

**Métodos Matemáticos 1**  
**Tarea 5**  
**Espacios Lineales y Tensores**  
**Noviembre 2005**

Los vectores en  $\mathbb{R}^3$  en coordenada cartesianas los definimos como  $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$  y definimos una “tabla de multiplicación” entre ellos de la forma  $\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i$  con  $i, j = 1, 2, 3$ , esto es:

$$\begin{array}{c|ccc} \langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle & \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \hline \hat{i} & 1 & 0 & 0 \\ \hat{j} & 0 & 1 & 0 \\ \hat{k} & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3$$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir:

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 + a^i |\mathbf{q}_i\rangle = a_0 + a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

con  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  y donde las  $a^i$  con  $i = 1, 2, 3$  son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la  $a^0$ , también números reales, se llama componente escalar<sup>1</sup>. Los cuaterniones fueron inventados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton<sup>2</sup> a mediados del siglo XIX. Por decirlo de alguna manera, son híbridos. o generalizaciones a un plano hipercomplejo. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Basándonos en este esquema podemos definir la “tabla de multiplicación” para los cuaterniones cartesianos como

$$\begin{array}{c|cccc} |\mathbf{q}'_i\rangle \odot |\mathbf{q}_j\rangle & \mathbf{1} & |\mathbf{q}_1\rangle & |\mathbf{q}_2\rangle & |\mathbf{q}_3\rangle \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & |\mathbf{q}_1\rangle & |\mathbf{q}_2\rangle & |\mathbf{q}_3\rangle \\ \hline |\mathbf{q}'_1\rangle & |\mathbf{q}_1\rangle & -\mathbf{1} & |\mathbf{q}_3\rangle & -|\mathbf{q}_2\rangle \\ \hline |\mathbf{q}'_2\rangle & |\mathbf{q}_2\rangle & -|\mathbf{q}_3\rangle & -\mathbf{1} & |\mathbf{q}_1\rangle \\ \hline |\mathbf{q}'_3\rangle & |\mathbf{q}_3\rangle & |\mathbf{q}_2\rangle & -|\mathbf{q}_1\rangle & -\mathbf{1} \end{array}$$

Nótese que por el hecho que  $|\mathbf{q}_j\rangle \odot |\mathbf{q}_j\rangle = -1 \Rightarrow |\mathbf{q}_1\rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle = |\mathbf{q}_2\rangle \odot |\mathbf{q}_2\rangle = |\mathbf{q}_3\rangle \odot |\mathbf{q}_3\rangle = -1$ , se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión (un número hipercomplejo) donde la parte imaginaria tendría tres dimensiones y no una como es costumbre. Esto es

$$|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 \underbrace{|\mathbf{q}_0\rangle}_1 + a^j |\mathbf{q}_j\rangle = a^0 + \underbrace{a^1 |\mathbf{q}_1\rangle + a^2 |\mathbf{q}_2\rangle + a^3 |\mathbf{q}_3\rangle}_{\text{“parte compleja”}}$$

Siendo consistente con esa visión de generalización de un número complejo, definiremos el conjugado de un cuaternión como  $|\mathbf{b}\rangle^{\mathbf{x}} = b^0 |\mathbf{q}_0\rangle - b^j |\mathbf{q}_j\rangle$  con  $j = 1, 2, 3$ . Es decir, en analogía con los números complejos el conjugado de un cuaternión cambia el signo de su “parte compleja vectorial”. Igualmente, definiremos la suma entre cuaterniones como

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \\ |\mathbf{b}\rangle = b^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathbf{c}\rangle = c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = |\mathbf{a}\rangle + |\mathbf{b}\rangle = (a^\alpha + b^\alpha) |\mathbf{q}_\alpha\rangle \Rightarrow c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)$$

Esto quiere decir que los vectores se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación por un escalar queda definida por  $\alpha |\mathbf{c}\rangle = \alpha c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$  es decir se multiplica el escalar por cada componente.

<sup>1</sup>Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual  $c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^3 c^j |\mathbf{q}_j\rangle$ . Es decir hemos supuesto que  $|\mathbf{q}_0\rangle \equiv 1$ , la unidad en los números reales. Adicionalmente, nótese que los índices griegos  $\alpha, \beta, \dots$  toman los valores  $0, 1, 2, 3$ , mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores  $j, k, l = 1, 2, 3$ .

<sup>2</sup>Para más detalles y de los cuaterniones pueden consultar <http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html>

1. Compruebe si los Cuaterniones,  $|\mathbf{a}\rangle$ , forman un espacio vectorial respecto a una operación esa suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en  $\mathbf{R}^3$  en coordenada cartesianas. ¿ Cuaterniones  $|\mathbf{a}\rangle$  son vectores, pseudovectores o ninguna de las anteriores ? Explique por qué.
2. Dados dos cuaterniones  $|\mathbf{b}\rangle \equiv (b^0, \vec{b})$  y  $|\mathbf{r}\rangle \equiv (r^0, \vec{r})$  entonces, el producto entre cuaterniones  $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle$  podrá representarse como

$$|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle \longleftrightarrow (d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b} \cdot \vec{r}, d^0 \vec{b} + b^0 \vec{r} + \vec{b} \times \vec{r})$$

donde  $\cdot$  y  $\times$  corresponden con los productos escalares y vectoriales tridimensionales. de siempre, respectivamente.

Más aún, ahora con índices, dados  $|\mathbf{b}\rangle = b^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$  y  $|\mathbf{r}\rangle = r^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$ , compruebe si su producto de  $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle$  puede ser siempre escrito de la forma

$$|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{b}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle = a |\mathbf{q}_0\rangle + \tilde{S}^{ij} \delta_i^0 |\mathbf{q}_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |\mathbf{q}_i\rangle$$

donde  $a$  representa un escalar;  $S^{(ij)} \delta_i^0$  tres cantidades (recuerde que los índices latinos toman los siguiente valores  $j, k, l = 1, 2, 3$ .) y donde  $S^{(ij)}$  indica  $S^{ji} = S^{ij}$  que la cantidad  $S^{ij}$  es simétrica y por lo tanto  $(S^{ij} \delta_i^0 + S^{ji} \delta_i^0) |\mathbf{q}_j\rangle$  Mientras  $A^{[jk]i}$  representa un conjunto de objetos antisimétricos en  $j$  y  $k$ :  $A^{[jk]i} \rightarrow A^{jki} = -A^{kji} \rightarrow (A^{jki} b_j c_k - A^{kji} b_j c_k) |\mathbf{q}_i\rangle$ . Identifique las cantidades  $a, S^{(ij)}$  y  $A^{[jk]i}$  en término de las componentes de los cuaterniones

¿ el producto de cuaterniones  $|\mathbf{d}\rangle = |\mathbf{a}\rangle \odot |\mathbf{r}\rangle$  será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores ?. Explique por qué.

3. Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas  $2 \times 2$  del tipo

$$|\mathbf{b}\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

donde  $z, w$  son números complejos y  $\bar{w}$  y  $\bar{z}$  sus complejos conjugados

4. Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es, la matriz unitaria  $4 \times 4$  y

$$|\mathbf{q}_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{q}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{q}_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}\rangle^{\mathbf{x}} \odot |\mathbf{b}\rangle$$

6. Modifique un poco la definición anterior de tal forma que se tenga la

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2} [\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle - |\mathbf{q}_1\rangle \odot \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle]$$

y compruebe si esta definición compleja del producto interno cumple con todas las propiedades. Nótese que un cuaternión de la forma  $|\mathbf{f}\rangle = f^0 + f^1 |\mathbf{q}_1\rangle$  es un número complejo convencional.

7. Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones

$$n(|\mathbf{b}\rangle) = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{|\mathbf{a}\rangle^{\mathfrak{A}} \odot |\mathbf{a}\rangle}$$

8. Compruebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|\mathbf{a}\rangle} = \frac{|\mathbf{a}\rangle^{\mathfrak{A}}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de  $|\mathbf{a}\rangle$  respecto a la multiplicación  $\odot$

9. Compruebe si los Cuaterniones  $|\mathbf{a}\rangle$  forman un grupo respecto a una operación multiplicación  $\odot$ .
10. Los vectores en  $\mathfrak{R}^3$  en coordenada cartesianas,  $|v\rangle$ , pueden ser representados como cuaterniones donde la parte escalar es nula  $v^0 = 0 \rightarrow |v\rangle = v^j |\mathbf{q}_j\rangle$ . Compruebe si el siguiente producto conserva la norma

$$|v'\rangle = \overline{|\mathbf{a}\rangle} \odot |v\rangle \odot |\mathbf{a}\rangle$$

$$\text{Estos es } \|\mathbf{v}'\|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \equiv (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$

11. Considere el producto anterior como una transformación. Esto es

$$|v'\rangle = \mathbf{T} |v\rangle \rightarrow |v'\rangle = \overline{|\mathbf{a}\rangle} \odot |v\rangle \odot |\mathbf{a}\rangle$$

Compruebe si esa transformación es lineal

12. Compruebe si se puede construir una definición de producto tensorial tal que

$$|\mathbf{a}(1)\mathbf{b}(2)\rangle = |\mathbf{a}(1)\rangle \otimes |\mathbf{b}(2)\rangle \implies \mathcal{T} \left[ \begin{array}{c} \langle \mathbf{d}(1) | \langle \mathbf{c}(2) | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right] = (\mathbf{d}(1) |\mathbf{a}(1)\rangle) (\mathbf{c}(2) |\mathbf{b}(2)\rangle) \in \mathbf{C}$$

$$\text{donde } (\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \frac{1}{2} [\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle - |\mathbf{q}_1\rangle \odot \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle]$$

13. Encuentre las componentes  $g_{\alpha\beta}$  y  $g^{\alpha\beta}$  si

$$\mathbf{g}[\circ, \circ] \equiv g_{\alpha\beta} \langle \mathbf{q}^\alpha | \otimes \langle \mathbf{q}^\beta | \quad \text{y} \quad \mathbf{g}[\bullet, \bullet] \equiv g^{\alpha\beta} |\mathbf{q}_\alpha\rangle \otimes |\mathbf{q}_\beta\rangle$$

de tal forma que

$$\mathbf{g} \left[ \begin{array}{c} |\mathbf{q}_\gamma\rangle \quad |\mathbf{q}_\delta\rangle \\ \circ \quad \bullet \end{array} \right] = g_{\alpha\beta} [\langle \mathbf{q}^\alpha | \otimes \langle \mathbf{q}^\beta |] [|\mathbf{q}_\gamma\rangle \otimes |\mathbf{q}_\delta\rangle] = g_{\alpha\beta} (\mathbf{q}^\alpha | \mathbf{q}_\gamma) (\mathbf{q}^\beta | \mathbf{q}_\delta)$$

$$\text{donde } (\mathbf{q}^\alpha | \mathbf{q}_\gamma) = \frac{1}{2} [\langle \mathbf{q}^\alpha | \mathbf{q}_\gamma \rangle - |\mathbf{q}_1\rangle \odot \langle \mathbf{q}^\alpha | \mathbf{q}_\gamma \rangle \odot |\mathbf{q}_1\rangle]$$

- a) ¿ Se cumplirá que  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  ? Explique
- b) ¿ Se cumplirá que  $g_{\alpha\beta}$  será la matriz inversa de  $g^{\alpha\beta}$  ? Explique
- c) Encuentre los valores para  $\Lambda_\nu^\mu = g^{\mu\beta} g_{\beta\nu}$
- d) ¿ Se cumplirá que, dado  $|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle$ , entonces  $a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta$  ? Explique
- e) ¿  $g_{\alpha\beta}$  podrá ser considerado un tensor métrico ? Explique