Métodos Matemáticos 1
Tarea 3
Derivación e Integración de Vectores y Números Complejos
Octubre 2005

1. Muestre que partícula que se mueve siguiendo la siguiente trayectoria

$$\vec{r}\,(t) = a\cos(\omega t)\,\hat{\imath} + b\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,\hat{\jmath}$$

con a, ω y b constantes

  a) Muestre que la partícula describe una trayectoria elíptica con $a > b$ los dos semiejes.

  b) Encuentre su velocidad aerolar

  c) Muestre que la suma de dos vectores complejos

$$\vec{r}_1\,(t) = ae^{i\omega t} \qquad \text{y} \qquad \vec{r}_2\,(t) = be^{i\omega t} \qquad \text{con} \quad a > b$$

  describen también la misma trayectoria elíptica

2. Dada una fuerza $\vec{F} = (2y + 3x)\,\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + (yz - x)\,\hat{\mathsf{k}}$. Evalúe la integral del línea $\int_c \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ a lo largo de las siguientes curvas:

  a) $x = 2t^3, y = t, z = t^3$ con $t = 0 \to t = 1$

  b) segmentos de líneas rectas con el siguiente recorrido
  $(0,0,0) \to (0,0,1)$ seguidamente $(0,0,1) \to (0,1,1)$ para finalizar en $(0,1,1) \to (2,1,1)$

  c) la línea recta que una los puntos $(0,0,0) \to (2,1,1)$

3. Dos números complejos $a = \alpha + i\beta$ y $b = \mu + i\nu$ pueden ser representados como vectores en el plano de forma que $\vec{a} = \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}$ y $\vec{b} = \mu\hat{\imath} + \nu\hat{\jmath}$. Muestre que

$$a^* b = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\hat{\mathsf{k}} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

4. Dado un polinomio de la forma $f(z) = z^5 - 6z^4 + 15z^3 - 34z^2 + 36z - 48$

  a) Muestre que la ecuación $f(z) = 0$ tiene raíces de la forma $z = \lambda i$. Identifique λ y factorice $f(z)$.

  b) Muestre que el factor cúbico de $f(z)$ puede ser escrito como $(z + a)^3 + b$, y utilizando ese hecho, encuentre las raíces de la ecuación $f(z) = 0$.

5. Aunque no lo parezcan, las funciones hiperbólicas son las análogas, complejas, de las funciones trigonométricas. Las definimos de la siguiente manera

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \equiv \cos(ix)\,; \qquad \mathrm{senh}\, x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \equiv -i\,\mathrm{sen}\,(ix)$$

donde $x \in \mathbb{R}$. Habida cuenta de estas definiciones y si $z = x + iy$, entonces

  a)

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{\mathrm{senh}\, x + i\,\mathrm{sen}\, y}{\cosh x + \cos y}$$

  b)

$$\arccos z = -i\ln\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$