Coordenadas Vectores y Tensores
Métodos Matemáticos de la Física 1
Examen
Mayo 2005

Nombre____

1. Dados T^i_j, a^i y $b^i \in E^3$ con

$$T^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Suponga que T^i_j, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están expresados en coordenadas cartesianas, calcule $A_{ij}a^ib^j, S_{ij}a^ia^j$, $A_{ij}b^ib^j$. (3 puntos)
Donde S_{ij} y A_{kl} son, respectivamente, las partes simétrica y antisimétrica del tensor T^i_j y la métrica en coordenadas cartesianas viene dada por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tendremos que

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Nótese que la expresión matricial para $T_{ij} \equiv g_{ik}T^k_j$ es la misma que para T^i_j debido a la forma de la métrica en este espacio. Del mismo modo

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$a^iA_{ij}b^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{87}{2}$$

$$a^iS_{ij}a^j = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 1$$

$$b^iA_{ij}b^j = 0$$

b) Suponga ahora que esos mismos T^i_j, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ están expresados en coordenadas cilíndricas.

1) Encuentre la expresión para $\vec{b}$ en coordenadas esféricas. (3 puntos).
Al expresar $\vec{b}$ *en cilíndricas tendremos que* $\vec{b} = -2\ \hat{u}_\rho + 5\ \hat{u}_\varphi + 4\ \hat{u}_z$ *con lo cual para expresar* $\vec{b}$ *en esféricas podemos proceder de dos forma.*
La primera forma es transformando las componentes al conocer como transforman las coordenadas. Es decir conociendo $x^i = x^i(\tilde{x}^m)$ y $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(x^m)$ *expresar* $\tilde{b}^i = \frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial\ x^k}\ b^k$. *Dado que*

$$x(\rho, \tilde{\varphi}) = \rho\cos\tilde{\varphi} = x(r, \varphi, \theta) = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ \tilde{\varphi} = \varphi \end{array} \right. \quad \text{y} \quad z = r\cos\theta$$

equivalentemente,

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right) \quad \tilde{\varphi} = \varphi$$

por lo tanto

$$\tilde{b}^i = \frac{\partial\ \tilde{x}^i}{\partial\ x^k}\ b^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^1} & \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^1}{\partial\ x^2} \\ \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^1} & \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^2}{\partial\ x^3} \\ \frac{\partial\ \tilde{x}^3}{\partial\ x^1} & \frac{\partial\ \tilde{x}^3}{\partial\ x^2} & \frac{\partial\ \tilde{x}^3}{\partial\ x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ r}{\partial\ \rho} & \frac{\partial\ r}{\partial\ \varphi} & \frac{\partial\ r}{\partial\ z} \\ \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ \rho} & \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ \varphi} & \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ z} \\ \frac{\partial\ \theta}{\partial\ \rho} & \frac{\partial\ \theta}{\partial\ \varphi} & \frac{\partial\ \theta}{\partial\ z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial\ \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial\ \rho} & \frac{\partial\ \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial\ \varphi} & \frac{\partial\ \sqrt{\rho^2+z^2}}{\partial\ z} \\ \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ \rho} & \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ \varphi} & \frac{\partial\ \varphi}{\partial\ z} \\ \frac{\partial\ \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial\ \rho} & \frac{\partial\ \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial\ \varphi} & \frac{\partial\ \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial\ z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{z}{\rho^2+z^2} & 0 & \frac{-\rho}{\rho^2+z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

por lo tanto en esféricas

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\cos\theta \\ 5 \\ \frac{-2\cos\theta}{r} - \frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta}{r} \end{pmatrix} = (-2\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\cos\theta)\,\hat{u}_r + 5\ \hat{u}_\varphi + - \left(\frac{2\cos\theta}{r} + \frac{4\,\mathrm{sen}\,\theta}{r}\right)\hat{u}_\theta$$

la otra forma es expresar la base ortonormal cilíndrica en términos de la base ortonormal esférica. Otra vez, utilizamos la base cartesiana como intermediaria. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}_\rho = \cos\tilde{\varphi}\ \hat{\imath} + \mathrm{sen}\,\tilde{\varphi}\ \hat{\jmath}; \\ \hat{u}_{\tilde{\varphi}} = -\,\mathrm{sen}\,\tilde{\varphi}\ \hat{\imath} + \cos\tilde{\varphi}\ \hat{\jmath} \\ \hat{u}_z = \hat{\mathbf{k}} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{\imath} = \cos\tilde{\varphi}\ \hat{u}_\rho - \mathrm{sen}\,\tilde{\varphi}\ \hat{u}_{\tilde{\varphi}} \\ \hat{\jmath} = \mathrm{sen}\,\tilde{\varphi}\ \hat{u}_\rho + \cos\tilde{\varphi}\ \hat{u}_{\tilde{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{k}} = \hat{u}_z \end{array}\right.$$

y parecido en esféricas

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}_r = \cos\varphi\sin\theta\ \hat{\imath} + \sin\varphi\sin\theta\ \hat{\jmath} + \cos\theta\ \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{u}_\varphi = -\sin\varphi\ \hat{\imath} + \cos\varphi\ \hat{\jmath} \\ \hat{u}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\ \hat{\imath} + \sin\varphi\cos\theta\ \hat{\jmath} - \sin\theta\ \hat{\mathbf{k}} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{\imath} = \cos\varphi\sin\theta\ \hat{u}_r + \cos\varphi\cos\theta\ \hat{u}_\theta - \sin\varphi\ \hat{u}_\varphi \\ \hat{\jmath} = \sin\varphi\sin\theta\ \hat{u}_r + \sin\varphi\cos\theta\ \hat{u}_\theta + \cos\varphi\ \hat{u}_\varphi \\ \hat{\mathbf{k}} = \cos\theta\ \hat{u}_r - \sin\theta\ \hat{u}_\theta \end{array}\right.$$

con lo cual

$$\hat{u}_\rho = \cos\varphi\ \left(\cos\varphi\sin\theta\ \hat{u}_r + \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\ \hat{u}_\varphi\right) + \mathrm{sen}\,\varphi\ \left(\sin\varphi\sin\theta\ \hat{u}_r + \sin\varphi\cos\theta\ \hat{u}_\theta + \cos\varphi\ \hat{u}_\varphi\right);$$
$$\hat{u}_\rho = \sin\theta\ \hat{u}_r + \cos\theta\ \hat{u}_\theta$$
$$\hat{u}_{\tilde{\varphi}} = \hat{u}_\varphi$$
$$\hat{u}_z = \cos\theta\ \hat{u}_r - \sin\theta\ \hat{u}_\theta$$

entonces

$$\vec{b} = -2\ \hat{u}_\rho + 5\ \hat{u}_\varphi - +4\ \hat{u}_z = -2\left(\sin\theta\ \hat{u}_r + \cos\theta\ \hat{u}_\theta\right) + 5\left(\hat{u}_\varphi\right) + 4\left(\cos\theta\ \hat{u}_r - \sin\theta\ \hat{u}_\theta\right)$$

finalmente

$$\vec{b} = \left(-2\sin\theta + 4\cos\theta\right)\hat{u}_r + 5\hat{u}_\varphi - \left(2\cos\theta + 4\sin\theta\right)\hat{u}_\theta$$

2) Encuentre la expresión para $A_{ij}a^i b^j$ en coordenadas esféricas (3 puntos)
La expresión para $a^i A_{ij} b^j = -\frac{87}{2}$ ser'a la misma que el caso anterior porque $a^i A_{ij} b^j$ es un escalar bajo transformaciones de coordenadas que significa que es invariante y valdrá lo mismo en todos los sistemas de coordenadas

Recuerde que

$$\text{cilíndricas} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x\left(\rho,\varphi\right) = \rho\cos\varphi \\ \\ y = y\left(\rho,\varphi\right) = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \\ z = z \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \text{esféricas} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x\left(r,\varphi,\theta\right) = r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ y = y\left(r,\varphi,\theta\right) = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ z\left(r,\varphi,\theta\right) = r\cos\theta \end{array}\right.$$

y el tensor métrico en coordenadas cilíndricas

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

mientras que en coordenadas esféricas es

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta\ ; \quad g_{33} = g_{\theta\theta} = r^2.$$

2. Los impulsos (*boost*) de Lorentz y la métrica del espacio tiempo en coordenadas cartesianas en Relatividad especial (espacio tiempo de Minkowski) vienen dados por

$$\Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{y} \quad \eta^{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde β está relacionada con la velocidad relativa entre dos observadores o y o', en este caso, en la dirección del eje x . Es decir, $\beta = \frac{V_{oo'}}{c}$ representa la relación entre la velocidad relativa de los dos observadores, $V_{oo'}$, respecto a la velocidad de la luz en el vacío, c. Cuando $V_{oo'} \to c$ entonces $\beta \to 1$. Los impulsos de Lorentz son equivalentes a las transformaciones de Galileo, las cuales permiten transformar expresiones de un sistema de referencia a otro. De hecho, si la velocidad de los observadores es mucho menor que la velocidad de la luz: $V_{oo'} \ll c \to \beta \simeq 0$ y recuperaremos las transformaciones de Galileo. Así los vectores entre los dos sistemas de referencias transformarán

$$V_{\lambda'} = \Lambda^{\mu}_{\lambda'} V_\mu \quad \text{y} \quad V^\alpha = \Lambda^{\alpha}_{\lambda'} V^{\lambda'} \quad \text{con} \quad \Lambda^{\mu}_{\lambda'}\Lambda^{\lambda'}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

a) En el sistema o considere un cuadrivector

$$u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión para $u^{\mu'}$. Es decir, la expresión para ese vector medido en el sistema de referencia o'. Encuentre también la expresión para $u_{\mu'}$ (3 puntos)
Es inmediato

$$u^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\lambda} u^{\lambda} \Rightarrow u^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Si conocemos la longitud, L de una vara que alineada sobre el eje x en el sistema o ¿ cuál será la longitud de esa misma vara medida desde el sistema o'? (3 puntos)
En general la distancia entre sus dos puntos es la resta de sus coordenadas. Digamos x^1_a y x^1_b *Así, la longitud de una vara en reposo respecto al sistema* o*, alineada con en eje* x*, será la resta de sus coordenadas en ese eje. Esto es* $L = x^1_b - x^1_a$ *la longitud medida en* o' *ser'a*

$$x^{\alpha'}_b = \Lambda^{\alpha'}_{\lambda} x^{\lambda}_b \Rightarrow x^{\alpha'}_b = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0_b \\ x^1_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x^0_b - \gamma\beta x^1_b \\ -\gamma\beta x^0_b + \gamma x^1_b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{\alpha'}_a = \Lambda^{\alpha'}_{\lambda} x^{\lambda}_a \Rightarrow x^{\alpha'}_a = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0_a \\ x^1_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x^0_a - \gamma\beta x^1_a \\ -\gamma\beta x^0_a + \gamma x^1_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$x^{1'}_b - x^{1'}_a = \left(\gamma\beta x^0_b + \gamma x^1_b\right) - \left(\gamma\beta x^0_a + \gamma x^1_a\right) = \gamma\left(x^1_b - x^1_a\right) \Rightarrow L' = \gamma L$$

las longitudes medidas por los distintos observadores son distintas. Nótese que hemos hecho $x^0_b = x^0_a$ *para que la medida de longitud en* o*. Ahora bien, dado* $x^{0'}_b \neq x^{0'}_a$ *esa resta en* o'*, no puede ser consideradas como una longitud física, pero eso no tiene que ver con la pregunta.*

c) Dado un tensor genérico de segundo orden, D^{μ}_{ν} en relatividad especial, muestre que $\sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu\mu}$ no es un escalar bajo transformación de sistemas de referencias. (2 puntos)
Dado un tensor genérico de segundo orden D^{μ}_{ν} *transforma* $D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{\alpha'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{\beta'} = D^{\alpha'}_{\beta'}$ *siempre se puede*

$$D^{\mu}_{\nu}\eta^{\nu\gamma} = D^{\mu\gamma} \Rightarrow \sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu}_{\nu}\eta^{\nu\mu} = D^{0}_{\nu}\eta^{\nu 0} + D^{1}_{\nu}\eta^{\nu 1} + D^{2}_{\nu}\eta^{\nu 2} + D^{3}_{\nu}\eta^{\nu 3}$$

$$\sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu\mu} = -D^0_0 + D^1_1 + D^2_2 + D^3_3$$

y equivalentemente

$$\sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu'\mu'} = -D^{0'}_{0'} + D^{1'}_{1'} + D^{2'}_{2'} + D^{3'}_{3'} = D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{0'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{0'} + D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{1'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{1'} + D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{2'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{2'} + D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{3'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{3'}$$

donde por simplicidad utilizaremos las transformaciones de Lorentz para sistemas que se desplazan a lo largo del eje x

$$D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{0'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{0'} = D^{0}_{0}\Lambda^{0'}_{0}\Lambda^{0}_{0'} + D^{0}_{1}\Lambda^{0'}_{0}\Lambda^{1}_{0'} + D^{1}_{0}\Lambda^{0'}_{1}\Lambda^{0}_{0'} + D^{1}_{1}\Lambda^{0'}_{1}\Lambda^{1}_{0'}$$

$$D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{1'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{1'} = D^{0}_{0}\Lambda^{1'}_{0}\Lambda^{0}_{1'} + D^{0}_{1}\Lambda^{1'}_{0}\Lambda^{1}_{1'} + D^{1}_{0}\Lambda^{1'}_{1}\Lambda^{0}_{1'} + D^{1}_{1}\Lambda^{1'}_{1}\Lambda^{1}_{1'}$$

$$D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{2'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{2'} = D^{2}_{2}\Lambda^{2'}_{2}\Lambda^{2}_{2'} \quad \text{y} \quad D^{\mu}_{\nu}\Lambda^{3'}_{\mu}\Lambda^{\nu}_{3'} = D^{3}_{3}\Lambda^{3'}_{3}\Lambda^{3}_{3'}$$

sumando tendremos que

$$\sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu'\mu'} = D^{0}_{0}\left(\left(\Lambda^{0'}_{0}\right)^{2} + \left(\Lambda^{1'}_{0}\right)^{2}\right) + \left(D^{0}_{1} + D^{1}_{0}\right)\Lambda^{0}_{1'}\left(\Lambda^{0}_{0'} + \Lambda^{1'}_{1}\right) +$$
$$+ D^{1}_{1}\left(\left(\Lambda^{0'}_{1}\right)^{2} + \left(\Lambda^{1}_{1'}\right)^{2}\right) + D^{2}_{2}\Lambda^{2'}_{2}\Lambda^{2}_{2'} + D^{3}_{3}\Lambda^{3'}_{3}\Lambda^{3}_{3'}$$

para que finalmente

$$\sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu'\mu'} = \left(D^{0}_{0} + D^{1}_{1}\right)\left(\gamma^{2} + (\gamma\beta)^{2}\right) + \left(D^{0}_{1} + D^{1}_{0}\right)(-\gamma\beta)(2\gamma) + D^{2}_{2} + D^{3}_{3} \neq \sum_{\mu=0}^{3} D^{\mu\mu}$$

d) Si esa misma vara, en el plano xy del sistema o la inclinamos un ángulo θ en sentido horario respecto al eje x. ¿ cuál será la expresión para el ángulo de inclinación medido desde el sistema o'? (3 puntos)
Tendremos entonces que

$$x^{\mu}_{b} = \begin{pmatrix} x^{0}_{b} \\ x^{1}_{b} \\ x^{2}_{b} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x^{\mu}_{a} = \begin{pmatrix} x^{0}_{a} \\ x^{1}_{a} \\ x^{2}_{a} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \theta = \arctan\left(\frac{x^{2}_{b} - x^{2}_{a}}{x^{1}_{b} - x^{1}_{a}}\right)$$

ahora

$$x^{\alpha'}_{b} = \Lambda^{\alpha'}_{\lambda}x^{\lambda}_{b} \Rightarrow x^{\alpha'}_{b} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x^{0}_{b} - \gamma\beta x^{1}_{b} \\ -\gamma\beta x^{0}_{b} + \gamma x^{1}_{b} \\ x^{2}_{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{\alpha'}_{a} = \Lambda^{\alpha'}_{\lambda}x^{\lambda}_{a} \Rightarrow x^{\alpha'}_{a} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^{0}_{a} \\ x^{1}_{a} \\ x^{2}_{a} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x^{0}_{a} - \gamma\beta x^{1}_{a} \\ -\gamma\beta x^{0}_{a} + \gamma x^{1}_{a} \\ x^{2}_{a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\theta' = \arctan\left(\frac{x^{2'}_{b} - x^{2'}_{a}}{x^{1'}_{b} - x^{1'}_{a}}\right) = \arctan\left(\frac{x^{2}_{b} - x^{2}_{a}}{\left(-\gamma\beta x^{0}_{b} + \gamma x^{1}_{b}\right) - \left(-\gamma\beta x^{0}_{a} + \gamma x^{1}_{a}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{x^{2}_{b} - x^{2}_{a}}{\gamma\left(x^{1}_{b} - x^{1}_{a}\right)}\right)$$

finalmente

$$\tan\theta' = \frac{1}{\gamma}\tan\theta$$

3. Muestre que un tensor de segundo rango antisimétri co, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, en un sistema de coordenadas x^{α} lo será también en todos los sistemas de coordenadas $\tilde{x}^{\beta}$. (2 ptos)
Un tensor $F_{\mu\nu}$ transformará como

$$\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\, x^{\mu}}{\partial\, \tilde{x}^{\alpha}}\frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, \tilde{x}^{\beta}}F_{\mu\nu} = \frac{\partial\, x^{\mu}}{\partial\, \tilde{x}^{\alpha}}\frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, \tilde{x}^{\beta}}\left(-F_{\nu\mu}\right) = -\frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, \tilde{x}^{\beta}}\frac{\partial\, x^{\mu}}{\partial\, \tilde{x}^{\alpha}}F_{\nu\mu} = -\tilde{F}_{\beta\alpha}$$

porque los índices son mudos