Métodos Matemáticos 1
Tarea 2
Vectores Cartesianos 1
Fecha de entrega 14 octubre 2005

1. Recordamos que podemos representar un vector gen'erico de $\Re^3$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} = a^i\hat{I}_i = a^1\hat{I}_1 + a^2\hat{I}_2 + a^3\hat{I}_3 \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \hat{I}_1 = \hat{\imath}, \quad \hat{I}_2 = \hat{\jmath} \quad \hat{I}_3 = \hat{k} \\ \\ a^1 = a_x \quad a^2 = a_y \quad a^3 = a_z \end{array} \right.$$

y el operador nabla $\vec{\nabla}$ ser'a un "vector"

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} = \hat{I}_1\frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{I}_2\frac{\partial}{\partial x^2} + \hat{I}_3\frac{\partial}{\partial x^3} = \hat{I}^i\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{con} \qquad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$$

donde el 'indice $i = 1, 2, 3$.
Entonces, dados los vectores en $\Re^3$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{d}$ y si denotamos el producto mixto $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$ por $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, demuestre las siguientes igualdades vectoriales

a) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left\{\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times (\vec{c} \times \vec{a})\right\} = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]^2$

b) $\left\{\vec{d} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right\} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

c) $\vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}(\vec{a} \cdot \vec{a})\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a}$

d) $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) - \vec{a} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right)$

e) $\left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{c} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right) - \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \cdot \vec{\nabla}\right)\right)\vec{a}$

2. Dado $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ el radio vector posici'on de una part'icula de carga q y masa m Su ecuaci'on de movimiento ser'a

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\left(\vec{E} + \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B}\right)$$

cuando la part'icula est'a inmersa en una regi'on con donde opera un campo el'ectrico $\vec{E}$ y un campo magn'etico $\vec{B}$. Considere el caso en el cual los campos el'ectricos y magn'eticos son constantes y vienen representados por

$$\vec{E} = E_0\,\hat{\imath} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = B_0\,\hat{\jmath}$$

y suponga que la part'icula parte con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_0\,\hat{k}$. Entonces, muestre que

a) Si $v_0 = \dfrac{E_0}{B_0}$ la part'icula continua con un movimiento rectil'ineo uniforme;

b) Si $v_0 = 0$, la part'icula tendr'a

$$\vec{r} = \frac{mE_0}{qB_0^2}\,(1 - \cos\theta\,(t))\;\hat{\imath} + (\theta\,(t) - \operatorname{sen}\theta\,(t))\;\hat{k}$$

como radiovector posici'on. ¿ Puede relacionar $\theta = \theta\,(t)$?

c) la distancia total recorrida por la part'icula en un tiempo t es

$$dist = \frac{E_0}{B_0}\int_0^t \mathrm{d}\tau \,\left(\mathrm{sen}\left(\frac{qB_0}{2m}\tau\right)\right)$$

3. Las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo en el vac'io (en ausencia de cargas elect'ecticas, corrientes, medios diel'ectricos o magn'eticos) se escriben como

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$$

Consiere una funci'on escalar ϕ y una vectorial $\vec{A}$ de tal forma que est'en relacionadas con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ de la forma $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

a) Exprese, de la manera m'as simple posible las ecuaciones de Maxwell en t'ermino de los potenciales escalares ϕ y vectoriales $\vec{A}$

b) Considere el llamado calibre de Lorentz. Es decir, que los potenciales escalares ϕ y vectoriales $\vec{A}$ cumplen, adicionalmente con la ecuaci'on

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

y muestre que ambos potenciales (escalar y vectorial) cumplen la la ecuaci'on de onda. Esto es

$$\vec{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$
$$\backslash$$
$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$