Métodos Matemáticos de la Física 1
Examen Parcial
Espacios Lineales
Noviembre 2005

Nombre____

Consideramos el espacio vectorial de polinomios, , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[-1,1]$ según el caso

1. ¿ Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathcal{P}^3$ son linealmente independientes ? (3 ptos.) Explique por qué
   Ninguno, todos son linealmente dependientes

   a) $|\mathbf{x1}\rangle = 1; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x-1; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^2; \quad |\mathbf{x4}\rangle = x^2+2x+1;$
   Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = 3|\mathbf{x1}\rangle + 2|\mathbf{x2}\rangle + |\mathbf{x3}\rangle$

   b) $|\mathbf{x1}\rangle = 2x; \quad |\mathbf{x2}\rangle = x^2+1; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x+1; \quad |\mathbf{x4}\rangle = x^2-1;$
   Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = |\mathbf{x1}\rangle + |\mathbf{x2}\rangle - 2|\mathbf{x3}\rangle$

   c) $|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1); \quad |\mathbf{x2}\rangle = x; \quad |\mathbf{x3}\rangle = x^3; \quad |\mathbf{x4}\rangle = 2x^3-x^2;$
   Linealmente dependiente ya que siempre podremos expresar $|\mathbf{x4}\rangle = -|\mathbf{x1}\rangle + |\mathbf{x2}\rangle + 2|\mathbf{x3}\rangle$

2. Considerando las siguientes definiciones de producto interior en $\mathcal{P}^n$:definidos en el intervalo $[0,1]$ o en el intervalo $[-1,1]$ según el caso

$$\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

En $\mathcal{P}^3$ encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores (4ptos)

$$|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1); \quad |\mathbf{x2}\rangle = x;$$

En general la definición de distancia es

$$d\left(|\mathbf{x1}\rangle, |\mathbf{x2}\rangle\right) = \sqrt{\langle \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\rangle}$$

por lo tanto para $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$ *la distancia será*

$$\sqrt{\langle \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x(x-1) - x\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{1}{15}\sqrt{690}$$

y para $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$ *ser'a*

$$\sqrt{\langle \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2} - \mathbf{x1}\rangle} = \sqrt{\int_{0}^{1} \left(x(x-1) - x\right)^2 \mathrm{d}x} = \frac{2}{15}\sqrt{30}$$

los ángulos serán

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x1}\ | \mathbf{x2}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x1}\ | \mathbf{x1}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{x2}\ | \mathbf{x2}\rangle}}\right)$$

para $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x1} \,|\mathbf{x2}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x1} \,|\mathbf{x1}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{x2} \,|\mathbf{x2}\rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(x(x-1)\right)(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(x(x-1)\right)^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{-1}^{1}(x)^2\,\mathrm{d}x}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{15}\sqrt{6}\right) = 2{,}4825 \text{ rad}$$

para $\langle \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x1} \,|\mathbf{x2}\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x1} \,|\mathbf{x1}\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{x2} \,|\mathbf{x2}\rangle}}\right) = \arccos\left(\frac{\int_{0}^{1}\left(x(x-1)\right)(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_{0}^{1}\left(x(x-1)\right)^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_{0}^{1}(x)^2\,\mathrm{d}x}}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{15}\sqrt{2}\right) = 2{,}4825 \text{ rad}$$

¡ el mismo ángulo !

3. Una de las posibles bases de $\mathcal{P}^n$ será el conjunto $\left\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\right\}$ con el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{f} |\, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.

   a) Encuentre la base ortonormal que expande el subespacio $\mathcal{S}^3$ de los polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq 3$. (4 ptos.)
   $\mathcal{S}^3$ tendrá como vectores linealmente independientes $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ para encontrar la base ortonormal utilizamos el método de Gram Smith con lo cual tendremos que

$$|\mathbf{u}_n\rangle \equiv |\mathbf{v}_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{v}_n \,|\mathbf{u}_i\rangle}{\langle \mathbf{u}_i \,|\mathbf{u}_i\rangle} |\mathbf{u}_i\rangle$$

esto es

$$|\mathbf{u}_1\rangle = \frac{|\mathbf{v}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}x}} = 1$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle = \frac{|\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x - \frac{\int_0^1 x\mathrm{d}x}{\int_0^1 \mathrm{d}x}}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x}} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle = \frac{|\mathbf{v}_3\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_3 \,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle}|\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_3\rangle}} = \frac{x^2 - \frac{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 \mathrm{d}x} - \frac{\int_0^1 x^2\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x}{\int_0^1\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)^2\mathrm{d}x}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_3\rangle}}$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle = \frac{x^2 + \frac{1}{6} - x}{\sqrt{\int_0^1\left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right)^2\mathrm{d}x}} = 6\left(x^2 + \frac{1}{6} - x\right)\sqrt{5}$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle = \frac{|\mathbf{v}_4\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle}|\mathbf{u}_1\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 \,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle}|\mathbf{u}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_4 \,|\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_3\rangle}|\mathbf{u}_2\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 \,|\mathbf{u}_4\rangle}} =$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle = \frac{x^3 - \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 x^3 \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\mathrm{d}x\right)\left(\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 \,|\mathbf{u}_4\rangle}}$$

$$- \frac{\left(\int_0^1 x^3 \left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right)\mathrm{d}x\right)\left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 \,|\mathbf{u}_4\rangle}}$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle = \frac{\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)}{\sqrt{\int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)^2 \mathrm{d}x}} = 20\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{7}$$

b) Encuentre las componentes del polinomio $g(x) = 5 + 3x^2 - x^3 + x^5$ proyectado sobre esa base ortonormal que expande a $\mathcal{S}^3$(3 ptos.)
Las componentes de la proyección de $g(x)$ en $\mathcal{S}^3$ *serían*

$$c^1 = \langle \mathbf{g} \,|\mathbf{u}_1\rangle = \int_0^1 u_1(x)\; g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1)\;\left(5+3x^2-x^3+x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{71}{12}$$

$$c^2 = \langle \mathbf{g} \,|\mathbf{u}_2\rangle = \int_0^1 u_2(x)\; g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right)\;\left(5+3x^2-x^3+x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{197}{420}\sqrt{3}$$

$$c^3 = \langle \mathbf{g} \,|\mathbf{u}_3\rangle = \int_0^1 u_3(x)\; g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right)\;\left(5+3x^2-x^3+x^5\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{23}{210}\sqrt{5}$$

$$c^4 = \langle \mathbf{g} \,|\mathbf{u}_4\rangle = \int_0^1 u_4(x)\; g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(20\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{7}\right)\;\left(5+3x^2-x^3+x^5\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{315}\sqrt{7}$$

con lo cual

$$|\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3} = \frac{71}{12}|\mathbf{u}_1\rangle + \frac{197}{420}\sqrt{3}\,|\mathbf{u}_2\rangle + \frac{23}{210}\sqrt{5}\,|\mathbf{u}_3\rangle + \frac{4}{315}\sqrt{7}\,|\mathbf{u}_4\rangle$$

y la norma será

$$\left\||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\right\|^2 = \left(\frac{71}{12}\right)^2 + \left(\frac{197}{420}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{23}{210}\sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{315}\sqrt{7}\right)^2 = \frac{1{,}418{,}047}{39{,}690} \cong 35{,}728$$

para que, finalmente la proyección del polinomio en $\mathcal{S}^3$ será

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{71}{12} + \frac{197}{420}\sqrt{3}\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\right) + \frac{23}{210}\sqrt{5}\left(6\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right)\sqrt{5}\right) + \left(20\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)\sqrt{7}\right)$$

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{71}{12} + \frac{197}{70}\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{23}{42}\left(x^2+\frac{1}{6}-x\right) + 20\sqrt{7}\left(x^3 - \frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2\right)$$

es decir

$$g_{\mathcal{S}^3}(x) = \frac{5797}{1260} - \sqrt{7} + \left(\frac{34}{15} + 12\sqrt{7}\right)x + \left(\frac{23}{42} - 30\sqrt{7}\right)x^2 + 20\sqrt{7}x^3$$

c) Encuentre la mínima distancia desde el subespacio $\mathcal{S}^3$ al polinomio $g(x)$ (3ptos)
La distancia mínima será la norma del vector ortogonal a $\mathcal{S}^3$ *tal que*

$$|\mathbf{g}\rangle = |\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3} + |\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3} \qquad \text{donde } |\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3} \in \mathcal{S}^3$$

y $|\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}$ *es un vector de su complemento ortogonal. Por lo tanto el Teorema de Pitágoras nos dice que*

$$\||\mathbf{g}\rangle\|^2 = \||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\|^2 + \||\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}\|^2$$

con lo cual tendremos que la mínima distancia será

$$\||\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}\| = \sqrt{\||\mathbf{g}\rangle\|^2 - \||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\|^2}$$

$$\||\mathbf{g}\rangle\|^2 = \int_0^1 \left(5 + 3x^2 - x^3 + x^5\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{495193}{13860}$$

$$\||\mathbf{g}\rangle_{\mathcal{S}^3}\|^2 = \frac{1418047}{39690}$$

con lo cual

$$\||\mathbf{g}\rangle_{\perp\mathcal{S}^3}\| = \sqrt{\frac{495193}{13860} - \frac{1418047}{39690}} \approx 1{,}196\,5 \times 10^{-2}$$

4. Sea $f(x) = e^{2x}$ una función perteneciente al espacio lineal de funciones continua y continuamente diferenciables, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, en el cual el producto interno viene definido por $\langle \mathbf{q}|\mathbf{p}\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$. Encuentre el polinomio lineal más cercano a la función $f(x)$. (3ptos)

En el subespacio S^1 *de polinomios lineales, los vectores base son* $\{1, x\}$ *Es una base ortogonal pero no es normal, con lo cual la normalizamos*

$$|\mathbf{u}_1\rangle = \frac{|\mathbf{v}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle = \frac{|\mathbf{v}_2\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \, |\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \, |\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x - \frac{\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x}}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x}} = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

y *la proyección ortogonal de esta función será*

$$c^0 = \int_{-1}^{1} e^{2x} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-e^2 + e^{-2}\right) \qquad \text{y} \qquad c^1 = \int_{-1}^{1} \left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{6}}{8}\left(e^2 + 3e^{-2}\right)$$

con lo cual la función lineal será

$$\mathcal{P}^n = \left(\frac{\sqrt{6}}{8}\left(e^2 + 3e^{-2}\right)\right) x - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-e^2 + e^{-2}\right)$$