Métodos Matemáticos 1
Tarea 2
Vectores Cartesianos 2
Fecha de entrega 29 Marzo 2004

1. Datos los vectores en $\Re^3$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d}$ y si denotamos el producto mixto $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ por $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ entonces, demuestre las siguientes igualdades vectoriales

    a) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\, \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c}$

    b) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

    c) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left\{\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times (\vec{c} \times \vec{a})\right\} = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^2$

    d) $\left\{\vec{d} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right\} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

    e) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} - \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \vec{a}$

2. Compruebe que

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{escalar} & . & \text{vector} & = & \text{vector} \\
\text{escalar} & . & \text{pseudovector} & = & \text{pseudovector} \\
\text{vector} & \cdot & \text{vector} & = & \text{escalar} \\
\text{vector} & \cdot & \text{pseudovector} & = & \text{pseudoescalar} \\
\text{pseudovector} & \cdot & \text{pseudovector} & = & \text{escalar} \\
\text{vector} & \times & \text{vector} & = & \text{pseudovector} \\
\text{vector} & \times & \text{pseudovector} & = & \text{vector} \\
\text{pseudovector} & \times & \text{pseudovector} & = & \text{pseudovector}
\end{array}
$$

Ayuda: para demostrarlo primero compruebe que, dados tres vectores genéricos en $\Re^3$, $\vec{a}, \vec{b}$, y $\vec{c}$, las siguientes cantidades representan cada uno de esos objetos

$$
\begin{array}{ccc}
\text{vector} & \leftrightarrows & \vec{a} \\
\text{pseudovector} & \leftrightarrows & \vec{a} \times \vec{b} \\
\text{escalar} & \leftrightarrows & \vec{a} \cdot \vec{b} \\
\text{pseudoescalar} & \leftrightarrows & \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}
\end{array}
$$

Seguidamente verifique la primera de las tablas propuestas. Puede apoyarse en los resultados de la primera pregunta.

3. Si denotamos el vector $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$ y $\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{\mathbf{k}}$ de tal modo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

demuestre

a) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) - \nabla^2\ \vec{a}$

b) $\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right)$

c) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$

d) $\vec{\nabla} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}\right) + \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b}$

4. Mediante el álgebra vectorial

a) Hallar los ángulos que forma la recta que une a los puntos $P_1 \longleftrightarrow (-3,-2,1)$ y $P_2 \longleftrightarrow (0,-3,4)$ con cada uno de los ejes coordenados

b) Hallar la distancia del punto $P \longleftrightarrow (-1,2,0)$ al plano $x - 3y + 2z = 1$

c) Hallar el ángulo entre los siguientes planos $3x + 2y - z = 0$ y $2x + y - 5z = 1$

d) Hallar el ángulo entre la recta que une a los puntos $P_1 \longleftrightarrow (-1,2,0)$ y $P_2 \longleftrightarrow (2,-3,4)$ con el plano $3x - 2y + z = 5$

e) Hallar la distancia más corta del punto $P \longleftrightarrow (6,-4,4)$ a la recta que une a los puntos $P_1 \longleftrightarrow (2,1,2)$ y $P_2 \longleftrightarrow (3,-1,4)$

5. Muestre que $\vec{a}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = |\vec{a}(t)| \frac{\mathrm{d}|\vec{a}(t)|}{\mathrm{d}t}$ por lo cual si $|\vec{a}(t)| = cte \Rightarrow \vec{a}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} = 0$

6. Muestre que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\vec{a}(t) \cdot \left(\vec{b}(t) \times \vec{c}(t)\right)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{a}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\vec{b}(t) \times \vec{c}(t)\right) + \vec{a}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{b}(t)}{\mathrm{d}t} \times \vec{c}(t) + \vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) \times \frac{\mathrm{d}\vec{c}(t)}{\mathrm{d}t}$$

7. Una partícula sigue una trayectoria representada por el radio vector posición

$$\vec{r}(t) = \left(t^3 - 4t\right)\ \hat{\imath} + \left(t^2 + 4t\right)\ \hat{\jmath} + \left(8t^2 - 3t^3\right)\ \hat{\mathbf{k}}$$

a) Encuentre los vectores aceleración tangencial y radial

b) Para $t = 3sg$ encuenre las magnitudes para el vector aceleración, el vector aceleració radial y el vector aceleración tangencial