modelos matemáticos de la naturaleza.** Desde los albores del renacimiento, con Galileo Galilei a la cabeza es imperioso representar cantidades de manera precisa. Las matemáticas nos apoyan en esta necesidad de precisión. Desde ese entonces las matemáticas son el lenguaje de la actividad científica.

2. **Los modelos tienen que tener contrastación experimental.** Las ciencias y sus modelos, en última instancia, tienen que ver con la realidad, con la naturaleza y por ello debemos medir y contrastar las hipótesis con esa realidad que modelamos. Necesitamos representar cantidades medibles (observables) y que por lo tanto tienen que ser concretadas de la forma más compacta, pero a la vez más precisa posible.

3. **Las leyes de los modelos deben ser independiente de los observadores.** Cuando menos a una familia significativa de observadores. El comportamiento de la naturaleza no puede depender de la visión de un determinado observador, así los modelos que construimos para describirla, tampoco pueden depender de los observadores. Con conocer la ley de transformación entre observadores equivalentes deberemos conocer cómo ocurren los fenómenos en otros referenciales.

Por ello, tropezaremos con escalares, vectores, tensores y espinores, dependiendo del número de cantidades que necesitemos para representar ese objeto pero, sobre todo, dependiendo de la ley de transformación que exista entre estos objetos. Constataremos que las leyes de la Física vienen escritas en forma vectorial (o tensorial) y, por lo tanto, al conocer la ley de transformación de los vectores (tensores) conoceremos la visión que de esta ley tendrán otros observadores.

2.1. Escalares y vectores

Dejaremos para más adelante caracterizar objetos como tensores y espinores, por ahora nos contentaremos con refrescar nuestros recuerdos con cantidades como:

Escalares: Serán aquellas cantidades las cuales se representan con UN solo número, una magnitud: temperatura, volumen, masa, entre otras. Es costumbre no denotarlas de manera especial, así $T = 5^oC$ representará una temperatura de 5 grados centígrados.

Vectores: Serán cantidades las cuales, para ser representadas por un objeto matemáticos requieren más de un número, requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Entre las cantidades que típicamente reconocemos como vectores están: la velocidad, la aceleración, la fuerza En términos gráficos podremos decir que un vector será un segmento orientado, en el cual la dimensión del segmento representará su módulo y su orientación la dirección y el sentido. Para diferenciarla de las cantidades escalares hay una variedad de representaciones, entre ellas: en negrita $\mathbf{a}$; con una flecha arriba de la cantidad $\vec{a}$; con una tilde arriba $\tilde{a}$; o explicitando el origen del segmento orientado $\overrightarrow{OP}$. El módulo del vector lo representaremos dentro de la función valor absoluto, o sencillamente sin la flecha arriba $a = |\mathbf{a}| = |\vec{a}|$.

Los vectores son independientes del sistema de coordenadas. Sus características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenada. Más aún, habrá vectores que podremos desplazarlos (conservando su módulo dirección y sentido) paralelos a ellos mismos, en el espacio y (obvio que) seguirán siendo los mismo. Por ello encontrarán el término de *vectores deslizantes*. Un ejemplo de ellos son las fuerzas que actúan en un determinado cuerpo, como se muestra el cuadrante III en la Figura 1, arriba. También habrá vectores atados a un punto en el espacio, por cuanto representan una de sus propiedades: la velocidad del viento, el campo eléctrico, o sus variaciones son algunos ejemplos de estos *vectores atados* (observe la Figura 2 como ejemplos ilustrativos).

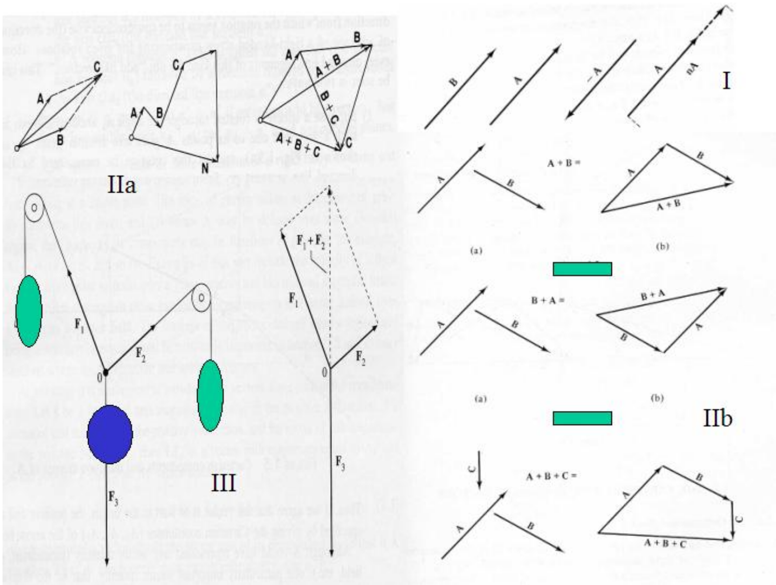

Figura 1: Vectores y sus operaciones

2.2. Algebra de vectores

Enumeraremos rápidamente el álgebra de vectores sin hacer referencia a un sistema de coordenadas. Desde siempre nos enseñaron a representar gráficamente este álgebra. Así tenemos que:

Vector nulo Es aquel que tiene por módulo cero y no se le pude asignar dirección ni sentido. Podremos comparar vectores si tienen la misma dirección y sentido.

Vector unitario Es aquel que tiene por módulo la unidad, es muy útil por cuanto, para efectos algebraicos, "contiene" únicamente dirección y sentido. Lo denotaremos con un acento circunflejo, comúnmente llamado "sombrero" $\hat{u}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, con lo cual todo vector $\vec{a} = |\vec{a}|\, \hat{u}_{\vec{a}}$ se podrá expresar por un módulo en la dirección y sentido de un vector unitario.

Comparamos vectores Al comparar sus módulos diremos que pueden ser mayores, menores o iguales. Por lo tanto, tal y como mostramos en el cuadrante I de la Figura 1, dos vectores serán iguales $\vec{a} = \vec{b}$ si tienen la misma dirección y sentido.

Multiplicación por un escalar Un vector, multiplicado por un escalar, n, cambiará su módulo si $n > 0$ y cambiará su sentido y eventualmente su módulo si $n < 0$ Tal y como puede apreciarse en el cuadrante I de la Figura 1. Claramente dos vectores proporcionales serán colineales. Diremos además, que el inverso del vector $\vec{a}$ será la multiplicación de $\vec{a}$ por (-1) . Esto es $\vec{c} = (-1)\, \vec{a} = -\vec{a}$

Suma de vectores Aprendimos que para sumar vectores utilizamos la regla del paralelogramo, es decir, desplazamos paralelamente uno de los vectores y lo colocamos a continuación del otro, de tal forma que

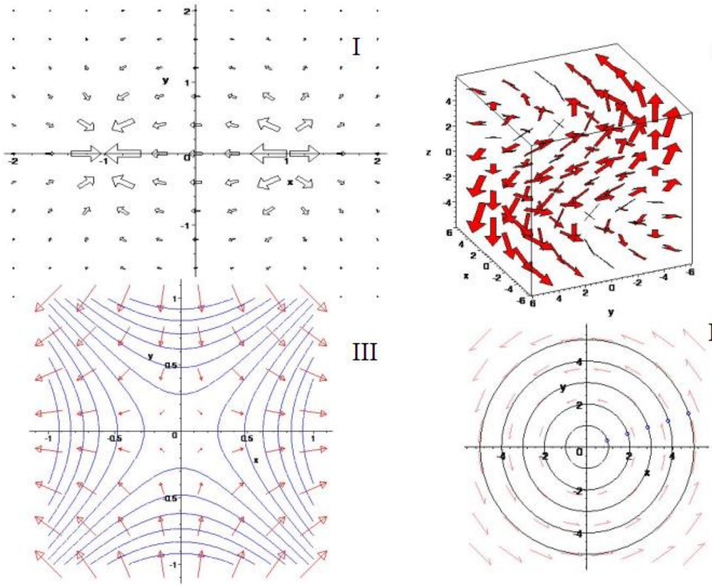

Figura 2: Ejemplos de *vectores atados*

la diagonal del paralelogramo, que tiene por lados los vectores sumandos, constituye el vector suma (ver cuadrantes IIa y IIb de la Figura 1). Este esquema se puede generalizar para varios vectores tal y como lo mostramos en el cuadrante IIa de la Figura 1. Allí construimos un polígono cuyos lados los constituyen los vectores sumandos $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ y $\vec{n}$ con $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

Nótese que aún el caso tridimensional, el vector suma siempre será coplanar (estará en el mismo plano) a los sumandos que lo generaron.

Igualmente, podemos definir la resta de vectores al sumar el inverso. Esto es

$$\vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \quad \Rightarrow 0 = \vec{a} - \vec{a} \equiv \vec{a} + (-\vec{a})$$

En términos gráficos la resta de dos vectores se representa colocando los vectores (minuendo y sutraendo) con el mismo origen y uniendo las cabezas de flecha. Dependiendo de cual vector es el minuendo y cual sustraendo el vector resta apuntará del sustraendo hacia el minuendo. Obsérvese el cuadrante IIa de la Figura 1 la resta $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Claramente, el módulo del vector resta representa la distancia entre los dos extremos de los vectores minuendo y el sustraendo

Un resumen de propiedades Podemos resumir las propiedades del álgebra de vectores como sigue

- La suma de vectores
  - tiene un único elemento neutro $0 + \vec{a} = \vec{a} + 0 = \vec{a}\ \forall \vec{a}$
  - existe un elemento simétrico $(-\vec{a})$ (uno para cada vector) tal que $0 = \vec{a} - \vec{a} \equiv \vec{a} + (-\vec{a})$
  - es conmutativa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

- es asociativa $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
- es distributiva $\mu\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\mu\vec{a}+\mu\vec{b}$ respecto a la multiplicación por escalares

- La multiplicación de escalares por vectores
  - es conmutativa $\vec{a}\mu=\mu\vec{a}$
  - es asociativa $\mu\left(\nu\vec{a}\right)=\left(\mu\nu\right)\vec{a}$
  - es distributiva $\left(\mu+\nu\right)\vec{a}=\mu\vec{a}+\nu\vec{a}$

3. Independencia lineal y las bases para vectores

Armados con el álgebra y explicitando sus propiedades podemos construir la primera aproximación a uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal. La noción de *independencia* o *dependencia lineal.*

Diremos que tres vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son *linealmente independientes* si se cumple que

$$\mu\vec{a}+\nu\vec{b}+\gamma\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \mu=\nu=\gamma=0$$

es decir que la única manera que al sumar cualquier múltiplo de $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ se anule esto obliga que los escalares son **necesariamente** nulos. Si no se cumple lo anterior entonces diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y que por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos

$$\mu\vec{a}+\nu\vec{b}+\gamma\vec{c}=0 \quad \text{alguno de} \left\{\begin{array}{c}\mu\neq 0\\ \nu\neq 0\\ \gamma\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \vec{c}=\bar{\mu}\;\vec{a}+\bar{\nu}\;\vec{b}$$

Los vectores linealmente independientes formarán base para el espacio donde ellos "viven" y el número máximo de vectores linealmente independientes será la dimensión de ese espacio de "residencia". Tratemos de concretar algunas de estas importantes afirmaciones.

Dos vectores linealmente dependientes son colineales. Es claro que

$$\mu\vec{a}+\nu\vec{b}=0 \quad \text{con alguno de} \left\{\begin{array}{c}\mu\neq 0\\ \nu\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{a}=-\dfrac{\nu}{\mu}\vec{b}\\ \\ \vec{b}=-\dfrac{\mu}{\nu}\vec{a}\end{array}\right.$$

el contrario también será cierto: *si dos vectores son colineales ellos serán linealmente dependientes.*

$$\vec{a}=\alpha\vec{b} \quad \Rightarrow \mu\vec{a}+\nu\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \mu\alpha\vec{b}+\nu\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \left(\mu\alpha+\nu\right)\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \alpha=-\frac{\nu}{\mu}$$

y con lo cual podremos afirma que *si dos vectores son linealmente independientes ellos* ***no*** *son colineales* y más aún *si dos vectores son linealmente independientes* ***no*** *son colineales.*

Tres vectores linealmente dependientes son complanares. Es claro que por ser los tres vectores *linealmente dependientes* al menos uno de los escalares tiene que ser distinto de cero. Esto es

$$\mu\vec{a}+\nu\vec{b}+\gamma\vec{c}=0 \Rightarrow \quad \vec{c}=-\frac{\mu}{\gamma}\vec{a}-\frac{\nu}{\gamma}\vec{b}=\bar{\mu}\;\vec{a}+\bar{\nu}\;\vec{b}$$

pero como $\bar{\mu}\;\vec{a}\propto\vec{a}$ y $\bar{\nu}\;\vec{b}\propto\vec{b}$ eso significa que ambos $\bar{\mu}\;\vec{a}$ y $\vec{a}$ y $\bar{\nu}\;\vec{b}$ y $\vec{b}$ son colineales respectivamente y su suma estará en el mismo plano.

Dos vectores linealmente independientes expanden todos los vectores coplanares. Esto es, dado dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ linealmente independientes, entonces cualquier vector $\vec{c}$,complanar con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, podrá expresarse como una combinación lineal de ellos y diremos que $\vec{c}$ se expresa en términos de $\vec{a}, \vec{b}$ como $\vec{c} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b}$ y esa expresión es única.

La primera de las afirmaciones es directa por cuanto hemos visto que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente y $\vec{c}$ es complanar con $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Entonces, necesariamente $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ son linealmente dependientes. Esto es

$$\mu\vec{a} + \nu\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \Rightarrow \quad \vec{c} = -\frac{\mu}{\gamma}\vec{a} - \frac{\nu}{\gamma}\vec{b} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b}$$

La demostración de que la expansión es única viene de suponer que existen dos maneras distintas de representar al vector $\vec{c}$

$$\left.\begin{array}{c} \vec{c} = \bar{\mu}\ \vec{a} + \bar{\nu}\ \vec{b} \\ \\ \vec{c} = \breve{\mu}\ \vec{a} + \breve{\nu}\ \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 = (\bar{\mu} - \breve{\mu})\ \vec{a} + (\bar{\nu} - \breve{\nu})\ \vec{b} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \bar{\mu} - \breve{\mu} = 0 & \Rightarrow \bar{\mu} = \breve{\mu} \\ \\ \bar{\nu} - \breve{\nu} = 0 & \Rightarrow \bar{\nu} = \breve{\nu} \end{array}\right.$$

debido a que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independiente. La demostración para el caso tridimensional es equivalente. Es decir tres vectores linealmente independientes $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ expanden, de manera unívoca, todos los vectores del espacio. Esta demostración queda para el lector.

Cuando un vector $\vec{c}$ se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes $\vec{a}, \vec{b}$ diremos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base para todos los vectores complanares a ellos. Equivalentemente para el caso tridimensional, tres vectores linealmente independientes $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ conformarán una base para los vectores del espacio. Los escalares μ, ν para el caso bidimensional se denominan las componentes de $\vec{c}$ a lo largo de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, .respectivamente. Equivalentemente μ, ν, γ serán las componentes de cualquier vector para el caso 3D a lo largo de $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$, respectivamente. Esta nomenclatura será más evidente luego de la próxima sección.

4. Productos de vectores

4.1. Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forma.

$$\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

El significado geométrico del producto escalar es evidente el cuadrante I de la Figura 3. El producto escalar representa la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y equivalentemente la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

De esta definición se derivan varias consecuencias las cuales por obvias no dejan de ser importantes.

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, siempre es positivo.* $\zeta_{\vec{a}} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ y sólo será nulo si $\vec{a}$ es el vector nulo. Esto es $\zeta_{\vec{a}} = 0 \quad \Rightarrow \vec{a} = 0$. Con esto podemos concluir que $|\vec{a}| == \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\zeta_{\vec{a}}}$
- *El producto escalar es conmutativo* $\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ya el ángulo entre los vectores es el mismo y la multiplicación entre escalares es conmutativa.
- *El producto escalar es distributivo* Esto es $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$. La demostración (gráfica) puede apreciarse en el cuadrante II de la Figura 3

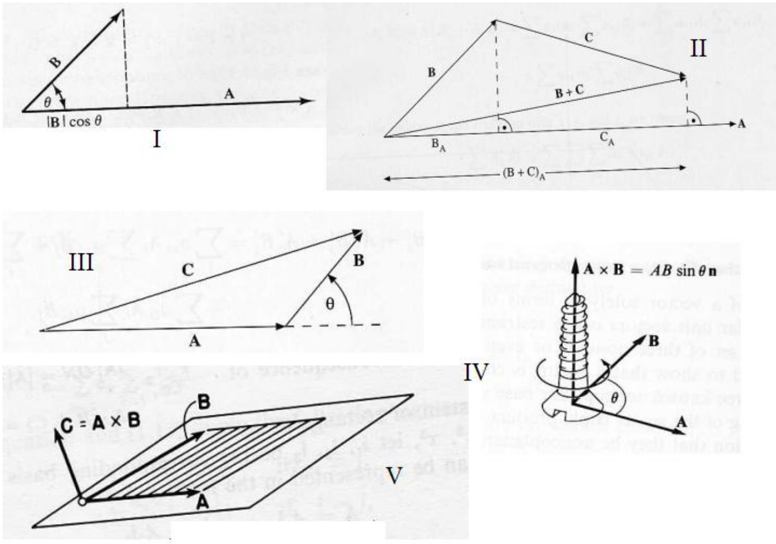

Figura 3: Productos de Vectores

- *La multiplicación por un escalar.* $\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha| \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\alpha\vec{b}\right) = |\alpha\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} = |\vec{a}| \left|\alpha\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$

- *Desigualdad de Cauchy Schwarz.* A partir de la definición de producto interno es inmediata la comprobación de la desigualdad de Cauchy Schwarz

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \left(|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}\right)^2 \quad \Rightarrow \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \leq |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \leq |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \quad \text{ya que } 0 \leq \cos^2\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} \leq 1$$

- *Del producto escalar surge el Teorema del Coseno.* Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, con lo cual

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\,|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$$

  que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la Figura 3.

- *Diremos que dos vectores, no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.* Esta afirmación es inmediata

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle} = 0$$

4.2. Producto vectorial

De siempre, también hemos aprendido que existe otro producto entre vectores. El producto vectorial. A diferencia del producto escalar que genera un escalar, el producto vectorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ tiene como resultado otro vector (realmente un pseudovector o vector axial en contraposición a los vectores polares pero eso lo veremos más adelante), $\vec{c}$, con las siguientes características:

- El módulo de $\vec{c}$, será $|\vec{c}| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \operatorname{sen}\theta_{\vec{a}\vec{b}}$. Es claro que el módulo de $\vec{c}$ representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (cuadrante V de la Figura 3)
- Tal y como muestran los cuadrantes IV y V de la Figura 3, tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$
- y como sentido regla del pulgar derecho, regla de la mano derecha, o más elegante será positivo cuando la multiplicación de $\vec{a} \times \vec{b}$ corresponda al sentido horario.

Otra vez, podemos deducir algunas consecuencias de esta definición.

- *El producto vectorial es anticonmutativo.* Esto es $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ y se sigue de la definición que expresa el cuadrante IV de la Figura 3
- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.* Vale decir $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. La demostración de esto lo dejaremos para más adelante. Valga ahora creerse la propiedad.
- *La multiplicación por un escalar.* Nos conduce rápidamente a
$$|\vec{c}| = |\alpha| \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a} \times \left(\alpha\vec{b}\right)\right| = |\alpha\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\theta_{\vec{a}\vec{b}} = |\vec{a}| \left|\alpha\vec{b}\right| \sin\theta_{\vec{a}\vec{b}}$$
- *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.* Al igual que el cuando se anula el producto escalar identificábamos a dos vectores ortogonales, cuando se anule el producto vectorial tendremos dos vectores paralelos. Obvio que esto se cumple de inmediato
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Rightarrow \theta_{\vec{a}\vec{b}} = 0 \quad \Rightarrow |\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\theta_{\vec{a}\vec{b}} = 0$$
y si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo. Ahora bien, también de aquí deducimos que
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = 0$$

4.3. Una división fallida

Uno esperaría que para cada una de las definiciones de productos vectoriales, existiera vector cociente. Es decir pudiéramos "despejar" uno de los multiplicados en términos del otro. La situación es que esta operación no está definida unívocamente y lo podemos intuir a partir de una de las definiciones de producto.

Supongamos que tenemos un producto escalar *o* $\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b}$ con lo cual, si pudiéramos "despejar", digamos $\vec{b} = \frac{\zeta}{\vec{a}}$ ¿ tendríamos entonces definido $\vec{b}$ de una manera unívoca ? La respuesta es NO. ya que $\zeta = \vec{a} \cdot \left(\frac{\zeta}{\vec{a}} + \vec{d}\right)$ donde $\vec{a} \perp \vec{d}$ por lo cual existen infinitos $\vec{b} = \frac{\zeta}{\vec{a}} + \vec{d}$ que cumplen $\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

4.4. Producto triple o mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = |\vec{c}| \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right| \cos\theta_{\langle \vec{c}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle}$$

representa del volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$. Este producto también cumple con algunas propiedades que enunciaremos ahora y demostraremos más tarde

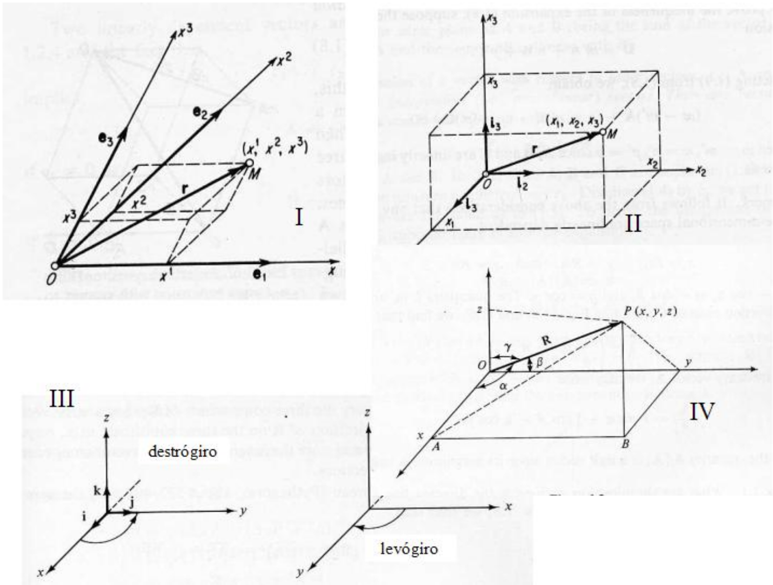

Figura 4: Vectores, bases y componentes

- *El producto mixto* $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$, *representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores* $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.Es claro y fue ilustrado que el módulo del producto vectorial $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|$ representa el área de la base y la altura está representada por la proyección del vector $\vec{c}$ sobre la perpendicular al plano de la base que es, precisamente, $|\vec{c}| \cos \theta_{\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle}$

- *El producto mixto es cíclico respecto a sus factores.* Esto es

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

  Esta afirmación se verá demostrada más adelante

- *el producto mixto se anula cuando se repite alguno de sus factores*

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$$

  Claramente, si $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \perp \quad \vec{a} \Rightarrow \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0$

- *Si los tres vectores* $\vec{a}, \vec{b}$ *y* $\vec{c}$ *son coplanares (linealmente dependientes) entonces* $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$ o, dicho de manera más elegante, útil e impactante: *tres vectores que cumplen* $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \neq 0$ forma base para el espacio tridimensional. Esa base se denominará levógira (contraria al giro de las manecillas del reloj) si $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} < 0$ y dextrógira (la convencional base de la mano derecha) si $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} > 0$.

5. Componentes, coordenadas y cosenos directores

5.1. Bases, componentes y coordenadas

La formulación de las leyes físicas debe hacerse en término de cantidades vectoriales (tensoriales). Esto independiza su formulación de un sistema particular de coordenadas, pero llegado el momento de calcular valores y utilizar estas leyes, es mucho más conveniente referirla a un sistema de coordenadas particularmente adaptado a la geometría del problema. En ese caso la ecuación vectorial se convertirá en tantas ecuaciones como componentes (referidas al sistema de coordenadas utilizado) tenga los vectores en ese sistema de coordenadas

Tal y como mencionamos arriba tres vectores **no coplanares** cualesquiera son linealmente independientes y constituyen una base para el espacio tridimensional. Denominaremos, de ahora en adelante estos vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ y por ser linealmente independientes podremos expresar cualquier vector $\vec{a}$ como una combinación lineal única. Tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la Figura 4 con los vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general) de coordenadas al colocarlos con un mismo origen. Esto es

$$\vec{a} = \tilde{a}^1\vec{w}_1 + \tilde{a}^2\vec{w}_2 + \tilde{a}^3\vec{w}_3$$

donde las cantidades $\left\{\tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \tilde{a}^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\vec{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Nótese que por costumbre (la cual será evidente más adelante) etiquetamos estos números con superíndices y la letra que identifica el vector.

Más aún, cada punto P del espacio viene definido por un radiovector $\overrightarrow{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P y se le asocian tres números $\left\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right\}$, los cuales son las proyecciones a lo largo de cada uno de los ejes coordenados $\left\{\overline{0\tilde{x}^1}, \overline{0\tilde{x}^2}, \overline{0\tilde{x}^3}\right\}$. Los números $\left\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right\}$ se denominarán componentes de $\overrightarrow{r}(P)$ en el sistema de referencia $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

Existe una familia de sistema de coordenadas en la cual sus vectores base son ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ son perpendiculares entre si. Tal y como mostraremos más adelante, siempre se puede construir un sistema ortogonal (ortonormal) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a partir de una base genérica de vectores linealmente independientes $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Cuando el sistema sea ortogonal sus componentes se denominarán rectangulares. Dependiendo del signo del triple producto mixto el sistema de coordenadas será dextrógiro ($(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 > 0$) o levógiro ($(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 < 0$) tal y como se muestra en el cuadrante III de la Figura 4

Es costumbre ancestral, por relaciones de dominación de los derechos sobre los izquierdos (en latín e italiano los zurdos son siniestros) utilizar la convención dextrógira ($(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 > 0$) y en ese caso utilizamos el bien conocido conjunto de vectores unitarios $\left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ con lo cual desde siempre tenemos que

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \vec{r}(P) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}$$

de ahora en adelante representaremos este sistema de coordenadas ortonormal como $\left\{\hat{\imath} \equiv \hat{\imath}_1, \hat{\jmath} \equiv \hat{\imath}_2, \hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\imath}_3\right\}$ para recordar que estamos en un sistema de coordenadas cartesianas.

Obviamente el módulo del vector se podrá expresar con la utilización del Teorema de Pitágoras

$$\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |\vec{a}| \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \left|\overrightarrow{r}(P)\right|$$

y la multiplicación por un escalar

$$\alpha\vec{a} = \alpha\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}}\right) = (\alpha a_x)\,\hat{\imath} + (\alpha a_y)\,\hat{\jmath} + (\alpha a_z)\,\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \alpha\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Igualmente un vector unitario

$$\hat{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \left(a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \hat{\imath} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \hat{\jmath} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \hat{\mathbf{k}}$$

con lo cual todo vector

$$\vec{a} = |\vec{a}| \, \hat{u}_{\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \hat{u}_{\vec{a}}$$

5.2. Cosenos directores

Como se puede apreciar en el cuadrante IV de la Figura 4 podemos construir tres triángulos rectángulos con el radiovector $\vec{R}(P)$ como hipotenusa de cada uno de ellos. Los ángulos que forma el radiovector $\vec{R}(P)$ con cada uno de los ejes coordenados $\{x, y, z\}$ son $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ respectivamente, con lo cual

$$R_x = \left|\vec{R}\right| \cos\alpha \quad R_y = \left|\vec{R}\right| \cos\beta \quad \text{y} \quad R_z = \left|\vec{R}\right| \cos\gamma \qquad \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

pero además

$$u_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \cos\alpha \; \hat{\imath} + \cos\beta \; \hat{\jmath} + \cos\gamma \; \hat{\mathbf{k}}$$

6. Algebra vectorial y coordenadas

Entonces podremos reescribir el álgebra vectorial como de forma algebraica, vale decir mediante operaciones referidas a las coordenadas. Así

6.1. Suma y resta de vectores

Será representada por

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}} \right) + \left(b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath} + b_z \hat{\mathbf{k}} \right) = (a_x + b_x)\,\hat{\imath} + (a_y + b_y)\,\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\,\hat{\mathbf{k}}$$

o equivalentemente

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a^1 \hat{\imath}_1 + a^2 \hat{\imath}_2 + a^3 \hat{\imath}_3\right) + \left(b^1 \hat{\imath}_1 + b^2 \hat{\imath}_2 + b^3 \hat{\imath}_3\right) = \left(a^1 + b^1\right) \hat{\imath}_1 + \left(a^2 + b^2\right) \hat{\imath}_2 + \left(a^3 + b^3\right) \hat{\imath}_3$$

y obviamente, la resta

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a^1 \hat{\imath}_1 + a^2 \hat{\imath}_2 + a^3 \hat{\imath}_3\right) - \left(b^1 \hat{\imath}_1 + b^2 \hat{\imath}_2 + b^3 \hat{\imath}_3\right) = \left(a^1 - b^1\right) \hat{\imath}_1 + \left(a^2 - b^2\right) \hat{\imath}_2 + \left(a^3 - b^3\right) \hat{\imath}_3$$

con lo cual la distancia entre dos puntos P y M será

$$d(P, M) = \left| \left(\overrightarrow{r}\,(P) = \vec{a} \right) - \left(\overrightarrow{r}\,(M) = \vec{b} \right) \right| = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2}$$

6.2. Dependencia e independencia lineal

Ahora es fácil estudiar la dependencia/independencia lineal en coordenadas. Otra vez, tres vectores $\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}}; \vec{b} = b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath} + b_z \hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{c} = c_x \hat{\imath} + c_y \hat{\jmath} + c_z \hat{\mathbf{k}}$ serán *linealmente independientes* si se cumple que

$$\mu\vec{a} + \nu\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \nu = \gamma = 0$$

Antes de proseguir en forma general, veamos algunos casos particulares

- La base canónica $\hat{\imath}_1 = \hat{\imath} \equiv (1,0,0)\,;\hat{\imath}_{\mathbf{2}} = \hat{\jmath} \equiv (0,1,0)\,;\hat{\imath}_{\mathbf{3}} = \hat{\mathbf{k}} \equiv (0,0,1)$. Estos vectores son claramente linealmente independientes y por lo tanto constituyen un base

$$\begin{array}{cccc} \mu & & & = & 0 \\ & \nu & & = & 0 \\ & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

- Los vectores $w_1 = \hat{\imath} \equiv (1,0,0)\,;w_2 = \hat{\imath}+\hat{\jmath} \equiv (1,1,0)\,;\hat{\imath}_3 = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k} \equiv (1,1,1)$. Estos vectores no son linealmente independientes de manera obvia. Veamos

$$\left.\begin{array}{cccc} \mu & & & = & 0 \\ \mu & +\nu & & = & 0 \\ \mu & +\nu & +\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu = 0 \\ \nu = 0 \\ \gamma = 0 \end{array}\right.$$

  con lo cual demostramos que son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base para los vectores tridimensionales.

En general tendremos que

$$0 = \mu\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \nu\left(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{\mathbf{k}}\right) + \gamma\left(c_x\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath} + c_z\hat{\mathbf{k}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$0 = (\mu a_x + \nu b_x + \gamma c_x)\,\hat{\imath} + (\mu a_y + \nu b_y + \gamma c_y)\,\hat{\jmath} + (\mu a_z + \nu b_z + \gamma c_z)\,\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu a_x + \nu b_x + \gamma c_x = 0 \\ \mu a_y + \nu b_y + \gamma c_y = 0 \\ \mu a_z + \nu b_z + \gamma c_z = 0 \end{array}\right.$$

Esto no es otra cosa que un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas $\{\mu,\nu,\gamma\}$ y la solución que estamos buscando $\mu = \nu = \gamma = 0$ se cumplirá si

$$\left|\begin{array}{ccc} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{array}\right| = a_z\left(b_y c_x - c_x b_y\right) - a_y\left(b_x c_z - c_z b_x\right) + a_x\left(b_y c_z - c_z b_y\right) \neq 0$$

6.3. Producto escalar

Del mismo modo representaremos el producto escalar de dos vectores en una base cartesiana como $\left\{\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{\mathbf{k}}\right\}$ es una base ortonormal entonces

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{\mathbf{k}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

ya que por ser ortogonales

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{1} \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} = 0 \\ \hat{\imath}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\imath} = 0 \\ \hat{\jmath}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\jmath} = 0 \end{array}\right.$$

Las propiedades del producto escalar en coordenadas comprueban fácilmente

- *El producto interno de un vector consigo mismo, siempre es positivo.*

$$\zeta_{\vec{a}} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 0 \quad \Rightarrow a_x = a_y = a_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0$$

  Adicionalmente $|\vec{a}| = \sqrt{\zeta_{\vec{a}}} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

- *El producto escalar es conmutativo*

$$\zeta = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z$$

- *El producto escalar es distributivo*:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left((b_x + c_x)\, \hat{\imath} + (b_y + c_y)\, \hat{\jmath} + (b_z + c_z)\, \hat{\mathbf{k}}\right) = a_x (b_x + c_x) + a_y (b_y + c_y) + a_z (b_z + c_z)$$

$$(a_x b_x + a_x c_x) + (a_y b_y + a_y c_y) + (a_z b_z + a_z c_z) = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) + (a_x c_x + a_y c_y a_z c_z)$$

- *La multiplicación por un escalar.*

$$\bar{\zeta} = \alpha\zeta = |\alpha| \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\alpha\vec{b}\right) = (\alpha a_x)\, b_x + (\alpha a_y)\, b_y + (\alpha a_z)\, b_z = a_x (\alpha b_x) + a_y (\alpha b_y) + a_z (\alpha b_z)$$

- *Desigualdad de Cauchy Schwarz.*

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \leq \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right|$$

- *Diremos que dos vectores, no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.* Esta afirmación es inmediata

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Rightarrow \theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle} = 0$$

Por lo cual

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\vec{a}\vec{b}} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta_{\widehat{\vec{a}\vec{b}}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)\left(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\right)}$$

de donde se deduce que dos vectores perpendiculares

$$\vec{a} \perp \vec{b} \qquad \Rightarrow \quad 0 = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Los vectores de la base canónica $\hat{\imath}_1 = \hat{\imath} \equiv (1, 0, 0)\,; \hat{\imath}_\mathbf{2} = \hat{\jmath} \equiv (0, 1, 0)\,; \hat{\imath}_\mathbf{3} = \hat{\mathbf{k}} \equiv (0, 0, 1)$ son claramente mutualmente ortonormales

$$\begin{array}{c} \cos\theta_{\hat{\imath}\hat{\jmath}} = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\imath} = 0 \\ \hat{\jmath} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\jmath} = 0 \end{array}$$

- *Del producto escalar surge el Teorema del Coseno.* Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, con lo cual

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \Rightarrow \vec{c} \cdot \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\, |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta_{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la Figura 3

6.4. Producto vectorial

De igual manera aprendimos

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

con lo cual lo podemos organizar como el determinante de la matriz

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

con lo cual

$$|\vec{c}| = \sqrt{(a_y b_z - a_z b_y)^2 + (a_z b_x - a_x b_z)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2} = \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)\left(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\right) \operatorname{sen}\theta_{\vec{a}\vec{b}}$$

6.5. Triple producto mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \|\vec{c}\| \left\|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right\| \cos\theta_{\langle \vec{c}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

representa del volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.

7. Algebra vectorial con índices

7.1. Convención de Einstein

Antes de comenzar con la presentación de este esquema de cálculo. cabe aclarar algunas costumbres y convenciones con la notación de índices

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo

$$\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}} = \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = a^1 \hat{\imath}_1 + a^2 \hat{\imath}_2 + a^3 \hat{\imath}_3 = \sum_{m=1}^{3} a^m \hat{\imath}_m \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = a^m \hat{\imath}_m$$

   hemos identificado $\hat{\imath}_1 = \hat{\imath}; \hat{\imath}_2 = \hat{\jmath}$ y $\hat{\imath}_3 = \hat{\mathbf{k}}$

2. Los índices repetidos son mudos (no importa la letra que lo etiquete) y representan suma. Así

$$\mathsf{K}^j \mathsf{A}_j = \mathsf{K}^m \mathsf{A}_m = \mathsf{K}^1 \mathsf{A}_1 + \mathsf{K}^2 \mathsf{A}_2 + \mathsf{K}^3 \mathsf{A}_3 = \mathsf{B}$$

3. Llamaremos contracción cuando sumamos respecto a un par de índices, vale decir

$$\sum_i \mathsf{A}_i^i = \mathsf{A}_1^1 + \mathsf{A}_2^2 + \mathsf{A}_3^3 \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{A}_i^i = \mathsf{A}_1^1 + \mathsf{A}_2^2 + \mathsf{A}_3^3$$

   Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \to 1$,a un solo número

4. Los índices libres (aquellos que no están sumados) indican el número de objetos disponibles y deben mantenerse. Así

$$\mathsf{K}_i^k \mathsf{A}_k = \mathsf{B}_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathsf{K}_1^1 \mathsf{A}_1 + \mathsf{K}_1^2 \mathsf{A}_2 + \mathsf{K}_1^3 \mathsf{A}_3 = \mathsf{B}_1 \\ \\ \mathsf{K}_2^1 \mathsf{A}_1 + \mathsf{K}_2^2 \mathsf{A}_2 + \mathsf{K}_2^3 \mathsf{A}_3 = \mathsf{B}_2 \\ \\ \mathsf{K}_1^1 \mathsf{A}_1 + \mathsf{K}_1^2 \mathsf{A}_2 + \mathsf{K}_1^3 \mathsf{A}_3 = \mathsf{B}_1 \end{cases}$$

con lo cual $\mathsf{K}_i^k \mathsf{A}_k = \mathsf{B}_i$ representan 3 ecuaciones y $\mathsf{K}_i^k \mathsf{A}_{kj} = \mathsf{B}_{ij}$ representará 9

5. La delta de Kronecker[1] δ_i^k lleva un índice arriba y uno abajo. Representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$ y es nula en los otros casos. Con esto

$$\mathsf{K}_{ij}^k \ \delta_k^i = \mathsf{K}_{1j}^1 \underbrace{\delta_1^1}_{=1} + \mathsf{K}_{2j}^1 \overbrace{\delta_1^2}^{=0} + \mathsf{K}_{3j}^1 \overbrace{\delta_1^3}^{=0} + \mathsf{K}_{1j}^2 \overbrace{\delta_2^1}^{=0} + \mathsf{K}_{2j}^2 \underbrace{\delta_2^2}_{=1} + \mathsf{K}_{3j}^2 \overbrace{\delta_2^3}^{=0} + \mathsf{K}_{1j}^3 \overbrace{\delta_3^1}^{=0} + \mathsf{K}_{2j}^3 \overbrace{\delta_3^2}^{=0} + \mathsf{K}_{3j}^3 \underbrace{\delta_3^3}_{=1}$$

es decir

$$\mathsf{K}_{ij}^k \ \delta_k^i = \mathsf{K}_{kj}^k = \mathsf{K}_{ij}^i = \mathsf{K}_{1j}^1 + \mathsf{K}_{2j}^2 + \mathsf{K}_{3j}^3$$

6. Además de la delta de Kronecker introduciremos el símbolo de permutación de Levi-Civita[2] ε^{ijk} para el caso de tres dimensiones, vale decir $i, j, k = 1, 2, 3$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{cuando} \quad \{(1,2,3)\,;(3,1,2)\,;(2,3,1)\} \text{ permutación cíclica} \\ -1 & \text{cuando} \quad \{(1,3,2)\,;(3,2,1)\,;(2,1,3)\} \text{ permutación impar o anticíclica} \\ 0 & \text{cuando} \quad i = j; \quad i = k \quad \wedge \quad j = k \end{cases}$$

y quiere decir que es distinto de cero cuando todos los índices son diferentes; 1 si la permutación de índices es cíclicas (o par) y -1 si la permutación es anticíclica (o impar). Con ello

$$\varepsilon^{ijk} a_j b_k = \begin{cases} \varepsilon^{111} a_1 b_1 + \varepsilon^{112} a_1 b_2 + \varepsilon^{113} a_1 b_3 + \varepsilon^{121} a_2 b_1 + \varepsilon^{122} a_2 b_2 + \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{131} a_3 b_1 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 + \varepsilon^{133} a_3 b_3 \\ \\ \varepsilon^{211} a_1 b_1 + \varepsilon^{212} a_1 b_2 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 + \varepsilon^{221} a_2 b_1 + \varepsilon^{222} a_2 b_2 + \varepsilon^{223} a_2 b_3 + \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{232} a_3 b_2 + \varepsilon^{233} a_3 b_3 \\ \\ \varepsilon^{311} a_1 b_1 + \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{313} a_1 b_3 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 + \varepsilon^{322} a_2 b_2 + \varepsilon^{323} a_2 b_3 + \varepsilon^{331} a_3 b_1 + \varepsilon^{332} a_3 b_2 + \varepsilon^{333} a_3 b_3 \end{cases}$$

con lo cual

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \Rightarrow \begin{cases} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

[1]Leopold Kronecker (7 diciembre 1823 Legnica, Polonia; 29 diciembre 1891, Berlin, Alemania) Matemático polaco con importantes contribuciones en teoría de número, funciones elípticas y algebra, así como la interrelación estre estas disciplinas Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Kronecker.html

[2]Tullio Levi-Civita (1873 Padova, Veneto, 1941 Roma, Italia) Geómetra italiano uno de los desarrolladores del Cálculo Tensorial que más tarde sería utilizado, por Einstein y Weyl como el lenguaje de la Relatividad General

7. A continuación enumeramos algunas propiedades de las deltas de Kronecker y de los símbolos de permutación de Levi-Civita las cuales le dejamos al lector su demostración. Ellas son

$$\begin{aligned} \delta_j^j &= 3 \\ \varepsilon_{jkm}\varepsilon^{ilm} &= \delta_j^i\delta_k^l - \delta_k^i\delta_j^l = \delta_j^i\delta_k^l - \delta_j^l\delta_k^i \\ \varepsilon_{jmn}\varepsilon^{imn} &= 2\delta_j^i, \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk} &= 6. \end{aligned}$$

7.2. Los vectores y los índices

7.2.1. Sumas de vectores

De ese modo la suma de vectores será expresada de la siguiente manera

$$\vec{a} + \vec{b} = a^i\hat{\imath}_i + b^i\hat{\imath}_i = \left(a^i + b^i\right)\hat{\imath}_i = c^i\hat{\imath}_i \quad \Rightarrow c^i = a^i + b^i \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3$$

7.2.2. Producto escalar

A partir da ahora y de forma equivalentemente, expresaremos el producto escalar en término de los índices. De forma y manera que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cos\theta_{\vec{a}\vec{b}} = a^i b_i = b^j a_j \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3$$

7.2.3. Producto vectorial

En términos de índices, el producto vectorial se puede expresar como

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3$$

todas las particularidades de producto vectorial ahora descansan en las propiedades del símbolo de Levy Civita.

7.2.4. Triple producto mixto

Analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación

$$V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \|\vec{c}\| \left\|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right\| \cos\theta_{\langle \vec{c}, \vec{a}\times\vec{b}\rangle} = c^i \ \varepsilon_{ijk} \ a^j b^k = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

7.3. Un par de cálculos ilustrativos

Mostremos tres casos de identidades vectoriales que pueden ser demostradas mediante la utilización de índices.

1. $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$
   El resultado será un vector, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right)^i &= \varepsilon^{ijk} a_j \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)_k \\
&= \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} a_j b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j b^m c^n \\
&= \left(\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n\right) a_j b^m c^n = \delta^i_m \delta^j_n a_j b^m c^n - \delta^j_m \delta^i_n a_j b^m c^n \\
&= \delta^i_m b^m \delta^j_n a_j c^n - \delta^i_n c^n \delta^j_m a_j b^m = b^i \underbrace{a_n c^n}_{(\vec{c}\cdot\vec{a})} - c^i \underbrace{a_j b^j}_{(\vec{a}\cdot\vec{b})}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right)^i = b^i \left(\vec{c} \cdot \vec{a}\right) - c^i \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)
$$

2. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$
   El lado derecho es un escalar, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) &= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^l \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)_l \\
&= \varepsilon^{ljk} a_j b_k \;\varepsilon_{lmn} c^m d^n = \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{lmn}\; a_j b_k c^m d^n \\
&= \varepsilon^{jkl} \varepsilon_{mnl}\; a_j b_k c^m d^n = \left(\delta^j_m \delta^k_n - \delta^k_m \delta^j_n\right) a_j b_k c^m d^n \\
&= \delta^j_m \delta^k_n a_j b_k c^m d^n - \delta^k_m \delta^j_n a_j b_k c^m d^n \\
&= \underbrace{\delta^j_m a_j c^m}_{(\vec{a}\cdot\vec{c})} \underbrace{\delta^k_n b_k d^n}_{(\vec{b}\cdot\vec{d})} - \underbrace{\delta^k_m b_k c^m}_{(\vec{b}\cdot\vec{c})} \underbrace{\delta^j_n a_j d^n}_{(\vec{a}\cdot\vec{d})} \\
&= (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)
\end{aligned}
$$

7.4. El escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores

La diferencia entre vectores polares y axiales proviene del siguiente comportamiento bajo transformaciones de coordenadas y base. Un vector polar (normal, común y corriente) queda invariante bajo la siguiente transformación

$$
\left.\begin{array}{ccc} \hat{\imath}_i & \to & -\hat{\imath}_i \\ a^i & \to & -a^i \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \vec{a} = a^i \hat{\imath}_i \to \left(-a^j\right)\left(-\hat{\imath}_j\right) = a^i \hat{\imath}_i = \vec{a}
$$

mientras que un pseudovector o vector axial cambia de signo cuando las componentes de los vectores que la generan y sus vectores base

$$
\left.\begin{array}{ccc} \hat{\imath}_i & \to & -\hat{\imath}_i \\ a^i & \to & -a^i \\ b^i & \to & -b^i \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \to \left(\varepsilon^{ijk}\;\left(-a_j\right)\left(-b_k\right)\right)\left(-\hat{\imath}_i\right) = -c^i \hat{\imath}_i = -\vec{c}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\imath} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{\mathbf{k}} \\
&\downarrow \\
&= \left(\left(-a_y\right)\left(-b_z\right) - \left(-a_z\right)\left(-b_y\right)\right)\left(-\hat{\imath}\right) + \left(\left(-a_z\right)\left(-b_x\right) - \left(-a_x\right)\left(-b_z\right)\right)\left(-\hat{\jmath}\right) + \left(\left(-a_x\right)\left(-b_y\right) - \left(-a_y\right)\left(-b_x\right)\right)\left(-\hat{\mathbf{k}}\right) \\
&\downarrow
\end{aligned}
$$

$$
-\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\left(\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\imath} - \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{\mathbf{k}}\right)
$$

Existen varias e importantes cantidades físicas que vienen representadas por pseudovectores, entre ellas mencionamos

Velocidad Angular	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Cantidad de Movimiento Angular	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Torque	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Campo de Inducción Magnética	$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$

Adicionalmente el volumen, $V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, como era de esperarse, no es invariante bajo cambio del espacio

$$\left.\begin{array}{ccc} c^i & \rightarrow & -c^i \\ a^i & \rightarrow & -a^i \\ b^i & \rightarrow & -b^i \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad V = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = c_i \varepsilon^{ijk}\ a_j b_k \rightarrow (-c_i)\left(\varepsilon^{ijk}\ \ (-a_j)(-b_k)\right) = -V$$

El volumen es un pseudoescalar mientras que los escalares son invariantes bajo esta transformación

$$\left.\begin{array}{ccc} a^i & \rightarrow & -a^i \\ b^i & \rightarrow & -b^i \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad w = \vec{a} \cdot \vec{b} = a^i b_i \rightarrow \left(-a^i\right)(-b_i) = w$$

en general también tendremos multiplicación entre algunos de estos objetos, con lo cual construiremos otros objetos. Dejamos al lector demostrar la siguiente tabla de relaciones

vector	$\cdot$	vector	$=$	escalar
vector	$\cdot$	pseudovector	$=$	pseudoescalar
pseudovector	$\cdot$	pseudovector	$=$	escalar
vector	$\times$	vector	$=$	pseudovector
vector	$\times$	pseudovector	$=$	vector
pseudovector	$\times$	pseudovector	$=$	pseudovector

8. Aplicaciones del álgebra vectorial

Uno de los terrenos más exitosos de las aplicaciones del álgebra vectorial es la geometría analítica en el plano. Esto se realiza en base a la definición que hiciéramos de radio vector, en la cual a cada punto, P, del espacio le asociábamos un radiovector posición tal y como lo mostramos en el cuadrante IV de la Figura 4 .

$$P \longleftrightarrow (x, y, z) \equiv \left(x^1, x^2, x^3\right) \qquad \Rightarrow \vec{r}\,(P) = x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}} = x^1 \hat{\imath}_1 + x^2 \hat{\imath}_2 + x^3 \hat{\imath}_3 = x^m \hat{\imath}_m$$

A partir de esta definición todas las propiedades geométricas del espacio las podemos construir con vectores.

8.1. Rectas y vectores

La ecuación de la recta en término de vectores la definiremos fijando uno de sus puntos, digamos

$$\vec{r}\,(P_1) \equiv \vec{X}\,(P_1) = \vec{X}_1 = x_1\ \hat{\imath} + y_1\ \hat{\jmath} + z_1\ \hat{\mathbf{k}} = x_1^1 \hat{\imath}_1 + x_1^2 \hat{\imath}_2 + x_1^3 \hat{\imath}_3 \longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$$

sus puntos y un vector que indique su dirección, digamos $\vec{A} = A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}$ (ver cuadrante IV de la Figura 5) con lo cual la ecuación de una recta en lenguaje vectorial será

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \lambda \vec{A} \quad \Rightarrow x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}} = x_1\ \hat{\imath} + y_1\ \hat{\jmath} + z_1\ \hat{\mathbf{k}} + \lambda\left(A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}\right) \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x_1 + \lambda A_x \\ \\ y = y_1 + \lambda A_y \\ \\ z = z_1 + \lambda A_z \end{array}\right.$$

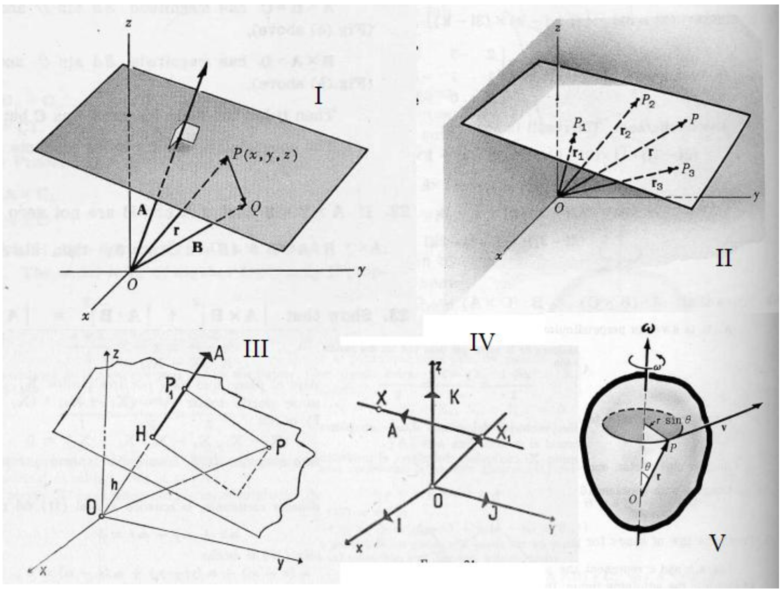

Figura 5: Gemetría analítica y vectores cartesianos

donde $\vec{X} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ el conjunto de puntos genéricos que cumple con la ecuación de la recta en 3D. Si lo colocamos en función de la notación de índices, las ecuaciones anteriores son más evidentes

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \lambda\vec{A} \quad \Rightarrow x^m\hat{\imath}_m = x_1^m\hat{\imath}_m + \lambda A^m\hat{\imath}_m \quad \Rightarrow x^m = x_1^m + \lambda A^m \qquad \text{para } m = 1, 2, 3$$

Nótese que efectivamente se cumplen tres ecuaciones escalares y cada una de ellas tiene la forma de una recta. Además, tal y como muestra la Figura 5 el punto genérico (x, y, z) lo describe (sobre la recta) la variación del módulo de $\left|\vec{A}\right|$ mediante la constante de proporcionalidad λ. Si se requiere describir una recta que pase por dos puntos, digamos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) entonces una vez seleccionado uno de los puntos (digamos (x_1, y_1, z_1)) seleccionamos el vector $\vec{A} = \vec{r}\,(P_2) - \vec{r}\,(P_1)$ como la resta de los dos radiovectores a los puntos P_2 y P_1 . Esto es

$$\vec{X} = \vec{X}_1 + \lambda\left(\vec{X}_2 - \vec{X}_1\right) \quad \Rightarrow \vec{X} = \frac{\vec{X}_1 + \delta\vec{X}_2}{1 - \delta} \quad \text{con } \delta = \frac{\vec{X}_1 - \vec{X}}{\vec{X}_2 - \vec{X}}.$$

La división entre vectores δ tiene sentido porque no es una división entre vectores genéricos es una división entre vectores que tienen la misma dirección Nótese además que, lo mismo ocurre cuando “despejamos” λ de la ecuación de la recta

$$\lambda = \frac{\vec{X} - \vec{X}_1}{\vec{A}} \quad \Rightarrow x^m = x_1^m + \lambda A^m \quad \Rightarrow \lambda = \frac{x^m - x_1^m}{A^m} = \frac{x - x_1}{A_x} = \frac{y - y_1}{A_y} = \frac{z - z_1}{A_z}$$

y equivalentemente ocurre cuando “despejamos” λde la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$\lambda = \frac{\vec{X} - \vec{X}_1}{\vec{X}_2 - \vec{X}_1} \quad \Rightarrow x^m = x_1^m + \lambda\left(x_2^m - x_1^m\right) \quad \Rightarrow \lambda = \frac{x^m - x_1^m}{x_2^m - x_1^m} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

8.2. Planos y vectores

Ocurre exactamente lo mismo cuando construimos la ecuación vectorial para un plano. En general una superficie la define su vector normal (perpendicular). En el caso de una superficie plana (un plano) tendrá una única normal que lo define. Por lo tanto, un plano vendrá definido su vector perpendicular un punto, digamos $P_1 \longleftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$. La ecuación vectorial del plano vendrá definida por todos los vectores $\overrightarrow{PQ}$ tales que sean perpendiculares a un determinado vector $\vec{A}$ (ver cuadrante IV de la Figura 5). Donde el punto P es un punto genérico (x, y, z) que define un radiovector. La ecuación vectorial del plano será simplemente

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{r}\,(P) - \underbrace{\vec{r}\,(P_1)}_{\vec{B}} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{r} = \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{r}_1}_{b}$$

Esto es se tiene que cumplir la condición

$$\left(A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left(x\ \hat{\imath} + y\ \hat{\jmath} + z\ \hat{\mathbf{k}}\right) - \left(x_1\ \hat{\imath} + y_1\ \hat{\jmath} + z_1\ \hat{\mathbf{k}}\right)\right) = 0$$

$$\left(A_x\ \hat{\imath} + A_y\ \hat{\jmath} + A_z\ \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left((x - x_1)\ \hat{\imath} + (y - y_1)\,\hat{\jmath} + (z - z_1)\,\hat{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$A_x\,(x - x_1) + A_y\,(y - y_1) + A_z\,(z - z_1) = 0$$

con lo cual la ecuación del plano queda como siempre ha sido

$$A_x x + A_y y + A_z z - A_x x_1 - A_y y_1 - A_z z_1 = 0 \quad \Rightarrow A_x x + A_y y + A_z z = b = A_x x_1 + A_y y_1 + A_z z_1$$

es decir, de manera más compacta

$$A^m x_m - A_j x_1^j = 0 \quad \Rightarrow A_k x^k = b = A_l x_1^l$$

Es claro que $\vec{A} \cdot \vec{r}_1 = b$ es la proyección del radiovector $\vec{r}\,(P_1)$ sobre la perpendicular que define al plano. Por lo tanto será la distancia entre el plano y el origen de coordenadas. Si $b = 0$ el plano pasa por el origen de coordenadas.

Consideremos ahora el cuadrante IV de la Figura 5. Allí están especificados tres puntos en el espacio caracterizados por sus correspondientes radiovectores posición, $\vec{r}\,(P_1) = \vec{r}_1, \vec{r}\,(P_2) = \vec{r}_2$ y $\vec{r}\,(P_3) = \vec{r}_3$. Estos tres puntos serán coplanares si

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{mnl}\,(x_1^m - x_2^m)\,(x_2^n - x_3^n)\,\left(x_3^l - x_1^l\right) = 0$$

y la ecuación del plano vendrá dada por

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot ((\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad = 0$$

9. Un comienzo a la derivación e integración de vectores

9.1. Vectores variables,

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bien esa característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su

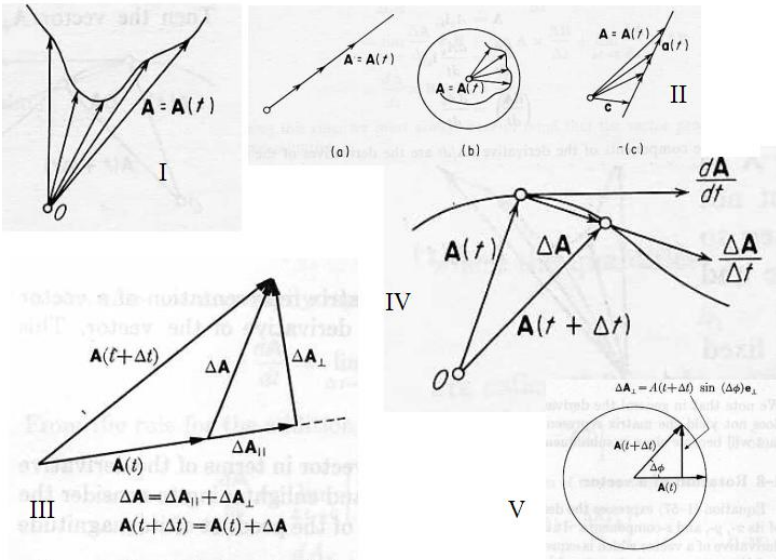

Figura 6: Vectores variables

dirección, su sentido o todo junto o separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y constante en otra.

$$\vec{a}\,(t) = a^k\,(t)\,\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t) = \tilde{a}^k\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t) = \hat{a}^k\,(t)\,\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t)$$

Nótese que hemos utilizado una base $\{\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t)\}$ de vectores variables a diferencia de la tradicional base de vectores cartesianos, los cuales **son constantes** en módulo dirección y sentido (ver los cuadrantes I y II de la Figura 6). Más aún, tal y como se muestra en cuadrante IIc de la Figura 6 todo vector variable podrá ser expresado como la suma de uno variable, $\vec{a}\,(t)$, mas otro constante $\vec{c}$

$$\vec{A}\,(t) = \vec{a}\,(t) + \vec{c}$$

9.2. Derivación

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable $\vec{a}\,(t) \Longleftrightarrow \vec{a}\,(t)$ uno rápidamente piensa en establecer un cociente incremental tal y como se muestra en

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}\,(t+\Delta t) - \vec{a}\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{a}\,(t)}{\mathrm{d}t}$$

el cuadrante IV de la Figura 6 ilustra gráficamente este cociente incremental. Como siempre, las propiedades de esta operación derivación serán

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{a}\,(t)+\vec{b}\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\left(\vec{b}\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,(\alpha\,(t)\,\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,(\alpha\,(t))}{\mathrm{d}t}\vec{a}\,(t)+\alpha\,(t)\,\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{a}\,(t)\cdot\vec{b}\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\vec{b}\,(t)+\vec{a}\,(t)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\left(\vec{b}\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{a}\,(t)\times\vec{b}\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}\times\vec{b}\,(t)+\vec{a}\,(t)\times\frac{\mathrm{d}\left(\vec{b}\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$

Ahora bien, esto implica que

$$\vec{a}\,(t)=a^k\,(t)\,\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t)\qquad\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(a^k\,(t)\,\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\;a^k\,(t)}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t)+a^k\,(t)\,\frac{\mathrm{d}\,(\tilde{\mathbf{e}}_k\,(t))}{\mathrm{d}t}$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que serán constantes y otros en los cuales sus vectores bases cambiarán en su dirección. El primer término representa la variación del módulo y el segundo muestra la contribución de los cambios en dirección del vector. Más aún, mostraremos apoyándonos en la ilustración del cuadrante el cuadrante III de la Figura 6 que, independientemente del sistema de coordenada el cambio en el módulo apunta en la dirección del vector, mientras que las contribuciones en dirección apuntan en la dirección perpendicular al vector. Esto es

$$\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,(|\vec{a}\,(t)|)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_{a\parallel}+|\vec{a}\,(t)|\,\hat{u}_{a\perp}\quad\text{con }\hat{u}_{a\parallel}\cdot\hat{u}_{a\perp}=0$$

Es fácil convencernos de la forma del primer término. Siempre podemos representar un vector como su módulo y un vector unitario en la dirección apropiada. Esto es

$$\vec{a}\,(t)=|\vec{a}\,(t)|\,\hat{u}_a\qquad\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,(|\vec{a}\,(t)|\,\hat{u}_a\,(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\;|\vec{a}\,(t)|}{\mathrm{d}t}\hat{u}_a\,(t)+|\vec{a}\,(t)|\,\frac{\mathrm{d}\,(\hat{u}_a\,(t))}{\mathrm{d}t}$$

adicionalmente

$$|\vec{a}\,(t)|^2=\vec{a}\,(t)\cdot\vec{a}\,(t)\qquad\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}\left(|\vec{a}\,(t)|^2\right)}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t)\cdot\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}=2\,|\vec{a}\,(t)|\,\frac{\mathrm{d}\,(|\vec{a}\,(t)|)}{\mathrm{d}t}\equiv 2\vec{a}\,(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}\,(|\vec{a}\,(t)|)}{\mathrm{d}t}\equiv 2\underbrace{\frac{\vec{a}\,(t)}{2\,|\vec{a}\,(t)|}}_{\hat{u}_a(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}\qquad\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}\,(|\vec{a}\,(t)|)}{\mathrm{d}t}=\hat{u}_a\,(t)\cdot\frac{\mathrm{d}\,(\vec{a}\,(t))}{\mathrm{d}t}$$

para que finalmente

$$\hat{u}_a(t) \cdot \frac{\mathrm{d}(\vec{a}(t))}{\mathrm{d}t} = \hat{u}_a(t) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\ |\vec{a}(t)|}{\mathrm{d}t} \hat{u}_a(t) + |\vec{a}(t)| \frac{\mathrm{d}(\hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t} \right) \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_a(t) \cdot \dfrac{\mathrm{d}(\vec{a}(t))}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\ |\vec{a}(t)|}{\mathrm{d}t} \\ \\ \hat{u}_a(t) \cdot \dfrac{\mathrm{d}(\hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t} = 0 \end{array} \right.$$

Es decir que el cambio en el módulo de un vector se manifiesta en la dirección del mismo vector, tal y como era intuitivo suponer. Adicionalmente vemos que el vector siempre será perpendicular a su derivada. Gráficamente podemos apreciarlo en el cuadrante IV de la Figura 6 , pero también surge analíticamente de si derivamos el vector unitario en la dirección de $\vec{a}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_a(t) \cdot \hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\left(|\hat{u}_a(t)|^2\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t} \equiv 0 = \hat{u}_a(t) \cdot \frac{\mathrm{d}(\hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \hat{u}_a(t) \perp \frac{\mathrm{d}(\hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t}$$

es decir

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{a}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(|\vec{a}(t)|\, \hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ |\vec{a}(t)|}{\mathrm{d}t} \hat{u}_a(t) + |\vec{a}(t)| \frac{\mathrm{d}(\hat{u}_a(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(|\vec{a}(t)|)}{\mathrm{d}t} \hat{u}_{a\parallel} + |\vec{a}(t)|\, \hat{u}_{a\perp}$$

Supongamos que definimos un vector

$$\Delta\ \vec{\theta} = \Delta\theta\ \hat{u}_n \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_n \perp \hat{u}_{a\parallel} \\ \\ \hat{u}_n \perp \hat{u}_{a\perp} \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_n \times \hat{u}_{a\parallel} = \hat{u}_{a\perp} \\ \\ \hat{u}_{a\perp} \times \hat{u}_n = \hat{u}_{a\parallel} \\ \\ \hat{u}_{a\parallel} \times \hat{u}_{a\perp} = \hat{u}_n \end{array} \right\}$$

donde es el ángulo de rotación del vector $\vec{a}(t)$ (ver cuadrante V de la Figura 6) Claramente

$$\Delta\vec{a}_\perp = a(t+\Delta t)\sin(\Delta\theta)\ \hat{u}_{a\perp} \approx a(t+\Delta t)\,\Delta\theta\ \hat{u}_{a\perp} \quad \Longrightarrow \Delta\vec{a}_\perp = \Delta\ \vec{\theta} \times \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\Delta\vec{a}_\perp}{\Delta t} \equiv \left(\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} \cdot \vec{a}_\perp \right) \vec{a}_\perp = \frac{\Delta\ \vec{\theta}}{\Delta t} \times \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}(\vec{a}(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{u}_{a\perp} \right) \hat{u}_{a\perp} = \frac{\mathrm{d}(\theta(t))}{\mathrm{d}t} \hat{u}_n \times \vec{a}(t) = \vec{\omega} \times \vec{a}(t)$$

donde hemos identificado $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}(\theta(t))}{\mathrm{d}t} \hat{u}_n$ Entonces podemos ir más allá. Observando el cuadrante V de la Figura 6 vemos que si suponemos que el módulo del vector es constante, entonces

$$\frac{\mathrm{d}\ |\vec{a}(t)|}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}(\vec{a}(t))}{\mathrm{d}t} = |\vec{a}(t)|\, \hat{u}_{a\perp} \quad \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}(\vec{a}(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{u}_{a\perp} \right) \hat{u}_{a\perp} = \vec{\omega} \times \vec{a}(t)$$

9.3. Velocidades y aceleraciones

Así, el radio vector posición de una partícula genera los vectores velocidad y aceleración.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}(\vec{v}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t^2}$$

ahora bien

$$\vec{r} = r(t)_P\, \hat{u}_r = x_P \hat{\imath} + y_P \hat{\jmath} + z_P \hat{\mathbf{k}} \qquad \text{con } \hat{u}_r = \cos\theta\ \hat{\imath} + \sin\theta\ \hat{\jmath}$$

si suponemos que la partícula describe un movimiento entonces

$$\left.\begin{array}{c} r_P = r_P(t) \\ \\ \theta = \theta(t) \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right. \quad ; \quad \hat{u}_r = \hat{u}_r(t)\,; \quad \begin{array}{c} \hat{\imath} = \text{const} \\ \hat{\jmath} = \text{const} \\ \hat{\mathbf{k}} = \text{const} \end{array}$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\cos\theta(t)\ \hat{\imath} + \sin\theta(t)\ \hat{\jmath})}{\mathrm{d}t} = -(\sin\theta(t))\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \cos\theta(t)\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_r)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\underbrace{[-(\sin\theta(t))\,\hat{\imath} + \cos\theta(t)\,\hat{\jmath}]}_{\hat{u}_\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta$$

ya que

$$\|\hat{u}_r\| = \sqrt{\hat{u}_r\cdot\hat{u}_r} = \sqrt{[\cos\theta(t)\ \hat{\imath} + \sin\theta(t)\ \hat{\jmath}]\,[\cos\theta(t)\ \hat{\imath} + \sin\theta(t)\ \hat{\jmath}]} = 1$$

$$\|\hat{u}_\theta\| = \sqrt{\hat{u}_\theta\cdot\hat{u}_\theta} = \sqrt{[-(\sin\theta(t))\ \hat{\imath} + \cos\theta(t)\ \hat{\jmath}]\,[-(\sin\theta(t))\,\hat{\imath} + \cos\theta(t)\,\hat{\jmath}]} = 1$$

y

$$\hat{u}_\theta\cdot\hat{u}_r = \hat{u}_r\cdot\hat{u}_\theta = [-(\sin\theta(t))\ \hat{\imath} + \cos\theta(t)\ \hat{\jmath}]\,[\cos\theta(t)\quad \hat{\imath} + \sin\theta(t)\ \hat{\jmath}] = 0$$

Más aún

$$\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_\theta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-(\sin\theta(t))\ \hat{\imath} + \cos\theta(t)\ \hat{\jmath})}{\mathrm{d}t} = -(\cos\theta(t)\ \hat{\imath} + \sin\theta(t)\ \hat{\jmath}) = -\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_r$$

Con lo cual, una partícula que describe un movimiento genérico vendrá descrita en coordenadas cartesianas por

$$\vec{r} = x_P(t)\ \hat{\imath} + y_P(t)\ \hat{\jmath} + z_P(t)\ \hat{\mathbf{k}}$$

y su velocidad será

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\left(x_P(t)\,\hat{\imath} + y_P(t)\,\hat{\jmath} + z_P(t)\,\hat{\mathbf{k}}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x_P(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}(y_P(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}(z_P(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}} \\ &= v_{xP}(t)\,\hat{\imath} + v_{yP}(t)\,\hat{\jmath} + v_{zP}(t)\,\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}(v_{xP}(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}(v_{yP}(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}(v_{zP}(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}} = a_{xP}(t)\,\hat{\imath} + a_{yP}(t)\,\hat{\jmath} + a_{zP}(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Mientras que en coordenadas polares será

$$\vec{r}(t) = r_P(t)\,\hat{u}_r(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}(r(t)_P\,\hat{u}_r(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r(t)_P)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_r(t) + r(t)_P\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_r(t))}{\mathrm{d}t}$$

con lo cual la velocidad

$$\vec{v}(t) = v_r(t)_P\,\hat{u}_r(t) + r(t)_P\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta(t)$$

y la aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}(\vec{v}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\hat{u}_r(t) + r(t)_P \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v_r(t)_P\,\hat{u}_r(t))}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(r(t)_P \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = &\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_r(t) + \frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_r(t))}{\mathrm{d}t} \\ &+ \frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta(t) + r(t)_P\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{u}_\theta(t) + r(t)_P\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}(\hat{u}_\theta(t))}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = \left\{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t} - r(t)_P\left(\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\hat{u}_r(t) + \left\{2\frac{\mathrm{d}r(t)_P}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} + r(t)_P\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\}\hat{u}_\theta(t)$$

Claramente para el caso de un movimiento circular

$$r = R = \text{const} \quad \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{r}(t) = R\hat{u}_{r(t)} \\ \\ \vec{v}(t) = R\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta \\ \\ \vec{a}(t) = -R\left(\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\hat{u}_r(t) + R\frac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\hat{u}_\theta(t)\end{array}\right.$$

De aquí podemos ver claramente que velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ son ortogonales. La velocidad, $\vec{v}(t)$, siempre es tangente a la trayectoria $\vec{r}(t)$ y en este caso la trayectoria es una circunferencia. En general el vector

$$\vec{r}_{med} = \sum_i \Delta\,\vec{r}(t_i) = \sum_i (\vec{r}(t_i + \Delta t_i) - \vec{r}(t_i)) \quad \Longrightarrow \lim_{\Delta t \to 0}\sum_i \Delta\,\vec{r}(t_i) = \int \mathrm{d}\vec{r}(t) = \vec{r}(t)$$

es decir $\mathrm{d}\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\sum_i \Delta\,\vec{r}(t_i)$ es tangente a la trayectoria. Es claro que

$$\mathrm{d}\vec{r}(t) = \mathrm{d}\left[x_P(t)\,\hat{\imath} + y_P(t)\,\hat{\jmath} + z_P(t)\,\hat{\mathbf{k}}\right] \equiv \frac{\partial x_P(t)}{\partial t}\hat{\imath} + \frac{\partial y_P(t)}{\partial t}\hat{\jmath} + \frac{\partial z_P(t)}{\partial t}\hat{\mathbf{k}}$$

Tal y como mencionamos arriba, para el sistema de coordenadas cartesiano podemos definir un vector (en este caso) velocidad angular

$$\vec{\omega} \quad \ni \quad \left\{\begin{array}{c} \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \times \hat{u}_{\vec{r}} = \hat{u}_{\vec{v}} \\ \\ \hat{u}_{\vec{v}} \times \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \hat{u}_{\vec{r}} \\ \\ \hat{u}_{\vec{r}} \times \hat{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t)$$

Supongamos por que, simplicidad, elegimos el sistema de coordenadas cartesiano tal que $\vec{r}$ esté el plano x, y. En este caso es inmediato comprobar que $v^i = \varepsilon^{ijk}\omega_j x_k$ y dado que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ tienen 'únicamente componentes $1, 2$ entonces, necesariamente $\vec{\omega}$ tiene componente 3. Es decir

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = r^i \hat{\imath}_i \\ \\ \vec{v} = v^i \hat{\imath}_i \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} v^1 = \varepsilon^{1j2}\omega_j x_2 \\ \\ v^2 = \varepsilon^{2j1}\omega_j x_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{\omega} = \omega^3 \hat{\imath}_3 \equiv |\vec{\omega}|\, \hat{\imath}_3 \equiv |\vec{\omega}|\, \hat{\mathbf{k}}$$

como

$$\vec{r} = x_P(t)\ \hat{\imath} + y_P(t)\ \hat{\jmath}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} = v_{xP}(t)\ \hat{\imath} + v_{yP}(t)\ \hat{\jmath} = \vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \frac{\mathrm{d}(\theta(t))}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}} \times (x_P(t)\ \hat{\imath} + y_P(t)\ \hat{\jmath})$$

como se ve más claro es en coordenadas polares, esto es

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} = r(t)_P \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\hat{u}_\theta(t) = (|\vec{\omega}|\, \hat{u}_n(t)) \times (r(t)_P\, \hat{u}_r(t))$$
$$\Downarrow |\vec{r}(t)| = const$$
$$\underbrace{r(t)_P \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}}_{\vec{v}_\perp(t)}\hat{u}_\theta(t) = |\vec{\omega}|\, r(t)\, \hat{u}_\theta(t) \quad \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \equiv |\vec{\omega}|$$

9.4. Vectores y funciones

Antes de continuar con la integración repensemos algunas funciones de tipo $\phi(x, y, z)$ y $\vec{V}(x, y, z)$. Son, sin duda funciones de varias variables

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z) = \hat{\imath}V_x(x, y, z) + \hat{\jmath}V_y(x, y, z) + \hat{\mathbf{k}}V_z(x, y, z)$$

un par de reflexiones se pueden hacer en este punto. Primeramente, dado que hemos relacionado un punto del espacio con un radio vector posición, entonces

$$P_{(x,y,z)} \leftrightarrow (x, y, z) \leftrightarrow \vec{r} = x_P\ \hat{\imath} + y_P\ \hat{\jmath} + z_P\ \hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \phi = \phi(x, y, z) \equiv \phi(\vec{r}) \\ \\ \vec{V} = \vec{V}(x, y, z) \equiv \vec{V}(\vec{r}) \end{array}\right.$$

La primera función, $\phi(\vec{r})$ será una función escalar de argumento vectorial o, simplemente un campo escalar y la segunda se conoce como una función vectorial de argumento vectorial o campo vectorial. Como hemos dicho este tipo de funciones y las operaciones que pueden ser realizadas con ellas, así como también su significado, será analizada en detalle más adelante en este mismo curso.

En segundo lugar, siempre podremos parametrizar las coordenadas y tendremos

$$\phi = \phi(t) = \phi(x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{V} = \vec{V}(t) = \vec{V}(x(t), (t)y, z(t)) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{V} = \hat{\imath}V_x(x(t), y(t), z(t)) + \hat{\jmath}V_y(x(t), y(t), z(t)) + \hat{\mathbf{k}}V_z(x(t), y(t), z(t))$$

Este caso lo hemos encontrado en montones de situaciones. El movimiento parabólico viene descrito por un vectores velocidad y posición

$$\vec{v} = -\hat{\mathbf{k}}gt \ + \vec{v}_0 = -\hat{\mathbf{k}}gt \ + \left(\hat{\imath}v_{0x} + \hat{\jmath}v_{0y} + \hat{\mathbf{k}}v_{0z}\right) \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0x} \\ v_z = v_{0z} - gt \end{array} \right.$$

$$\vec{r} = -\hat{\mathbf{k}}\frac{g}{2}t^2 \ + \vec{v}_0 t = -\hat{\mathbf{k}}g\frac{t^2}{2}t + \left(\hat{\imath}v_{0x} + \hat{\jmath}v_{0y} + \hat{\mathbf{k}}v_{0z}\right)t \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = v_{0x}t \\ y = v_{0x}t \\ z = v_{0z}t - g\dfrac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

9.4.1. Derivada de funciones $\phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right)$

Al derivar una función de argumento vectorial también aplica la “regla de la cadena”. Esto es

$$z = \phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right) = g\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\ \phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}\ t} = \frac{\partial\ \phi\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\ x\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t} + \frac{\partial\ \phi\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\ y\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t} + \frac{\partial\ \phi\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\ z\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\ \phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}\ t} = \left(\frac{\partial\ \phi\left(x,y,z\right)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\ \phi\left(x,y,z\right)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\ \phi\left(x,y,z\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\ x\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}\ y\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}\ \mathbf{z}\left(\mathbf{t}\right)}{\mathrm{d}\ \mathbf{t}}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ \phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}\ t} = \vec{\nabla}\phi\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\ \vec{r}\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t}$$

donde hemos representado

$$\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right) = \frac{\partial\ \phi\left(x,y,z\right)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\ \phi\left(x,y,z\right)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\ \phi\left(x,y,z\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} = \partial^m \phi\left(x,y,z\right)\hat{\imath}_m = \phi^{,m}\left(x,y,z\right)\hat{\imath}_m$$

y lo llamaremos el gradiente de la función. El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles, el cual lo utilizaremos, por ahora de manera operacional y recordaremos que emerge como consecuencia de una derivación contra un parámetro. El gradiente mide el cambio del la función $\phi\left(x,y,z\right)$.

La idea de gradiente nos lleva a considerar al $\vec{\nabla}$ como un operador vectorial que actúa sobre la función escalar de variable vectorial $\phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right)$. Es decir con un poquito de imaginación

$$\vec{\nabla}\phi\left(\vec{r}\left(t\right)\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right)\phi\left(x,y,z\right) = \left(\hat{\imath}_m \partial^m\right)\phi\left(x,y,z\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\nabla}\left(\circ\right) = \left(\frac{\partial\left(\circ\right)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\left(\circ\right)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\left(\circ\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) = \hat{\imath}_m \partial^m\left(\circ\right)$$

9.4.2. Derivada de funciones $\vec{c}\left(\vec{r}\left(t\right)\right)$

De modo que inspirados en la regla de la cadena de una función escalar de variable vectorial comprobamos que

$$\frac{\mathrm{d}\ \vec{c}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ c_x\left(x,y,z\right)}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}\ c_y\left(x,y,z\right)}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}\ c_z\left(x,y,z\right)}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathrm{d}\ c^m\left(x,y,z\right)}{\mathrm{d}t}\hat{\imath}_m$$

por consiguiente, si $\vec{c}$, tiene por componentes cartesianas (c_x, c_y, c_z) las componentes del vector derivado serán $\left(\frac{\mathrm{d}\ c_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\ c_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\ c_z}{\mathrm{d}t}\right)$. Con lo cual cada componente

$$\frac{\mathrm{d}\ c^m\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ c^m\left(x^n\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial c^m\left(x^n\right)}{\partial x^l}\frac{\mathrm{d}\ x^l\left(t\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\ \vec{r}\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t}\cdot\vec{\nabla}\right)c^m\left(x, y, z\right)$$

es decir, en términos vectoriales

$$\frac{\mathrm{d}\ \vec{c}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\ \vec{r}\left(t\right)}{\mathrm{d}\ t}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{c} \equiv \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{c} \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\ \left(\circ\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\circ\right) \equiv v^i\partial_i\left(\circ\right)$$

con $\vec{v}$ la derivada del radiovector posición $\vec{r}\left(t\right)$, es decir, la velocidad. Es decir, estamos viendo el cambio del vector $\vec{c}$ respecto al tiempo es el cambio de sus componentes en la dirección de la velocidad.

Si se nos ocurre calcular la derivada del vector velocidad para encontrar la aceleración tendremos que nos queda expresada como

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} \qquad \Rightarrow a^i = \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)v^i$$

donde las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración son $v^i = v^i\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$ y $a^i = a^i\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$, respectivamente.

9.5. El vector gradiente

El operador vectorial $\vec{\nabla}\left(\circ\right)$ merece un poco de atención en este nivel. Tal y como hemos visto

$$\vec{\nabla}\phi\left(x, y, z\right) = \left(\hat{\imath}\frac{\partial\phi\left(x, y, z\right)}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\phi\left(x, y, z\right)}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial\phi\left(x, y, z\right)}{\partial z}\right)$$

$$\vec{\nabla}\phi\left(x, y, z\right) = \hat{\imath}_1\partial^1\phi\left(x, y, z\right) + \hat{\imath}_2\partial^2\phi\left(x, y, z\right) + \hat{\imath}_3\partial^3\phi\left(x, y, z\right)$$

Con el operador nabla $\vec{\nabla}\left(\circ\right)$ realizaremos operaciones igual como un vector común y corriente. Así en el caso $\vec{\nabla}\times\vec{E}$ se denomina rotor de $\vec{E}$ viene definido por

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{\mathbf{k}}\right) =$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \hat{\imath}_i\varepsilon^{ijk}\partial_j E_k$$

También tendremos el "producto escalar" de nabla por un vector. Esta operación la llamaremos divergencia

$$\tilde{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a^i\left(x^j\right)}{\partial\ \tilde{x}^i} \equiv \partial_i a^i\left(x^j\right) \equiv \frac{\partial a_x\left(x, y, z\right)}{\partial\ x} + \frac{\partial a_y\left(x, y, z\right)}{\partial\ y} + \frac{\partial a_z\left(x, y, z\right)}{\partial\ z}$$

pero por ahora consideremos nabla $\vec{\nabla}$ como un vector. De este modo habrá cantidad de relaciones vectoriales que involucren a $\vec{\nabla}$ las cuales se podrán demostrar. Veamos

1. $\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b}+\left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a}+\vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$
   El resultado es un gradiente, es decir un vector. El lado izquierdo será

$$\left(\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right)^i=\partial^i\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\partial^i\left(a_jb^j\right)=\left(\partial^ia_j\right)b^j+\left(\partial^ib_j\right)a^j$$

   mientras que el lado derecho

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right)^i &= \left(a_j\partial^j\right)b^i+\left(b_j\partial^j\right)a^i+\varepsilon^{ijk}a_j\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right)_k+\varepsilon^{ijk}b_j\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)_k \\
&= \left(a_j\partial^j\right)b^i+\left(b_j\partial^j\right)a^i+\varepsilon^{ijk}a_j\varepsilon_{kmn}\partial^mb^n+\varepsilon^{ijk}b_j\varepsilon_{kmn}\partial^ma^n \\
&= \left(a_j\partial^j\right)b^i+\left(b_j\partial^j\right)a^i+\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnk}a_j\partial^mb^n+\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{mnk}b_j\partial^ma^n \\
&= \left(a_j\partial^j\right)b^i+\left(b_j\partial^j\right)a^i+\left(\delta^i_m\delta^j_n-\delta^j_m\delta^i_n\right)a_j\partial^mb^n+ \\
&\qquad +\left(\delta^i_m\delta^j_n-\delta^j_m\delta^i_n\right)b_j\partial^ma^n \\
&= a_j\partial^jb^i+b_j\partial^ja^i+\delta^i_m\delta^j_na_j\partial^mb^n-\delta^j_m\delta^i_na_j\partial^mb^n+ \\
&\qquad +\delta^i_m\delta^j_nb_j\partial^ma^n-\delta^j_m\delta^i_nb_j\partial^ma^n \\
&= a_j\partial^jb^i+b_j\partial^ja^i+a_n\partial^ib^n-a_m\partial^mb^i+b_n\partial^ia^n-b_m\partial^ma^i \\
&= \underbrace{a_j\partial^jb^i-a_m\partial^mb^i}_{=0}+\underbrace{b_j\partial^ja^i-b_m\partial^ma^i}_{=0}+a_n\partial^ib^n+b_n\partial^ia^n \\
&= a_n\partial^ib^n+b_n\partial^ia^n=\partial^i\left(a_jb^j\right)=\partial^i\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)
\end{aligned}$$

2. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a}=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)-\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\right]\vec{a}+\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)-\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{a}$
   Iniciamos la traducción a índices por el lado izquierdo de la ecuación así

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} &= \epsilon^{ijk}\partial_j\left(a_m\partial^m\right)a_k=\epsilon^{ijk}\left(\partial_ja_m\right)\partial^ma_k+\epsilon^{ijk}a_m\partial_j\partial^ma_k \\
&= \epsilon^{ijk}\left(\partial_ja_m\right)\partial^ma_k+a_m\partial^m\left(\epsilon^{ijk}\partial_ja_k\right)
\end{aligned}$$

   el lado derecho lo traduciremos término por término

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) &= \left(\partial^ma_m\right)\left(\epsilon^{ijk}\partial_ja_k\right) \\
-\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\right]\vec{a} &= -\left[\partial_m\epsilon^{mjk}\partial_ja_k\right]a^i=-\left[\epsilon^{mjk}\partial_m\partial_ja_k\right]a^i=0 \\
\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) &= a_m\partial^m\left(\epsilon^{ijk}\partial_ja_k\right) \\
-\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{a} &= -\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_ja_k\right)\partial_m\right]a^i
\end{aligned}$$

   el segundo término se anula por cuanto ϵ^{mjk} es antisimétrico respecto a los índices mj mientras que $\partial_m\partial_j$ es simétrico. El tercer término del desarrollo del lado derecho corresponde con el segundo del desarrollo del lado izquierdo. Por cual llegamos a la siguiente igualdad

$$\epsilon^{ijk}\left(\partial_ja_m\right)\partial^ma_k=\left(\partial^ma_m\right)\left(\epsilon^{ijk}\partial_ja_k\right)-\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_ja_k\right)\partial_m\right]a^i$$

Para verificar la igualdad tendremos que evaluar componente a componente. Esto es para el lado izquierdo

$$\begin{aligned}\epsilon^{1jk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k &= \epsilon^{123}\left(\partial_2 a_m\right)\partial^m a_3 + \epsilon^{132}\left(\partial_3 a_m\right)\partial^m a_2\\ &= \left(\partial_2 a_m\right)\partial^m a_3 - \left(\partial_3 a_m\right)\partial^m a_2\\ &= \left(\partial_2 a_1\right)\partial^1 a_3 + \left(\partial_2 a_2\right)\partial^2 a_3 + \left(\partial_2 a_3\right)\partial^3 a_3\\ &\qquad - \left(\partial_3 a_1\right)\partial^1 a_2 - \left(\partial_3 a_2\right)\partial^2 a_2 - \left(\partial_3 a_3\right)\partial^3 a_2\end{aligned}$$

mientras que para el primer término del lado derecho

$$\begin{aligned}\left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right) &= \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{123}\partial_2 a_3\right) + \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{132}\partial_3 a_2\right)\\ &= \underbrace{\partial_2 a_3\partial^1 a_1}_{\alpha} + \partial_2 a_3\partial^2 a_2 + \partial_2 a_3\partial^3 a_3\\ &\qquad \underbrace{-\partial_3 a_2\partial^1 a_1}_{\beta} - \partial_3 a_2\partial^2 a_2 - \partial_2 a_2\partial^3 a_3\end{aligned}$$

y el segundo término se escribe como

$$\begin{aligned}-\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right] a^i &= -\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right)\partial_1 a^1 - \left(\epsilon^{2jk}\partial_j a_k\right)\partial_2 a^1 - \left(\epsilon^{3jk}\partial_j a_k\right)\partial_3 a^1\\ &= -\left(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2\right)\partial_1 a^1 - \left(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3\right)\partial_2 a^1 -\\ &\qquad -\left(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1\right)\partial_3 a^1\\ &= \underbrace{\partial_3 a_2\partial_1 a^1}_{\beta}\underbrace{-\partial_2 a_3\partial_1 a^1}_{\alpha} + \partial_1 a_3\partial_2 a^1\underbrace{-\partial_3 a_1\partial_2 a^1}_{\gamma}\\ &\qquad \underbrace{+\partial_2 a_1\partial_3 a^1}_{\gamma} - \partial_1 a_2\partial_3 a^1\end{aligned}$$

al sumar ambos términos se eliminan los sumandos indicados con letras griegas, y queda como

$$\begin{aligned}\left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right) - \left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right] a^i &= \partial_2 \underset{\Xi}{a_3}\partial_2 a_2 + \partial_2 \underset{\Upsilon}{a_3}\partial_3 a_3\\ &\quad -\partial_3 \underset{\Omega}{a_2}\partial_2 a_2 - \partial_2 \underset{\Psi}{a_2}\partial_3 a_3\\ &\quad + \partial_1 \underset{\Lambda}{a_3}\partial_2 a_1 - \partial_1 \underset{\Sigma}{a_2}\partial_3 a_1\end{aligned}$$

y al compararlo con el desarrollo del lado derecho e identificar término a término queda demostrado

$$\begin{aligned}\epsilon^{1jk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k &= \underset{\Lambda}{\left(\partial_2 a_1\right)}\partial_1 a_3 + \underset{\Xi}{\left(\partial_2 a_2\right)}\partial_2 a_3 + \underset{\Upsilon}{\left(\partial_2 a_3\right)}\partial_3 a_3\\ &\quad - \underset{\Sigma}{\left(\partial_3 a_1\right)}\partial_1 a_2 - \underset{\Omega}{\left(\partial_3 a_2\right)}\partial_2 a_2 - \underset{\Psi}{\left(\partial_3 a_3\right)}\partial_3 a_2\end{aligned}$$

De igual manera se procede con $i = 2$ e $i = 3$

9.6. Integración

Después de haber diferenciado campos escalares y vectoriales, el siguiente paso es integrarlos. Encontraremos varios objetos vectoriales a integrar serán:

$$\int \vec{V}(u)\ \mathrm{d}\ u \qquad \text{integración de un vector por un escalar}$$

$$\int_c \phi(x,y,z)\ \mathrm{d}\ \vec{r} \qquad \text{integración de un escalar a lo largo de un vector}$$

$$\int_c \vec{V}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\ \vec{r} \qquad \text{integración de un vector a lo largo de otro vector}$$

$$\int_c \vec{V}(x,y,z)\times \mathrm{d}\ \vec{r} \qquad \text{integración de un vector por otro vector}$$

el primero de casos es el tipo de integral que siempre hemos utilizado para encontrar la posición a partir de la velocidad. Los siguientes tres casos se conocen con el nombre de integrales de línea por cuanto es importante la "ruta" o trayectoria que sigamos al integrar. Esto aparece indicado por la letra C en la integral y será evidente más adelante. En general la integral de línea dependerá de la trayectoria.

9.6.1. Un vector por un escalar

El primer caso de este tipo integrales es el trivial que siempre hemos utilizado:

$$\int \vec{V}(u)\ \mathrm{d}\ u = \hat{\imath}\int V_x(u)\ \mathrm{d}\ u + \hat{\jmath}\int V_y(u)\ \mathrm{d}\ u + \hat{\mathbf{k}}\int V_z(u)\ \mathrm{d}\ u = \left(\int V^i(u)\ \mathrm{d}\ u\right)\hat{\mathbf{e}}_i$$

La integral de un vector (en un sistema de coordenadas cartesianas) por un escalar se convierte en una suma de tres integrales de siempre, cada una a lo largo de las componentes cartesianas del vector.

Así integramos la aceleración de un movimiento parabólico

$$\frac{\mathrm{d}\ \vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a} = -g\hat{\mathbf{k}} \quad \Longrightarrow \vec{v} = \int \vec{a}\ \mathrm{d}t = \hat{\mathbf{k}}\int -g\ \mathrm{d}t = -\hat{\mathbf{k}}gt\ + \vec{v}_0 = -\hat{\mathbf{k}}gt\ + \hat{\imath}v_{0x} + \hat{\jmath}v_{0y} + \hat{\mathbf{k}}v_{0z}$$

Ahora bien, existen sutilezas en este caso que debemos tener en cuenta. Por ejemplo considere la integral

$$\int \mathrm{d}t\ \left(\vec{a}\times\frac{\mathrm{d}^2\ \vec{a}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \int \mathrm{d}t\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\ \vec{a}}{\mathrm{d}t}\right) - \frac{\mathrm{d}\ \vec{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\ \vec{a}}{\mathrm{d}t}\right) = \int \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\ \vec{a}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{a}\times\frac{\mathrm{d}\ \vec{a}}{\mathrm{d}t} + \vec{c}$$

Pero en general los casos quedan resueltos integrando componente a componente con la ayuda de la notación de índices

$$\int \mathrm{d}t\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left[\int \mathrm{d}t\ \left(\varepsilon^{ijk}a_jb_k\right)\right]|\mathbf{e}_i\rangle$$

Quizá uno de los problemas que ilustra mejor esta situación es el movimiento bajo fuerzas centrales. La Ley de Gravitación de Newton nos dice que

$$\sum F = m\ \vec{a} = m\ \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\ G\frac{M}{r_{mM}^2}\hat{\mathbf{u}}_r \quad \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}}{\mathrm{d}t} = G\frac{M}{r_{mM}^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$

Es costumbre definir la *velocidad aerolar,* $\vec{v}_A$, como el área barrida por el radio vector posición, $\vec{r}(t)$ que describe la trayectoria de la partícula

$$2\vec{v}_A = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}t} = r\ \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{\mathrm{d}\ (r\ \hat{\mathbf{u}}_r)}{\mathrm{d}t} = r\ \hat{\mathbf{u}}_r \times \left(\frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}t}\hat{\mathbf{u}}_r + r\frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right) = r\ \hat{\mathbf{u}}_r \times r\frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}$$

Nótese que si $\vec{c}$ es un vector constante

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = \vec{c} \quad \Longrightarrow 2\vec{v}_A = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t} = const$$

con lo cual

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v} \times \vec{v}_A\right) = \frac{\mathrm{d}\ \vec{v}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v}_A = G\frac{M}{r_{mM}^2}\hat{\mathbf{u}}_r \times \vec{v}_A = \frac{MG}{2}\left\{\hat{\mathbf{u}}_r \times \left(\hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right)\right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v} \times \vec{v}_A\right) = \frac{MG}{2}\left\{\left(\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\mathbf{u}}_r - \left(\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r\right)\frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}\right\} = \frac{MG}{2}\frac{\mathrm{d}\ \hat{\mathbf{u}}_r}{\mathrm{d}t}$$

integrando

$$\vec{v} \times \vec{v}_A = \frac{MG}{2}\hat{\mathbf{u}}_r + \vec{p}$$

donde $\vec{p}$ es un vector arbitrario de constante de integración. Finalmente nos damos cuenta que

$$\vec{r} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{v}_A\right) = r\ \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \left(\frac{MG}{2}\hat{\mathbf{u}}_r + \vec{p}\right) = \frac{MG}{2}r + rp\cos\theta$$

$$\vec{r} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{v}_A\right) = \varepsilon^{ijk} r_i v_j v_{Ak} \equiv \vec{v}_A \cdot \left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A = v_A^2$$

y entonces

$$v_A^2 = \frac{MG}{2}r + rp\cos\theta \quad \Longrightarrow r = \frac{v_A^2}{\frac{MG}{2} + p\cos\theta} \equiv \frac{\frac{2v_A^2}{MG}}{1 + \frac{2p}{MG}\cos\theta}$$

que constituye la ecuación de una cónica.

9.6.2. Un escalar a lo largo de un vector $\int_c \phi\left(\vec{r}\right)\ \mathrm{d}\vec{r}$

El segundo objeto que “tropezaremos” es la integración de funciones de varias a lo largo de una curva determinada. Esto es

$$\int_c \phi\left(x,y,z\right)\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_c \phi\left(x,y,z\right)\left(\mathrm{d}x\ \hat{\imath} + \mathrm{d}y\ \hat{\jmath} + \mathrm{d}z\ \hat{\mathbf{k}}\right) = \hat{\imath}\int_c \phi\left(x,y,z\right)\mathrm{d}\,x + \hat{\jmath}\int_c \phi\left(x,y,z\right)\mathrm{d}\,y + \hat{\mathbf{k}}\int_c \phi\left(x,y,z\right)\mathrm{d}\,z$$

la integral se nos ha convertido en tres integrales, las cuales son ahora componentes de un vector. Esto es posible dado que la base $\left(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{\mathbf{k}}\right)$ es una base constante. Ahora bien, cada una de estas integrales son interdependientes, dado que hay que seguir la misma curva c. Consideremos el caso bidimensional que es más simple y contiene toda la riqueza conceptual del tridimensional. Así

$$\phi\left(x,y\right) = 3x^2 + 2y \quad \Longrightarrow \int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2 + 2y\right)\ \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\imath}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2 + 2y\right)\mathrm{d}\ x + \hat{\jmath}\int_{(0,0)}^{(1,2)}\left(3x^2 + 2y\right)\mathrm{d}\ y$$

Se requiere especificar la curva c a lo largo de la cual integraremos desde el punto $P_1 \rightarrow (0,0)$ al punto $P_2 \rightarrow (1,2)$. Si recorremos la ruta $(0,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (1,2)$ tendremos que

$$(0,0) \rightarrow (1,0) \Longrightarrow y = cte = 0 \quad \Longrightarrow \int_{(0,0)}^{(1,0)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\imath}\int_{(0,0)}^{(1,0)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}x = \hat{\imath}\int_0^1 \left(3x^2\right) \mathrm{d}x = \hat{\imath}$$

$$(1,0) \rightarrow (1,2) \Longrightarrow x = cte = 1 \quad \Longrightarrow \int_{(0,0)}^{(1,0)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\jmath}\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}y = \hat{\jmath}\int_0^2 (3+2y)\, \mathrm{d}y = 10\hat{\jmath}$$

con lo cual

$$c_1 \longleftrightarrow \underbrace{(0,0) \rightarrow}_{\overrightarrow{c_1^A}} (1,0) \underbrace{\rightarrow (1,2)}_{\overrightarrow{c_1^B}} \quad \Longrightarrow \int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right)\ \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$$

si hubiéramos seleccionado la recta que une a estos dos puntos como la curva c_2 entonces

$$c_2 \longleftrightarrow y = 2x \quad \Longrightarrow \mathrm{d}\ y = 2\mathrm{d}\ x$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right)\ \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\imath}\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}\ x + \hat{\jmath}\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right) \mathrm{d}\ y$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} \left(3x^2+2y\right)\ \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\imath}\int_0^1 \left(3x^2+2\,(2x)\right) \mathrm{d}\ x + \hat{\jmath}\int_0^1 \left(3x^2+2\,(2x)\right) 2\mathrm{d}x = 3\hat{\imath}+6\hat{\jmath}$$

En general la curva c se parametrizará y las integrales en varias variables se convertirán en integrales a lo largo del parámetro que caracteriza la curva

$$c \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = x(\tau) \\ y = y(\tau) \\ z = z(\tau) \end{array} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_c \phi(x,y,z)\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_c \phi\left(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\right) \left(\frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau\ \hat{\imath} + \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau\ \hat{\jmath} + \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau\ \hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\int_c \phi(x,y,z)\, \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\imath}\int_c \phi\left(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\right) \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau + \hat{\jmath}\int_c \phi\left(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\right) \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau \\ + \hat{\mathbf{k}}\int_c \phi\left(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\right) \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

las parametrizaciones para las curvas anteriores son muy simples

$$c_1^A = \left\{ \begin{array}{c} x = \tau \\ \\ y = 0 \end{array} \right. ; \quad c_1^B = \left\{ \begin{array}{c} x = 2 \\ \\ y = \tau \end{array} \right. ; \quad c_2 = \left\{ \begin{array}{c} x = \tau \\ \\ y = 2\tau \end{array} \right.$$

9.6.3. Un vector a lo largo de otro vector $\int_c \vec{F}(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{r}$

Quizá la integral de línea más conocida sea una del tipo $\int_c \vec{F}(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{r}$ por cuanto nos la hemos "tropezado" en el cálculo del trabajo de que realiza una fuerza. Todo lo que hemos considerado al parametrizar la curva en el caso anterior, sigue siendo válido.

$$\int_c \vec{F}(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_c F_x(x,y,z)\ \mathrm{d}x + \int_c F_y(x,y,z)\ \mathrm{d}y + \int_c F_z(x,y,z)\ \mathrm{d}z = \int_c F^i\left(x^j\right)\ \mathrm{d}x_i$$

Por lo cual, si consideramos

$$\vec{F}(\vec{r}) = \left(3x^2 + 2xy^3\right)\hat{\imath} + 6xy\hat{\jmath}$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \vec{F}(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \left(\left(3x^2 + 2xy^3\right)\hat{\imath} + 6xy\hat{\jmath}\right)\left(\mathrm{d}x\ \hat{\imath} + \mathrm{d}y\ \hat{\jmath}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \vec{F}(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \left(3x^2 + 2xy^3\right)\ \mathrm{d}x + \int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} 6xy\ \mathrm{d}y$$

y si la curva que une esos puntos viene parametrizada por

$$\left.\begin{array}{c} x = 2\tau^2 \\ \\ y = \tau^3 + \tau \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} = 4\tau \\ \\ \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = 3\tau^2 + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

entonces la primera de las integrales resulta

$$\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \left(3x^2 + 2xy^3\right)\ \mathrm{d}x = \int \left(3\left(2\tau^2\right)^2 + 2\left(2\tau^2\right)\left(\tau^3+\tau\right)^3\right)(4\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \left(3x^2 + 2xy^3\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(12\tau^5 + 4\tau^{12} + 12\tau^{10} + 12\tau^8 + 4\tau^6\right)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4} + \frac{9305}{96\,096}\sqrt{2}$$

y la segunda

$$\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} 6xy\ \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 6\left(2\tau^2\right)\left(\tau^3+\tau\right)\left(3\tau^2+1\right)\mathrm{d}\tau = \frac{65}{32}$$

con lo cual

$$\int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \vec{F}(\vec{r})\ \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} \left(3x^2 + 2xy^3\right)\ \mathrm{d}x + \int_{(0,0)}^{\left(1,\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)} 6xy\ \mathrm{d}y = \frac{73}{32} + \frac{9305}{96\,096}\sqrt{2}$$

10. Vectores y números complejos

Desde la más tierna infancia matemática nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. De este modo la solución a un polinomio cúbico

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \\ x = 3 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow (x+2i)(x-2i)(x-3) = 0$$

o cuadrático

$$x^2 + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Longrightarrow (x + 2i)(x - 2i)$$

nos lleva a definir un número $i^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i = \sqrt{-1}$ como vimos arriba al multiplicar el número imaginario i por cualquier número real obtendremos el número imaginario puro bi, con $b \in \Re$. La nomenclatura números imaginarios surgió de la idea de que estas cantidades no representan mediciones físicas. Esa idea ha sido abandonada pero el nombre quedó.

10.1. Los números complejos y su álgebra

Un número complejo, z, es la generalización de los números imaginarios (puros), ib. Esto es

$$z = a + ib \qquad \text{con } a, b \in \Re \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a \rightarrow & \text{parte real} \\ & \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{array} \right.$$

Obviamente los números reales serán $a + i0$ números complejos con su parte imaginaria nula. Los números imaginarios puros serán números complejos con su parte real nula, esto es $0 + ib$. Por ello en general diremos que

$$z = a + ib \quad \Longrightarrow a = \operatorname{Re}(z) \quad \wedge \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

es decir, a corresponde a la parte real de z y b a su parte imaginaria.

Cada número complejo, z, tendrá un número complejo conjugado, z^* tal que

$$\begin{array}{c} z = a + ib \quad \rightleftharpoons \quad z^* = a - ib \\ \Downarrow \\ (z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2 \end{array}$$

claramente

$$z \cdot z^* \geq 0 \quad \Longrightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^*$$

Es importante señalar que, en general, no existe relación de orden entre los números complejos. Vale decir, que no sabremos si un número complejo es mayor que otro. No está definida esta operación.

$$z_1 \ngtr z_2 \quad \vee \quad z_1 \nless z_2$$

las relaciones de orden sólo se podrán establecer entre módulos de números complejos y no números complejos en general.

Rápidamente recordamos el álgebra de los números complejos:

- dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son

$$z_1 = z_2 \quad \Longrightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \quad \Longrightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2$$

- se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias.

$$z_3 = z_1 + z_2 \quad \Longrightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3} + i\underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3} = a_3 + ib_3$$

claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

- se multiplican números complejos por escalares multiplicando el escalar por sus partes reales e imaginarias
$$z_3 = \alpha z_1 \quad \Longrightarrow \alpha\,(a_1 + ib_1) = (\alpha a_1) + i\,(\alpha b_1)$$
- se multiplican números complejos entre si, multiplicando los dos binomios y teniendo cuidad que $i^2 = -1$.
$$z_3 = z_1 z_2 \quad \Longrightarrow (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$
también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
- se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales. Esto es
$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \quad \Longrightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)}\frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}$$
es claro que el divisor será cualquier número complejo excepto el cero complejo, $0 + i0$,

10.2. Vectores y el plano complejo

Mirando con cuidado el álgebra de números complejos nos damos cuenta que un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números complejos es decir,

$$z = (a + ib) \quad \leftrightharpoons \quad z = (a, b)$$

las propiedades entre números complejos de igualdad, suma y multiplicación por un escalar arriba expuestas se cumplen de forma inmediata con esta nueva representación. Hay que definir las operaciones de multiplicación y división entre números complejos de forma que

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad \wedge \quad \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}\right)$$

Esta asociación de un número complejo con una pareja de números inmediatamente nos lleva a imaginar un punto en un plano (complejo) en el cual la primera componente (horizontal) representa la parte real y la segunda componente (vertical) representa la parte imaginaria. De esta forma asociamos a un número complejo a un vector que une a ese punto (a, b) con el origen del plano complejo. Esta representación de números complejos como vectores un el plano (complejo) de conoce con el nombre de Diagrama de Argand[3] a pesar que no fue Jean Argand, sino Caspar Wessel[4] el primero en proponerlo. Por cierto esta interpretación fue tres veces redescubierta primero por Caspar Wessel en 1799, luego por Jean Argand en 1806 y finalmente por Gauss[5] en 1831.

[3]En honor a Jean Robert Argand, (Ginebra, Suiza, 18 Julio 1768; Paris, Francia 13 agosto 1822) Contador pero matemático aficionado. Propuso esta interpretación de números complejos como vectors en un plano complejo en un libro autoeditado con sus reflexiones que se perdió y fue rescatado 7 años después, fecha a partir de la cual Argand comenzó a publicar en Matematicas. M'as detalles en `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/\char126\relaxhistory/Mathematicians/Argand.html`

[4]Caspar Wessel (Vestby, Noruega 8 junio 1745; 25 marzo 1818, Copenhagen, Dinamarca) Matemático noruego que se dedicó principalemente al levantamiento topográfico de Noruega. Su trabajo sobre la interpretación de números complejos permaneció desconocido por casi 100 años.
Más detalles `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/\char126\relaxhistory/Mathematicians/Wessel.html`

[5]Johann Carl Friedrich Gauss (30 abril 1777, Brunswick, Alemania; 23 febrero 1855, Göttingen, Alemania). Uno de los mátemáticos más geniales y precoces de la Historia. Desde los 7 años comenzó a mostrar sus condiciones de genialidad. Sus contribuciones en Astronomía y Matemáticas son múltiples y diversas
Más detalles `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/\char126\relaxhistory/Mathematicians/Gauss.html`

De esta manera como un recordatorio al plano real

$$z = x + iy \quad \leftrightharpoons \quad z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad \text{donde} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \end{array} \right.$$

La interpretación vectorial de números complejos permite que la suma de números complejos sea representada por la "regla del paralelogramo". Mientras que los productos escalar y vectorial nos llevan a

$$z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Re}\left(z_1 z_2^*\right) = \operatorname{Re}\left(z_1^* z_2\right) \quad \wedge \quad z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}\left(z_1^* z_2\right) = -\operatorname{Im}\left(z_1 z_2^*\right)$$

Con esta interpretación tendremos

$x = \operatorname{Re} z$	$\rightleftharpoons$	componente real del vector z o parte real de z
$y = \operatorname{Im} z$	$\rightleftharpoons$	componente imaginaria del vector z o parte real de z
$r = \sqrt{zz^*} = \lvert z\rvert$	$\rightleftharpoons$	módulo, magnitud o valor absoluto de z
θ	$\rightleftharpoons$	ángulo polar o de fase del número complejo z

10.3. Fórmulas de Euler y De Moivre

Nos hemos tropezado con la expansión en Taylor[6] esta serie permite expresar cualquier función infinitamente diferenciable alrededor de un punto x_0 como una serie infinita de potencias del argumento de la función. Esto es

$$f(x) = 1 + \left.\frac{\mathrm{d}\ f(x)}{\mathrm{d}\ x}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\ f(x)}{\mathrm{d}\ x^2}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{\mathrm{d}^3\ f(x)}{\mathrm{d}\ x^3}\right|_{x=x_0}(x-x_0)^3 + \cdots\cdots$$

$$f(x) = C_n\left(x-x_0\right)^n \qquad \text{con } C_n = \frac{1}{n!}\left.\frac{\mathrm{d}^n\ f(x)}{\mathrm{d}\ x^n}\right|_{x=x_0} \qquad \text{donde } n = 0,1,2,3,4\cdots$$

con lo cual si consideramos $x_0 = 0$ entonces

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots\cdots$$

Es fácil convercerse que

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \left(-\frac{1}{6}i\right)\theta^3 + \frac{1}{24}\theta^4 + \frac{1}{120}i\theta^5 - \frac{1}{720}\theta^6 + \left(-\frac{1}{5040}i\right)\theta^7 + \cdots\cdots$$

[6] Brook Taylor (18 agosto 1685, Edmonton, Inglaterra; 29 diciembre 1731, Londres, Inglaterra) Físico y Matemático Inglés contemporaneo de Newton y Leibniz y con ellos participó profundamente en el desarrollo del álculo diferencial e integral. Además de sus aportes magnetismo, capilaridad y termometría, desarrolló el área de diferencias finitas que hasta hoy utilizamos para cálculos en computación. Inventó la integración por partes y descubrió la serie que lleva su nombre.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Taylor.html

puede rearreglarse como

$$e^{i\theta}=\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^4-\frac{1}{720}\theta^6+\cdots\cdots\right)}_{\cos\theta}+i\underbrace{\left(\theta-\frac{1}{6}\theta^3+\frac{1}{120}\theta^5-\frac{1}{5040}\theta^7+\cdots\cdots\right)}_{\sin\theta}$$

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

esta relación se conoce como la relación de Euler[7]. Con lo cual ahora tenemos tres formas de representar un número complejo

$$z=x+iy \quad \leftrightarrows \quad z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right) \quad \leftrightarrows \quad z=re^{i\theta}$$

La expresión $z=x+iy$ se conoce como forma cartesiana de representación de un número complejo, la forma $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ será la forma trigonométrica y la expresión $z=e^{i\theta}$ será la forma de Euler. Las sumas de números complejos son más fácilmente planteables en su forma cartesiana. Mientras las multiplicación y división serán directas en la forma de Euler

$$\left.\begin{array}{l} z_1=r_1e^{i\theta_1} \\ \\ z_2=r_2e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow z_1z_2=e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}=r_1r_2\left(\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right)$$

Más aún, si

$$z=x+iy \quad \Longrightarrow e^z=e^{(x+iy)}=e^xe^{iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$$

y a partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar la De Moivre[8]

$$\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta} \quad \leftrightarrows \quad \left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right) \quad \text{con } n \text{ entero}$$

Referencias

[1] Arfken, G. B.,Weber, H., Weber, H.J. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) **Vector and Tensor Analisys** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) **Mathematics for Physicists** (Dover Publications Inc, Nueva York)

[4] Harper, C. (1971) **Introduction to Mathematical Physics** (*Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:*)

[5] Hauser, W (1971) **Introduction to Principles of Electromagnetism** (*Addison-Wesley Pub Co Reading*)

[6] Santaló, L.A (1969) **Vectores y Tensores** (*Editorial Universitaria, Buenos Aires*)

[7]Leonhard Euler (15 abril 1707, Basilea, Suiza; 18 septiembre 1783, San Petersburgo, Rusia). Uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Desarrolló inmensamente campos como la geometría analítica y trigonometría, siendo el primero que consideró el coseno y el seno como funciones. Hizo aportes significativos en el desarrollo del cálculo diferencial e integral así como tambien, astronomía, elasticidad y mecánica de medios contínuos.
Más detalles http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Euler.html

[8]Abraham de Moivre (26 mayo 1667 in Vitry-le-François, Francia; 27 noviembre 1754, Londres Inglaterra) Matemático francés que tuvo que emigrar a Inglaterra por razones religiosas. Contemporaneo de Newton, Liebniz, Halley, fue pionero con sus contribuciones en geometría analítica y Teoría de Probabilides.

[7] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)

[8] Spiegel, M. (1959) **Vector Analysis** (*Schaum´s Outline Series, McGraw Hill New York*)