Formulario de Métodos Matemáticos 1
Espacios Vectoriales Lineales 5
Transformaciones Lineales*

L. A. Núñez**
Centro de Física Fundamental,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela and
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,
(CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela

Enero 2005 α 1.0

Índice

---

*ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los líbros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.

**e-mail: `nunez@ula.ve` Web: `http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/`

1. Operadores Lineales

Definiremos como operador lineal (o transformaciones lineales) a una operación que asocia un vector $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que respeta la linealidad, es decir esta función de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ cumple con

$$\left|\mathbf{v}'\right\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle \qquad \ni \quad \mathbf{A}\left[\alpha\ |\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ |\mathbf{v}_2\rangle\right] = \alpha\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_2\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle\,, |\mathbf{v_1}\rangle \ \text{y} \ |\mathbf{v}_2\rangle \in \mathbf{V}_1$$

Sencillamente algo que actúe sobre una suma de vectores y que sea equivalente a la suma de sus actuaciones sobre los vectores suma.

Ejemplos

- Las siguientes transformaciones

  $$\left|\mathbf{x}'\right\rangle = \mathbf{T}\,|\mathbf{x}\rangle \rightarrow \qquad \left(x', y', z'\right) = \mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\}$$

  claramente son lineales

  - $\mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\} = (x, 2y, 3z) \rightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\left\{a\,(x, y, z) + b\,(m, n, l)\right\} &= a\mathbf{T}\left\{(x, y, z)\right\} + b\mathbf{T}\left\{(m, n, l)\right\} \\
\mathbf{T}\left\{(ax + bm, ay + bn, az + bl)\right\} &= a\,(x, 2y, 3z) + b\,(m, 2n, 3l) \\
(ax + bm, 2\,[ay + bn]\,, 3\,[az + bl]) &= (ax + bm, 2\,[ay + bn]\,, 3\,[az + bl])
\end{aligned}$$

- $\mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (z,y,x) \rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\{a(x,y,z)+b(m,n,l)\} &= a\mathbf{T}\{(x,y,z)\}+b\mathbf{T}\{(m,n,l)\} \\ \mathbf{T}\{(ax+bm, ay+bn, az+bl)\} &= a(z,y,x)+b(l,n,m) \\ (az+bl, ay+bn, ax+bm) &= (az+bl, ay+bn, ax+bm) \end{aligned}$$

- Cosas tan sencillas como multiplicación por un escalar es una transformación (u operador) lineal $\mathbf{T}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{V}$ tal que
$$\mathbf{T}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left|\mathbf{v}'\right\rangle = \alpha\left|\mathbf{v}\right\rangle$$
Claramente,
$$\mathbf{T}\left[a\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] = a\mathbf{T}\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\mathbf{T}\left|\mathbf{w}\right\rangle = a\alpha\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\alpha\left|\mathbf{w}\right\rangle$$
Obviamente, si $\alpha = 1$ tenemos la transformación identidad que transforma todo vector en sí mismo; si $\alpha = 0$ tendremos la transformación cero, vale decir que lleva a todo $\left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}$ a al elemento cero $\left|\mathbf{0}\right\rangle$

- La definición de producto interno también puede ser vista como una transformación (operador) lineal $\mathbf{T}:\mathbf{V}\rightarrow\mathbf{R}$
$$\mathbf{T}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \alpha \rightleftharpoons \left\langle \mathbf{a} \left|\mathbf{v}\right\rangle\right. \equiv \alpha$$
Otra vez:
$$\mathbf{T}\left[a\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] = \left\langle \mathbf{a}\right|\left[a\left|\mathbf{v}\right\rangle + b\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] = a\left\langle \mathbf{a}\left|\mathbf{v}\right\rangle\right. + b\left\langle \mathbf{a}\left|\mathbf{w}\right\rangle\right.$$
por lo tanto es lineal. Esto implica que también la proyección de un determinado $\left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}$ sobre un subespacio $\mathbf{S}$ es un operador lineal, y lo denotaremos como
$$\left[\left|\mathbf{s}\right\rangle\left\langle\mathbf{s}\right|\right]\ \left|\mathbf{v}\right\rangle = \left\langle \mathbf{s}\left|\mathbf{v}\right\rangle\right.\left|\mathbf{s}\right\rangle = \left|\mathbf{v}_s\right\rangle \qquad \text{con } \left|\mathbf{s}\right\rangle \text{ y } \left|\mathbf{v}_s\right\rangle \in \mathbf{S}$$
esta idea se extiende fácil si para un proyector $\mathbf{T}:\mathbf{V}_m\rightarrow\mathbf{S}_n$ con $m > n$ de tal modo que para un vector $\left|\mathbf{v}\right\rangle \in \mathbf{V}_m$
$$\mathbf{P}_m\left|\mathbf{v}\right\rangle \equiv \left(\left|\mathbf{u}_i\right\rangle\left\langle\mathbf{u}^i\right|_m\right)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left\langle\mathbf{u}^i\left|\mathbf{v}\right\rangle\right._m\left|\mathbf{u}_i\right\rangle = \left|\mathbf{v}_m\right\rangle$$
con $\{\left\langle\mathbf{u}_i\right|\}$ base de $\mathbf{S}_n$.Es claro que estamos utilizando la convención de Einstein para la suma de Índices

- Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales. Esto es, considere una transformación lineal $\mathbf{T}:\mathbf{V}_n\rightarrow\mathbf{V}_m$ Por lo tanto asociaremos
$$\left|\mathbf{y}\right\rangle = \mathbf{T}\left|\mathbf{x}\right\rangle \rightarrow \qquad \left(y^1, y^2, y^3, \cdots, y^m\right) = \mathbf{T}\left\{\left(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n\right)\right\}$$
a través de $n \times m$ números, a^i_j, organizados de la siguiente forma
$$y^i = a^i_j\ x^j \qquad \text{con } \left\{ \begin{array}{l} i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{array} \right.$$

una vez más,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}\left[\alpha\left|\mathbf{v}\right\rangle+\beta\left|\mathbf{w}\right\rangle\right] &= \mathbf{T}\left\{\alpha\left(v^{1},v^{2},v^{3},\cdots,v^{n}\right)+\beta\left(w^{1},w^{2},w^{3},\cdots,w^{n}\right)\right\} = \alpha a_{j}^{i}\ v^{j}+\beta a_{j}^{i}\ w^{j} \\
&= \mathbf{T}\left\{\left(\alpha v^{1}+\beta w^{1},\alpha v^{2}+\beta w^{2},\alpha v^{3}+\beta w^{3},\cdots,\alpha v^{n}+\beta w^{n}\right)\right\} \\
&= a_{j}^{i}\ \left(\alpha v+\beta w\right)^{j} = \alpha a_{j}^{i}\ v^{j}+\beta a_{j}^{i}\ w^{j} = a_{j}^{i}\left(\alpha v^{j}+\beta w^{j}\right)
\end{aligned}
$$

Como siempre estamos utilizando la convención de suma de Einstein

- La derivada es un operador lineal. Así podemos representar el operador lineal diferenciación como

$$
\left|\mathbf{v}'\right\rangle = \mathbf{T}\left|\mathbf{v}\right\rangle \rightarrow \qquad \left|\mathbf{y}'\right\rangle = \mathrm{D}\left|\mathbf{y}\right\rangle \rightarrow \qquad \mathrm{D}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \frac{\mathrm{d}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x} \equiv y'\left(x\right)
$$

es claro que

$$
\mathrm{D}\left[\alpha f\left(x\right)+\beta g\left(x\right)\right] = \alpha\mathrm{D}f\left(x\right)+\beta\mathrm{D}g\left(x\right) \equiv \alpha f'\left(x\right)+\beta g'\left(x\right)
$$

igualmente podemos asociar un operador diferencial de cualquier orden a una derivada del mismo orden, esto es

$$
\begin{array}{lcl}
\left|\mathbf{y}''\right\rangle = \mathrm{D}^{2}\left|\mathbf{y}\right\rangle & \rightarrow & \mathrm{D}^{2}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}x^{2}}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^{2}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{2}} \equiv y''\left(x\right) \\
\left|\mathbf{y}'''\right\rangle = \mathrm{D}^{3}\left|\mathbf{y}\right\rangle & \rightarrow & \mathrm{D}^{3}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^{3}}{\mathrm{d}x^{3}}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^{3}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{3}} \equiv y'''\left(x\right) \\
\vdots & & \\
\left|\mathbf{y}^{(n)}\right\rangle = \mathrm{D}^{n}\left|\mathbf{y}\right\rangle & \rightarrow & \mathrm{D}^{n}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}\left[y\left(x\right)\right] \equiv \dfrac{\mathrm{d}^{n}y\left(x\right)}{\mathrm{d}x^{n}} \equiv y^{(n)}\left(x\right)
\end{array}
$$

- Igualmente, cualquier ecuación diferencial lineal es un ejemplo de operador lineal, recordamos el ejemplo del tema de transformadas integrales. Esto es

$$
y''-3\ y'+2\ y = \left(\mathrm{D}^{2}-3\mathrm{D}+2\right)y\left(x\right)
$$

es claro que si $y\left(x\right)=\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)$ la linealidad es evidente

$$
\begin{gathered}
\left(\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)''-3\ \left(\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)'+2\ \left(\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)\right) = \alpha\left(f''-3\ f'+2\ f\right)+g''-3\ g'+2\ g \\
\uparrow\downarrow \\
\left(\mathrm{D}^{2}-3\mathrm{D}+2\right)\left(\alpha f\left(x\right)+g\left(x\right)\right) = \left(\mathrm{D}^{2}-3\mathrm{D}+2\right)\alpha f\left(x\right)+\left(\mathrm{D}^{2}-3\mathrm{D}+2\right)g\left(x\right)
\end{gathered}
$$

- La integral también es un operador lineal

$$
g\left(x\right) = \int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\left\{f(t)\right\}
$$

- Otro ejemplo típico son los operadores de transformaciones integrales

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ \ f(t)\mathrm{d}t \quad \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\{f(t)\}$$

donde $\mathcal{K}(s,t)$ es una función conocida de s y t, denominada el *núcleo* de la transformación. Si a y b son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita.
Así si $f(t) = \alpha f_1(t) + f_2(t)$ con $f_1(t)$ y $f_2(t) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ es obvio que

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ \ [\alpha f_1(t) + f_2(t)]\,\mathrm{d}t \quad \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\{[\alpha f_1(t) + f_2(t)]\} \\
F(s) &= \alpha \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ \ f_1(t)\mathrm{d}t + \int_a^b \mathcal{K}(s,t)\ \ f_2(t)\mathrm{d}t \\
&\Downarrow \\
F(s) &= \alpha F(s_1) + F(s_2) \leftrightarrows \quad \mathbf{T}\{[\alpha f_1(t) + f_2(t)]\} = \alpha \mathbf{T}\{f_1(t)\} + \mathbf{T}\{f_2(t)\}
\end{aligned}$$

Dependiendo de la selección del núcleo y los limites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son:

Nombre	$F(s) = \mathbf{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbf{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^{\infty} \begin{matrix} sen(st) \\ \cos(st) \end{matrix}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \begin{matrix} sen(ts) \\ \cos(ts) \end{matrix}\ F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\ st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\ st} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel	$F(s) = \int_0^{\infty} tJ_n(st) f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^{\infty} sJ_n(ts) F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$F(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} s^{-t}\ F(s)\mathrm{d}s$

1.1. Espacio Vectorial de Operadores Lineales

Un conjunto de operadores lineales $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \cdots\} : \mathbf{V}_1 \to \mathbf{V}_2$ puede constituir un espacio vectorial lineal si se dispone entre ellos de la operación suma y la multiplicación por un escalar. Así, claramente, dado $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \cdots\}$,y definida

$$(\chi \mathbf{A} + \mathbf{B})\,|\mathbf{v}\rangle \equiv \chi \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle + \mathbf{B}\,|\mathbf{v}\rangle \qquad \ni \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\,[\alpha\ \ |\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ \ |\mathbf{v}_2\rangle] = \alpha\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ \mathbf{A}\,|\mathbf{v}_2\rangle \\ \\ \mathbf{B}\,[\alpha\ \ |\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ \ |\mathbf{v}_2\rangle] = \alpha\ \mathbf{B}\,|\mathbf{v_1}\rangle + \beta\ \mathbf{B}\,|\mathbf{v}_2\rangle \end{array} \right.$$

es directo comprobar que

$$
\begin{aligned}
(\chi\mathbf{A}+\mathbf{B})\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right] &= \chi\mathbf{A}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right]+\mathbf{B}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right] \\
&= \chi\left(\alpha\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right)+\alpha\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle \\
&= \chi\left(\alpha\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\alpha\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v_1}\right\rangle\right)+\beta\ \mathbf{A}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle+\beta\ \mathbf{B}\left|\mathbf{v}_2\right\rangle \\
&\Downarrow \\
(\chi\mathbf{A}+\mathbf{B})\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \left|\mathbf{v}_2\right\rangle\right] &= \chi\mathbf{A}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right]+\mathbf{B}\left[\alpha\ \left|\mathbf{v_1}\right\rangle+\beta\ \left|\mathbf{v_2}\right\rangle\right]
\end{aligned}
$$

Igualmente, se cumple que

$$[(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}]=[\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})]$$

con $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ lineales en $\mathbf{V}$

$$
\begin{aligned}
[(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}]\left|\mathbf{v}\right\rangle &= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\left|\mathbf{v}\right\rangle+\mathbf{C}\left|\mathbf{v}\right\rangle \qquad \forall \quad \left|\mathbf{v}\right\rangle\in\mathbf{V}_1 \\
&= \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle+\mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle+\mathbf{C}\left|\mathbf{v}\right\rangle \\
&= \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\left|\mathbf{v}\right\rangle \\
&= [\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})]\left|\mathbf{v}\right\rangle
\end{aligned}
$$

del mismo modo se puede comprobar fácilmente

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$$

Ahora bien, si definimos la transformación cero de $\mathbf{V}_1\rightarrow\mathbf{V}_2$ tal que

$$\left|\mathbf{0}\right\rangle=0\left|\mathbf{v}\right\rangle \qquad \forall \quad \left|\mathbf{v}\right\rangle\in\mathbf{V}_1$$

se le asigna a el vector $\left|\mathbf{0}\right\rangle\in\mathbf{V}_2\ \forall \quad \left|\mathbf{v}\right\rangle\in\mathbf{V}_1$, entonces el operador lineal 0 será el elemento neutro respecto a la suma de operadores. Finalmente, el elemento simétrico queda definido por

$$(-\mathbf{A})\left|\mathbf{v}\right\rangle=-\mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle \qquad \Longrightarrow (\mathbf{A}-\mathbf{A})\left|\mathbf{v}\right\rangle=0\left|\mathbf{v}\right\rangle=\left|\mathbf{0}\right\rangle$$

Con ello queda demostrado que los operadores lineales forman un espacio vectorial el cual de ahora en adelante denominaremos $\mathcal{L}(\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2)$.

1.2. Composición de Operadores Lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se denotará $\mathbf{AB}$ y significará que primero se aplica $\mathbf{B}$ y al resultado se aplica $\mathbf{A}$. Esto es

$$\mathbf{AB}\left|\mathbf{v}\right\rangle=\mathbf{A}\left(\mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle\right)=\mathbf{A}\left|\tilde{\mathbf{v}}\right\rangle=\left|\tilde{\mathbf{v}}'\right\rangle$$

La composición de funciones cumple con las siguientes propiedades

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{AB})\,\mathbf{C}=\mathbf{A}\,(\mathbf{BC})\,; \qquad \alpha\,(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\,\mathbf{B}=\mathbf{A}\,(\alpha\mathbf{B})\,; \\
(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\,\mathbf{B}=\mathbf{A}_1\mathbf{B}+\mathbf{A}_2\mathbf{B}; \qquad \mathbf{A}\,(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{AB}_1+\mathbf{AB}_2
\end{gathered}
$$

Es decir, que la composición de operadores es asociativa y distributiva a la suma y que conmuta respecto a la multiplicación por escalares.

Por otro lado si 1 es el operador Identidad

$$\mathbf{1}\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \Longrightarrow \qquad \mathbf{A1} = \mathbf{1A} = \mathbf{A};$$

En general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$,por lo tanto podemos construir el conmutador de estos operadores como

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} \qquad \ni \quad [\mathbf{AB} - \mathbf{BA}]\,|\mathbf{v}\rangle = \mathbf{AB}\,|\mathbf{v}\rangle - \mathbf{BA}\,|\mathbf{v}\rangle$$

Es inmediato comprobar algunas de las propiedades más útiles de los conmutadores:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},\mathbf{B}] &= -\,[\mathbf{B},\mathbf{A}] \\
[\mathbf{A},(\mathbf{B}+\mathbf{C})] &= [\mathbf{A},\mathbf{B}] + [\mathbf{A},\mathbf{C}] \\
[\mathbf{A},\mathbf{BC}] &= [\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,[\mathbf{A},\mathbf{C}] \\
0 &= [\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]
\end{aligned}$$

Dados dos vectores $|\mathbf{v_1}\rangle$ y $|\mathbf{v}_2\rangle$ definiremos como el elemento de matriz del operador $\mathbf{A}$ al producto interno de dos vectores

$$\langle \mathbf{v}_2|\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v_1}\rangle) \equiv A_{(|\mathbf{v_1}\rangle,|\mathbf{v}_2\rangle)}$$

es claro que $A_{(|\mathbf{v_1}\rangle,|\mathbf{v}_2\rangle)}$ será en general un número complejo.

Ejemplos

- **Potencias de Operadores**: Uno de los ejemplos más útiles en la composición de operadores lo constituyen las potencias de los operadores, las cuales provienen de la aplicación consecutiva de un mismo operador,

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{1}; \qquad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A}; \qquad \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}; \qquad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{AAA}; \qquad \cdots$$

  Es claro que las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números

$$\mathbf{A}^{n+m} = \mathbf{A}^n\mathbf{A}^m; \qquad (\mathbf{A}^n)^m = \mathbf{A}^{nm}$$

  Llamaremos *operadores nilpotentes de grado* n a los operadores $\mathbf{A}^n \neq 0$, del tipo $\mathbf{A}^n\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \;\forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$ al vector nulo, $|\mathbf{0}\rangle \in \mathbf{V}_2$. Es decir un operador que lleva cualquier vector $|\mathbf{v}\rangle$ al elemento neutro de $\mathbf{V}_2$. El ejemplo más emblemático es el operador diferencial

$$\mathbf{D}^n\left|\mathbf{P}^{n-1}\right\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}P_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[a_i x^i\right] = 0$$

  con $\left|\mathbf{P}^{n-1}\right\rangle$ perteneciente al espacio de polinomios de grado $n-1$

- **Operador Ecuaciones Diferenciales.** Si consideramos el espacio de funciones $f(x) \in \mathcal{C}^{\infty}_{[a,b]}$ podemos construir un operador diferencial

$$\left[a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{D} + a_2\mathbf{D}^2 + \cdots + a_n\mathbf{D}^n\right]|\mathbf{f}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \left(a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \cdots + a_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\right)f(x)$$

con $\{a_0, a_1, a_2, \cdots a_n\}$ coeficientes constantes. De este modo

$$\left(\mathbf{D}^2 - 3\mathbf{D} + 2\right)y = (\mathbf{D} - 1)(\mathbf{D} - 2)\,y \qquad \Longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2\right)y\,(x) = y'' - 3\;y' + 2\;y$$

con $r = 1$ y $r = 2$ las raíces del polinomio característico

- **Funciones de Operadores**: Basándonos en el primero de los ejemplos se puede construir un "polinomio" en potencias de los operadores:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = a_ix^i \quad \Longrightarrow$$
$$P_n(\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle = \left[a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{A} + a_2^2\mathbf{A} + \cdots + a_n^n\mathbf{A}^n\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[a_i\mathbf{A}^i\right]|\mathbf{v}\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$$

Más aún, lo anterior nos permite extender la idea operadores a funciones de operadores, es decir si nos saltamos todos los detalles de convergencia de la serie anterior, los cuales dependerán de los autovalores de $\mathbf{A}$ y de su radio de convergencia, de esta manera, al igual que podemos expresar cualquier función $F\,(z)$ como una serie de potencias de z en un cierto dominio, podremos expresar la función de un operador, $F\,(\mathbf{A})$, como una serie de potencias del operador $\mathbf{A}$ esto es

$$F\,(z) = a_ix^i \quad \leftrightarrows \quad F\,(\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle = \left[a_i\mathbf{A}^i\right]|\mathbf{v}\rangle$$

Así, por ejemplo, podemos expresar

$$e^{\mathbf{A}}\,|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[\mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\cdots\right]|\mathbf{v}\rangle$$

En este caso hay que hacer una acotación, dado que, en general, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0 \Longrightarrow e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}} \neq e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$ esta afirmación se corrobora de manera inmediata al desarrollar las exponenciales

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}\,|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}^m}{m!}\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\frac{\mathbf{B}^m}{m!}\right]|\mathbf{v}\rangle$$

$$e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}\,|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^m}{m!}\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}^n}{n!}\frac{\mathbf{A}^m}{m!}\right]|\mathbf{v}\rangle$$

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\,|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n}{n!}\right]|\mathbf{v}\rangle$$

sólo en el caso que $[\mathbf{A},\mathbf{B}]=0 \Longrightarrow e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}=e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}=e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, la demostración es inmediata pero requiere expandir y rearreglar las sumatorias arriba expuestas. En general más adelante demostraremos la relación de Glauber

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}=e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$

1.3. Proyectores

La notación de Dirac se hace particularmente conveniente para representar proyectores. Hasta ahora, hemos relacionado un funcional lineal, un *bra* $\langle\mathbf{w}|$ del espacio dual $\mathbf{V}^*$, con un vector *ket* $|\mathbf{v}\rangle$ del espacio vectorial $\mathbf{V}$ a través de su producto interno $\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{v}\rangle\in\mathbf{C}$ el cual es, en general, un número complejo. Si ahora escribimos esta relación entre vectores y formas diferenciales de una manera diferente. Así, la relación entre $\langle\mathbf{w}|$, y $|\mathbf{v}\rangle$ un *ket* $|\mathbf{\Psi}\rangle$ o un *bra* $\langle\mathbf{\Phi}|$ arbitrarios serán

$$|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}| \qquad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{\Psi}\rangle \\ \\ \langle\mathbf{\Phi}\,|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}| \end{array} \right.$$

La primera será la multiplicación del vector $|\mathbf{v}\rangle$ por el número complejo $\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{\Psi}\rangle$,mientras que la segunda relación será la multiplicación de la forma $\langle\mathbf{w}|$ por el complejo $\langle\mathbf{\Phi}\,|\mathbf{v}\rangle$. Es imperioso señalar que el orden en la escritura de los vectores y formas es crítico, sólo los números complejos λ se pueden mover con impunidad a través de estas relaciones

$$\lambda\,|\mathbf{v}\rangle=|\lambda\mathbf{v}\rangle=|\mathbf{v}\rangle\,\lambda, \qquad \lambda\,\langle\mathbf{w}|=\langle\lambda\mathbf{w}|=\langle\mathbf{w}|\,\lambda$$
$$\langle\mathbf{w}|\,\lambda\,|\mathbf{v}\rangle=\lambda\,\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{v}\rangle\,\lambda \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}\,|\lambda\mathbf{v}\rangle=\mathbf{A}\lambda\,|\mathbf{v}\rangle=\lambda\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle$$

Por lo tanto, dado un vector $|\mathbf{v}\rangle$, podemos construir un proyector $\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}$ a lo largo del vector $|\mathbf{v}\rangle$

$$\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\equiv|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}| \qquad \text{con } \langle\mathbf{v}|\,\mathbf{v}\rangle=1$$

siempre y cuando este operador lineal cumpla

$$\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\left[\alpha\ \ |\mathbf{z_1}\rangle+\beta\ \ |\mathbf{z}_2\rangle\right]=\alpha\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\,|\mathbf{z_1}\rangle+\beta\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\,|\mathbf{z}_2\rangle \qquad \Longrightarrow$$
$$|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|\left[\alpha\ \ |\mathbf{z_1}\rangle+\beta\ \ |\mathbf{z}_2\rangle\right]=|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|\,\alpha\ \ |\mathbf{z_1}\rangle+|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|\,\beta\ \ |\mathbf{z}_2\rangle=\alpha\ \ |\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{z_1}\rangle+\beta\ \ |\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{z}_2\rangle$$

$$\mathbf{P}^2_{|\mathbf{v}\rangle}=\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|)\,(|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|)=|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}| \qquad \Longrightarrow$$
$$\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\ \mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\,|\mathbf{z}\rangle=(|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|)\,(|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|)\,|\mathbf{z}\rangle=|\mathbf{v}\rangle\underbrace{\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{v}\rangle}_{1}\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{z}\rangle=|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}\,|\mathbf{z}\rangle=\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\,|\mathbf{z}\rangle$$

Así el operador $\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}$ actuando sobre el vector $|\mathbf{\Psi}\rangle$ representará la proyección de $|\mathbf{\Psi}\rangle$ a lo largo de $|\mathbf{v}\rangle$

$$\mathbf{P}_{|\mathbf{v}\rangle}\ \ |\mathbf{\Psi}\rangle=|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|\,\mathbf{\Psi}\rangle\equiv\langle\mathbf{v}|\,\mathbf{\Psi}\rangle\,|\mathbf{v}\rangle$$

Es inmediato construir un proyector de un vector sobre un subespacio $\mathbf{S}_q$.
Sea $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_q\rangle\}$ un conjunto ortonormal de vectores que expande $\mathbf{S}_q$. Por lo tanto definiremos el proyector $\mathbf{P}_q$ al proyector sobre el subespacio $\mathbf{S}_q$ de la forma

$$\mathbf{P}_q = |\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}^i|_q$$

es claro que $\mathbf{P}_q^2 = \mathbf{P}_q$

$$\mathbf{P}_q^2 |\mathbf{v}\rangle = \mathbf{P}_q\mathbf{P}_q |\mathbf{v}\rangle \Longrightarrow \mathbf{P}_q^2 |\mathbf{v}\rangle = \left(|\mathbf{e}_i\rangle \langle \mathbf{e}^i|_q\right)\left(|\mathbf{e}_j\rangle \langle \mathbf{e}^j|_q\right)|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{e}_i\rangle \underbrace{\langle \mathbf{e}^i |\mathbf{e}_j\rangle}_{\delta^i_j} \langle \mathbf{e}^j |\mathbf{v}\rangle$$

$$\mathbf{P}_q^2 |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{e}_j\rangle \langle \mathbf{e}^j |\mathbf{v}\rangle \equiv \mathbf{P}_q |\mathbf{v}\rangle \qquad \forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}$$

1.4. Espacio Nulo e Imagen

El conjunto de todos los $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \ni \mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación $\mathbf{A}$ y lo denotaremos como $\aleph(\mathbf{A})$, en símbolos diremos que

$$\aleph(\mathbf{A}) = \{|\mathbf{v}\rangle \mid |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle\}$$

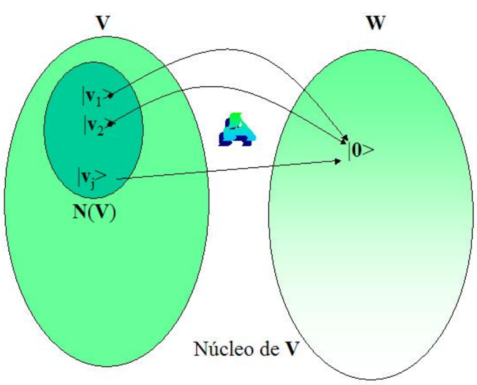
Adicionalmente, $\aleph(\mathbf{A}) \subset \mathbf{V}_1$ será un subespacio de $\mathbf{V}_1$. La prueba de esta afirmación es inmediata. Dados $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle \in \aleph(\mathbf{A})$,con $\mathbf{A}$ un operador lineal, es claro que

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{0}\rangle \\ \\ \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{0}\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_1\ \mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle + \alpha_2\ \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{0}\rangle = \mathbf{A}(\alpha_1\ |\mathbf{v}_1\rangle + \alpha_2\ |\mathbf{v}_2\rangle)$$

por la misma razón se tiene que el elemento neutro contenido en $\aleph(\mathbf{A})$,esto es

$$\mathbf{A}|\alpha\ \mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \forall |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \forall\alpha \qquad \therefore\ \mathbf{A}|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \qquad \text{si} \quad \alpha = 0$$

por lo tanto, queda demostrado que $\aleph(\mathbf{A})$ es un subespacio de $\mathbf{V}_1$.



El Núcleo $\aleph(\mathbf{A})$ de $\mathbf{V}$ para el operador $\mathbf{A}$

Definiremos imagen (rango o recorrido) de $\mathbf{A}$,y la denotaremos como

$$\Im(\mathbf{A}) = \left\{ \left|\mathbf{v}'\right\rangle \mid \left|\mathbf{v}'\right\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \wedge \quad \mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left|\mathbf{v}'\right\rangle \right\}$$

igualmente $\Im(\mathbf{A}) \subset \mathbf{V}_2$ también será un subespacio de $\mathbf{V}_2$ ya que si $|\mathbf{v}\rangle = \alpha_1 \; |\mathbf{v}_1\rangle + \alpha_2 \; |\mathbf{v}_2\rangle$ y dado que $\mathbf{A}$ es un operador lineal, se cumple que

$$\mathbf{A}\left(\underbrace{\alpha_1 \; |\mathbf{v}_1\rangle + \alpha_2 \; |\mathbf{v}_2\rangle}_{|\mathbf{v}\rangle} \right) = \alpha_1 \underbrace{\mathbf{A}\,|\mathbf{v}_1\rangle}_{|\mathbf{v}'_1\rangle} + \alpha_2 \underbrace{\mathbf{A}\,|\mathbf{v}_2\rangle}_{|\mathbf{v}'_2\rangle} = \underbrace{\alpha_1 \; \left|\mathbf{v}'_1\right\rangle + \alpha_2 \; \left|\mathbf{v}'_2\right\rangle}_{|\mathbf{v}'\rangle}$$

Es claro que si $\mathbf{V}$ de dimensión finita, $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\} = n$ también será de dimensión finita n y tendremos que

$$\dim\left[\aleph(\mathbf{A})\right] + \dim\left[\Im(\mathbf{A})\right] = \dim\left[\mathbf{V}\right]$$

vale decir que la dimensión del núcleo más la dimensión del recorrido o imagen de una transformación lineal es igual a la dimensión del dominio.

Para demostrar esta afirmación supongamos que $\dim[\mathbf{V}] = n$ y que $\{|\mathbf{e}_1\rangle, \; |\mathbf{e}_2\rangle, \; |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_k\rangle\} \in \mathbf{V}$ es una base de $\aleph(\mathbf{A})$, donde $k = \dim[\aleph(\mathbf{A})] \leq n$.
Como $\{|\mathbf{e}_1\rangle, \; |\mathbf{e}_2\rangle, \; |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_k\rangle\} \in \mathbf{V}$ estos elementos forman base y por lo tanto son linealmente independientes, necesariamente ellos formarán parte de una base mayor de $\mathbf{V}$.
Esto es $\{|\mathbf{e}_1\rangle, \; |\mathbf{e}_2\rangle, \; |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_k\rangle, |\mathbf{e}_{k+1}\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle, |\mathbf{e}_{k+r}\rangle\} \in \mathbf{V}$ será una base de $\mathbf{V}$ donde $k + r = n$

Es esquema de la demostración será:

- primero probaremos que $\{\mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+2}\rangle\}, \cdots, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r}\rangle\}\}$ forman una base para $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}$
- luego demostraremos que $\dim[\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}] = r$ y como hemos supuesto que $k + r = n$ habremos demostrado la afirmación anterior.

Si los r elementos $\{\mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+2}\rangle\}, \cdots, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}$ entonces cualquier elemento

$$|\mathbf{w}\rangle \in \mathbf{A}\{\mathbf{V}\} \ni |\mathbf{w}\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle = C^i\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con } |\mathbf{A}\mathbf{e}_i\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$$

Ahora bien, analicemos con cuidado los límites de la suma implícita del índice $i = 1, 2, \cdots, k + r$

$$|\mathbf{w}\rangle = C^i\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_i\rangle = \underbrace{C^1\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_1\rangle + C^2\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_2\rangle + \cdots + C^k\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_k\rangle}_{=|\mathbf{0}\rangle \qquad \text{ya que } \mathbf{A}|\mathbf{e}_1\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{e}_2\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{e}_3\rangle \cdots = \mathbf{A}|\mathbf{e}_k\rangle = |\mathbf{0}\rangle} + C^{k+1}\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_{k+1}\rangle + \cdots + C^{k+r}\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_{k+r}\rangle$$

Por lo tanto $\{\mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+2}\rangle\}, \cdots, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle\}, \mathbf{A}\{|\mathbf{e}_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbf{A}\{\mathbf{V}\}$. Ahora bien, para demostrar que son base, demostraremos que son linealmente independientes, para ello supondremos que

$$\exists \quad \left\{C^{k+1}, C^{k+2}, \cdots, C^{k+r}\right\} \ni C^i\,|\mathbf{A}\mathbf{e}_i\rangle = 0 \qquad \text{con } i = k+1, k+2, \cdots, k+r$$

y tenemos que demostrar que $C^{k+1} = C^{k+2} = \cdots = C^{k+r} = 0$. Entonces

$$C^i |\mathbf{Ae}_i\rangle = C^i \mathbf{A} |\mathbf{e}_i\rangle = \mathbf{A} \left(C^i |\mathbf{e}_i\rangle\right) = 0 \qquad \text{con } i = k+1, k+2, \cdots, k+r$$

por lo tanto el elemento $|\mathbf{v}\rangle = C^i |\mathbf{e}_i\rangle \in \aleph(\mathbf{A}) \qquad \text{con } i = k+1, k+2, \cdots, k+r$. Con lo cual dado que $\forall \quad |\mathbf{v}\rangle \in \aleph(\mathbf{A}), |\mathbf{v}\rangle = C^i |\mathbf{e}_i\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, \cdots, r$, entonces se puede hacer la siguiente resta

$$|\mathbf{v}\rangle - |\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{k} C^i |\mathbf{e}_i\rangle - \sum_{i=k+1}^{k+r} C^i |\mathbf{e}_i\rangle$$

y como los $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_k\rangle, |\mathbf{e}_{k+1}\rangle, \cdots, |\mathbf{e}_{k+r-1}\rangle, |\mathbf{e}_{k+r}\rangle\}$ son una base de $\mathbf{V}$ entonces las $C^{k+1} = C^{k+2} = \cdots = C^{k+r} = 0$

Ejemplos

- **Transformaciones Identidad**: Sea $\mathbf{1} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, la transformación identidad,

$$\forall |\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \ni \mathbf{1} |\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle . \qquad \Rightarrow \aleph(\mathbf{1}) = |\mathbf{0}\rangle \subset \mathbf{V}_1 \quad \wedge \quad \Im(\mathbf{1}) \equiv \mathbf{V}_1$$

- **Sistemas de lineales de Ecuaciones.** En $\mathbf{V}^n$ los sistemas de ecuaciones lineales representan el espacio nulo,$\aleph(\mathbf{A})$, para vectores de $\mathbf{V}^n$

$$\mathbf{A} |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrows A^i_j x_i = 0$$

son j ecuaciones con $j = 1, 2, \cdots, n$. Recordemos que estamos utilizando la convención de Einstein para suma de índices. Esto es $\sum_{i=1}^{n} A^i_j x_i = 0$

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias.** Sea $\mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]}$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas doblemente diferenciables. Definimos $\mathbf{A} : \mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]} \longrightarrow \mathcal{C}_{[-\infty,\infty]}$ como la transformación lineal $\left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{1}\right)$ tal que para todas las $y(x) \in \mathcal{C}^2_{[-\infty,\infty]}$ se cumple

$$\mathbf{A} |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{0}\rangle \quad \leftrightarrows \quad \left(\mathbf{D}^2 - \mathbf{1}\right) y(x) = 0 \quad \leftrightarrows \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 1\right) y(x) = y'' - y = 0$$

por lo tanto el núcleo o espacio nulo de $\mathbf{A}$,$\aleph(\mathbf{A})$ lo constituyen el conjunto de soluciones para la mencionada ecuación diferencial. Por lo tanto el problema de encontrar las soluciones de la ecuación diferencial es equivalente a encontrar los elementos del núcleo de $\mathbf{A}$.

1.5. Operadores Biyectivos e Inversos

Se dice que $\mathbf{A}:\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es biyectivo (uno a uno o biunívoco) si dados $|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle \in \mathbf{V}_1, \quad \wedge \quad |\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que

$$\mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{v}'\rangle \quad \wedge \quad \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{v}'\rangle \qquad \Longrightarrow |\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{v}_2\rangle$$

es decir será biyectiva si $\mathbf{A}$ transforma vectores distintos de $\mathbf{V}_1$ en vectores distintos de $\mathbf{V}_2$. Más aún, se puede afirmar que una transformación lineal $\mathbf{A}$, será biyectiva si y sólo si $\aleph(\mathbf{A}) = |\mathbf{0}\rangle$. Vale decir, si el subespacio nulo está constituido, únicamente por el elemento neutro del espacio vectorial. La demostración es sencilla. Supongamos que $\mathbf{A}$ es biyectiva y que $\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$,entonces $|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$,es decir, $\mathbf{A}|\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$, por consiguiente $\aleph(\mathbf{A}) = |\mathbf{0}\rangle$. Recíprocamente, si

$$\left.\begin{array}{c} \aleph(\mathbf{A}) = |\mathbf{0}\rangle \\ \wedge \\ \mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle = \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}|\mathbf{v}_1\rangle - \mathbf{A}|\mathbf{v}_2\rangle = |\mathbf{0}\rangle = \mathbf{A}\left(\underbrace{|\mathbf{v}_1\rangle - |\mathbf{v}_2\rangle}_{|\mathbf{v}_1\rangle - |\mathbf{v}_2\rangle = 0}\right) \Longrightarrow |\mathbf{v}_1\rangle = |\mathbf{v}_2\rangle$$

La importancia de las transformaciones lineales uno a uno o biyectiva reside en la posibilidad de definir inversa, debido a que siempre existe en $\mathbf{V}_2$ un vector $|\mathbf{v}'\rangle$ asociado a través de $\mathbf{A}$ con un vector $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1$. Diremos que $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_1$ es el inverso de $\mathbf{A}$, si $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$.

Podemos afirmar que un operador lineal $\mathbf{A}$ tendrá inverso $\mathbf{A}^{-1}$ si a cada vector $|\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2$

Habría que hacer un par de comentarios al respecto. El primero es que, tal y como hemos enfatizado arriba, en general, los operadores no conmutan entre si, y los inversos no son una excepción. Es decir, debieran existir (y de hecho existen) inversas por la izquierda $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ e inversas por la derecha $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$. Por simplicidad e importancia en Física obviaremos esta dicotomía y supondremos que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$. El segundo comentario tiene que ver con la existencia y unicidad del inverso de un operador lineal. Algunos operadores tienen inverso, otros no, pero aquellos quienes tienen inverso, ese inverso es único. Veamos, supongamos que

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \\ \wedge \\ \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle - \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{0}\rangle = \underbrace{\left(\mathbf{A}_1^{-1} - \mathbf{A}_2^{-1}\right)}_{\mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1}}\mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle \Longrightarrow \mathbf{A}_1^{-1} = \mathbf{A}_2^{-1}$$

Ahora bien, un operador lineal $\mathbf{A}$ tendrá inverso sí y sólo sí para cada vector $|\mathbf{v}'\rangle \in \mathbf{V}_2 \quad \exists!$ $|\mathbf{v}\rangle \in \mathbf{V}_1 \ni \mathbf{A}|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$. Es decir cada vector $|\mathbf{v}'\rangle$ está asociado con uno y sólo un vector $|\mathbf{v}\rangle$ a través de la transformación lineal $\mathbf{A}$. Dejaremos sin demostración esta afirmación pero lo importante es recalcar que para que exista inverso la transformación lineal $\mathbf{A}$,tiene que ser biyectiva y esto implica que se asocia uno y solo un vector de $\mathbf{V}_1$ con otro de $\mathbf{V}_2$.

Todavía podemos añadir algunas demostraciones consecuencias de las afirmaciones anteriores. Sea la transformación lineal $\mathbf{T}:\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ supongamos además que $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ Entonces las siguientes afirmaciones son válidas y equivalentes

1. $\mathbf{T}$ es Biyectiva en $\mathbf{V}_1$

2. $\mathbf{T}$ es invertible y su inversa $\mathbf{T}^{-1}:\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\} \rightarrow \mathbf{V}_1$ es lineal

3. $\forall\ |v\rangle \in \mathbf{V}_1, \mathbf{T}\{|v\rangle\} = |0\rangle \Longrightarrow |v\rangle = |0\rangle$ esto es, el espacio nulo $\aleph(\mathbf{T})$ únicamente contiene al elemento neutro de $\mathbf{V}_1$.

Si ahora suponemos que $\mathbf{V}_1$ tiene dimensión finita, digamos $\dim[\mathbf{V}_1] = n$, las siguientes afirmaciones serán válidas y equivalentes

1. $\mathbf{T}$ es Biyectiva en $\mathbf{V}_1$
2. Si $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\,, \cdots |\mathbf{u}_n\rangle\} \in \mathbf{V}_1$ son linealmente independientes entonces, $\{\mathbf{T}\{|\mathbf{u}_1\rangle\}\,,\ \mathbf{T}\{|\mathbf{u}_2\rangle\}\,,\ \mathbf{T}\{|\mathbf{u}$
   $\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}$ también serán linealmente independientes.
3. $\dim[\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}] = n$
4. Si $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}_1$ es una base de $\mathbf{V}_1$, entonces $\{\mathbf{T}\{|\mathbf{e}_1\rangle\}\,,\ \mathbf{T}\{|\mathbf{e}_2\rangle\}\,,\ \mathbf{T}\{|\mathbf{e}_3\rangle\} \cdots \mathbf{T}\{|\mathbf{e}_n\rangle\}\}$
   $\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}$ es una base de $\mathbf{T}\{\mathbf{V}_1\}$

1.6. Operadores Hermíticos Conjugados

Definiremos la acción de un operador $\mathbf{A}$ sobre un *bra* de la forma siguiente

$$\underbrace{(\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{A})}_{\langle\mathbf{w}'|}\,|\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{w}|\,\underbrace{(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle)}_{|\mathbf{v}'\rangle}$$

por lo cual lo que estamos diciendo es que el elemento de matriz para el operador, $\mathbf{A}$, es el mismo, y no importa donde opere $\mathbf{A}$.De esta manera, dado cada vector en $\mathbf{V}$, tiene asociado un vector en $\mathbf{V}^*$ podemos demostrar que $\mathbf{A}$ operando sobre los *bra* es lineal. Esto es dado

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{w}| = \lambda_1\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2| \qquad &\Longrightarrow \\ (\langle\mathbf{w}|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle \equiv (\lambda_1\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle &= (\lambda_1\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2|)\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle) = \lambda_1\langle\mathbf{z}_1|\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle) + \lambda_2\langle\mathbf{z}_2|\,(\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle) \\ &= \lambda_1\,(\langle\mathbf{z}_1|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle + \lambda_2\,(\langle\mathbf{z}_2|\,\mathbf{A})\,|\mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

Siguiendo con esta lógica podemos construir la acción del operador hermítico conjugado, $\mathbf{A}^\dagger$. Para ello recordamos que igual que a cada vector (*ket*) $|\mathbf{v}\rangle$ le está asociado una forma lineal (*bra*) $\langle\mathbf{v}|$,a cada *ket* transformado $\mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle = |\mathbf{v}'\rangle$ le corresponderá un *bra* transformado $\langle\mathbf{v}'| = \langle\mathbf{v}|\,\mathbf{A}^\dagger$. Por lo tanto

$$\begin{array}{ccc} |\mathbf{v}\rangle & \Longleftrightarrow & \langle\mathbf{v}| \\ |\mathbf{v}'\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{v}\rangle & \Longleftrightarrow & \langle\mathbf{v}'| = \langle\mathbf{v}|\,\mathbf{A}^\dagger \end{array}$$

ahora bien,si $\mathbf{A}$ es lineal, $\mathbf{A}^\dagger$ también lo será. Dado que a un vector $|\mathbf{w}\rangle = \lambda_1\ |\mathbf{z_1}\rangle + \lambda_2\ |\mathbf{z}_2\rangle$ le corresponde un *bra* $\langle\mathbf{w}| = \lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2|$ (la correspondencia es antilineal). Por lo tanto, $|\mathbf{w}'\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{w}\rangle = \lambda_1\ \mathbf{A}\,|\mathbf{z_1}\rangle + \lambda_2\ \mathbf{A}\,|\mathbf{z}_2\rangle$, por ser $\mathbf{A}$ lineal, entonces

$$|\mathbf{w}'\rangle \Longleftrightarrow \langle\mathbf{w}'| \equiv \langle\mathbf{w}|\,\mathbf{A}^\dagger = (\lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1| + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2|)\,\mathbf{A}^\dagger \equiv \lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1'| + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2'| = \lambda_1^*\langle\mathbf{z}_1|\,\mathbf{A}^\dagger + \lambda_2^*\langle\mathbf{z}_2|\,\mathbf{A}^\dagger$$

Es claro que de la definición de producto interno en la notación de Dirac, se desprende

$$\left\langle \mathbf{x}' \right| \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y} | \left. \mathbf{x}' \right\rangle^* \quad \forall \ \left| \mathbf{x}' \right\rangle = \mathbf{A} \left| \mathbf{x} \right\rangle, \left| \mathbf{y} \right\rangle \in \mathbf{V} \qquad \Longrightarrow \langle \mathbf{x} | \mathbf{A}^\dagger \left| \mathbf{y} \right\rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{A} \left| \mathbf{x} \right\rangle^* \quad \forall \ \left| \mathbf{x} \right\rangle, \left| \mathbf{y} \right\rangle \in \mathbf{V}$$

Igualmente se pueden deducir las propiedades de los operadores hermíticos conjugados

$$\left(\mathbf{A}^\dagger\right)^\dagger = \mathbf{A}; \qquad (\lambda \mathbf{A})^\dagger = \lambda^* \mathbf{A}^\dagger; \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger; \qquad (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$$

Esta última propiedad es fácilmente demostrable y es educativa su demostración. Dado $|\mathbf{v}'\rangle = \mathbf{A}\mathbf{B}\,|\mathbf{v}\rangle$, además se tiene que

$$\left.\begin{array}{c} |\bar{\mathbf{v}}\rangle = \mathbf{B}\,|\mathbf{v}\rangle \\ \\ |\mathbf{v}'\rangle = \mathbf{A}\,|\bar{\mathbf{v}}\rangle \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \left\langle \mathbf{v}' \right| = \langle \bar{\mathbf{v}} | \, \mathbf{A}^\dagger = \langle \mathbf{v} | \, \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger = \langle \mathbf{v} | \, (\mathbf{A}\mathbf{B})^\dagger$$

A partir de propiedades anteriores se deriva una más útil relacionada con el conmutador de dos operadores hermíticos

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^\dagger = -\left[\mathbf{A}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger\right] = \left[\mathbf{B}^\dagger, \mathbf{A}^\dagger\right]$$

La conclusiones a las que llegamos son
Para obtener el hermítico conjugado de una expresión proceda de la siguiente manera:

- Cambie constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \leftrightarrows \lambda^*$
- Cambie los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $|\mathbf{v}\rangle \leftrightarrows \langle \mathbf{v}|$
- Cambie operadores lineales por sus hermíticos conjugados $\mathbf{A}^\dagger \leftrightarrows \mathbf{A}$;
- Invierta el orden de los factores

De este modo

$$(|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}|)^\dagger = |\mathbf{w}\rangle \langle \mathbf{v}|$$

que se deduce fácilmente de la consecuencia de la definición de producto interno

$$\langle \mathbf{x}| \left(\underline{|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}|}\right)^\dagger |\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}| \left(|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{w}|\right) |\mathbf{x}\rangle^* = \langle \mathbf{y}| \, |\mathbf{v}\rangle^* \langle \mathbf{w}| \, |\mathbf{x}\rangle^* = \langle \mathbf{x}| \, \underline{|\mathbf{w}\rangle \langle \mathbf{v}|} \, |\mathbf{y}\rangle$$

Existe un conjunto de operadores que se denominan Hermíticos a secas o autoadjunto. Un operador Hermítico (o autoadjunto) será aquel para el cual $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$. Con esto

$$\langle \mathbf{x}| \mathbf{A}^\dagger |\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}| \mathbf{A} |\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}| \mathbf{A} |\mathbf{x}\rangle^*$$

Claramente los proyectores son autoadjuntos por construcción

$$\mathbf{P}^\dagger_{|\mathbf{v}\rangle} \equiv (|\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|)^\dagger = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|$$

1.7. Operadores Unitarios

Por definición un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto. Esto es

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger} \quad \Longrightarrow \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}$$

De estos operadores podemos decir varias cosas

- Las transformaciones unitarias dejan invariantes al producto interno y consecuentemente la norma de vectores. Esto se demuestra fácilmente. Dados dos vectores $|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle$ sobre los cuales actúa un operador unitario

$$\left.\begin{array}{l} |\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{x}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{y}}\rangle = \mathbf{U}\,|\mathbf{y}\rangle \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \langle \tilde{\mathbf{y}}\,|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \langle \mathbf{y}|\,\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}\,|\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{y}\,|\mathbf{x}\rangle$$

  Es claro que si $\mathbf{A}$es hermítico, $\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A}$, el operador $\mathbf{T} = \mathbf{e}^{i\mathbf{A}}$ es unitario.

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}^{i\mathbf{A}} \quad \Longrightarrow \mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{e}^{-i\mathbf{A}^{\dagger}} = \mathbf{e}^{-i\mathbf{A}} \quad \Longrightarrow \mathbf{T}\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{e}^{i\mathbf{A}}\mathbf{e}^{-i\mathbf{A}} = \mathbf{1} = \mathbf{T}^{\dagger}\mathbf{T} = \mathbf{e}^{-i\mathbf{A}}\mathbf{e}^{i\mathbf{A}}$$

- El producto de dos operadores unitarios también es unitario. Esto es si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son unitarios entonces

$$(\mathbf{U}\mathbf{V})^{\dagger}(\mathbf{U}\mathbf{V}) = \mathbf{V}^{\dagger}\underbrace{\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}}_{\mathbf{1}}\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\dagger}\mathbf{V} = \mathbf{1}$$
$$(\mathbf{U}\mathbf{V})(\mathbf{U}\mathbf{V})^{\dagger} = \mathbf{U}\underbrace{\mathbf{V}\mathbf{V}^{\dagger}}_{\mathbf{1}}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{1}$$

2. Representación Matricial de Operadores

Supongamos un operador lineal $\mathbf{A}$ en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(V, W)$ donde $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$ y sean $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle, \cdots |\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ las bases para V y W respectivamente. Entonces $\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_j\rangle \in W$

$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = A_i^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, .., n \qquad \text{y } \alpha = 1, 2, .., m$$

las A_i^{α} son las componentes de la expansión de $\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$ en la base $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle, |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle, \cdots |\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$. Para un vector genérico $|\mathbf{x}\rangle$ tendremos que

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{x}\rangle = \tilde{x}^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle \qquad \text{pero, a su vez } |\mathbf{x}\rangle = x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle$$

con lo cual

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \mathbf{A}\,|\mathbf{x}\rangle = \tilde{x}^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle = \mathbf{A}\left(x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle\right) = x^i\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = x^i A_i^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{e}}_{\alpha}\rangle \qquad \Longrightarrow \left(\tilde{x}^{\alpha} - x^i A_i^{\alpha}\right)|\tilde{\mathbf{e}}_i\rangle = 0$$

para finalmente concluir que

$$\tilde{x}^{\alpha} = A_i^{\alpha} x^i$$

Varias cosas se pueden concluir hasta este punto

1. Si acordamos que los índices de arriba indican filas podemos representar los vectores como un arreglo vertical de sus componentes

$$|\mathbf{x}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

y las cantidades

$$A_i^\alpha \rightarrow \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_j^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_j^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ A_1^\alpha & A_2^\alpha & & A_j^\alpha & & A_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_j^m & & A_n^m \end{pmatrix}$$

de tal modo que se cumpla

$$|\tilde{\mathbf{x}}\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \vdots \\ \tilde{x}^\alpha \\ \\ \tilde{x}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_j^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_j^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ A_1^\alpha & A_2^\alpha & & A_j^\alpha & & A_n^\alpha \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ A_1^m & A_2^m & & A_j^m & & A_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^j \\ \\ x^n \end{pmatrix}$$

Nótese que los índices arriba indican fila y los de abajo columnas. Las cantidades A_j^α es la representación del operador $\mathbf{A}$ en las bases $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ de V y W respectivamente. Es decir una matriz A_j^i es un arreglo de números

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix}$$

donde el superíndice, i, indica fila

$$\begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^n \end{pmatrix}$$

y el subíndice j columna

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \end{pmatrix}$$

2. Diremos que las componentes de los vectores transforman como
$$\tilde{x}^{\alpha} = A_i^{\alpha} x^i$$

3. Si suponemos $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ bases ortonormales
$$\tilde{x}^{\alpha} = \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}\,|\tilde{\mathbf{x}}\rangle = \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{x}\rangle = \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\left(x^i\,|\mathbf{e}_i\rangle\right) = x^i\,\langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$$
queda claro que $A_i^{\alpha} \equiv \langle\tilde{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle$ será la representación matricial

4. Los vectores $|\mathbf{e}_k\rangle$ transforman de la siguiente manera
$$\mathbf{A}\,|\mathbf{e}_i\rangle = |\tilde{\mathbf{w}}_i\rangle = A_i^j\,|\tilde{\mathbf{e}}_j\rangle \quad \Longrightarrow$$
donde $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_n\rangle\}$ son las bases para V y W respectivamente.

Definitivamente, las matrices son uno de los objetos más útiles de las Matemáticas. Ellas permiten aterrizar conceptos y calcular cantidades. La palabra matriz fue introducida en 1850 por James Joseph Sylvester[1] y su teoría desarrollada por Hamilton[2] y Cayley[3] . Si bien los físicos las consideramos indispensables, no fueron utilizadas de manera intensiva hasta el aparición de la Mecánica Cuántica alrededor de 1925.

3. Bases y Representación Matricial de Operadores

Es importante recalcar que la representación matricial de un operador depende de las bases $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,,\cdots|\mathbf{e}_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\tilde{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\tilde{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ de V y W respectivamente. Si tenemos otras bases ortonormal para V y W vale decir, $\{|\bar{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\bar{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\bar{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\bar{\mathbf{e}}_n\rangle\}$ y $\{|\breve{\mathbf{e}}_1\rangle\,,\ |\breve{\mathbf{e}}_2\rangle\,,\ |\breve{\mathbf{e}}_3\rangle\,,\cdots|\breve{\mathbf{e}}_m\rangle\}$ su representación será distinta. Esto es
$$\langle\breve{\mathbf{e}}^{\alpha}|\,\mathbf{A}\,|\bar{\mathbf{e}}_j\rangle = \tilde{A}_j^{\alpha} \qquad \Longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{A}_1^1 & \tilde{A}_2^1 & \cdots & \tilde{A}_j^1 & \cdots & \tilde{A}_n^1 \\ \tilde{A}_1^2 & \tilde{A}_2^2 & & \tilde{A}_j^2 & & \tilde{A}_n^2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \tilde{A}_1^{\alpha} & \tilde{A}_2^{\alpha} & & \tilde{A}_j^{\alpha} & & \tilde{A}_n^{\alpha} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \tilde{A}_1^m & \tilde{A}_2^m & & \tilde{A}_j^m & & \tilde{A}_n^m \end{pmatrix}$$

[1] **James Joseph Sylvester** (1814-1897 Londres, Inglaterra). Además de sus aportes con Cayley a la Teoría de las Matrices descubrió la solución a la ecuación cúbica y fue el primero en utilizar el término discriminante para categorizar cada una de las raíces de la ecuación. Para vivir tuvo que ejercer de abogado durante una década. Por fortuna otro matemático de la época (Arthur Cayley) frecuentaba los mismos juzgados y tribunales y pudieron interactuar. Por ser judío tuvo cantidad de dificultades para conseguir trabajo en la Academia.

[2] Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865, Dublin, Irlanda) Sus contribuciones en el campo de la Optica, Dinámica del cuerpo Rígido, Teoría de ecuaciones algebráicas y Teoría de Operadores Lineales.

[3] **Arthur Cayley** (1821, Richmond, 1895, Cambridge, Inglaterra) En sus cerca de 900 trabajos cubrió casí la totalidad de las áreas de las Matemáticas de aquel entonces. Sus mayores cotribuciones se centran el la Teoría de Matrices y la Gemetría no euclideana. No consiguió empleo como Matemético y tuvo que graduarse de abogado y ejercer durante más de 15 años, durante los cuales publicó más de 250 trabajos en Matemáticas

Más aún cambiando el orden en el cual se presenta una base, cambia la representación matricial del operador. Los siguientes ejemplos tratarán de ilustrar estas situaciones

Si tenemos un matriz 2×3, $\mathbf{B}$ de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y supongamos las bases canónicas para V^3y V^2 : $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\}$ y $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\}$. Entonces la matriz $\mathbf{B}$ representan la transformación $\mathbf{B}$:$V^3 \to V^2$ que lleva un vector genérico $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ en un vector genérico $|y\rangle = (y_1, y_2)$ tal que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \mathbf{B}\,|x\rangle = |y\rangle \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

y esto es

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 0x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

La representación matricial, dependerá de la base en la cual se exprese. Si suponemos el operador diferencial $D(\cdot) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ y consideramos el dominio un espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3, por lo tanto $D(\cdot) : P^3 \to P^2$, si consideramos las bases $\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ y $\left\{1, x, x^2\right\}$ de P^3 y P^2 respectivamente. Si el producto interno está definido como

$$\left\langle P^i \,|P_j\right\rangle \to \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ \mathcal{P}_i\left(x\right)\mathcal{P}_j\left(x\right)\mathrm{d}x$$

La representación matricial el operador diferencial será

$$\left\langle \tilde{P}^i \right| D\,|P_j\rangle = \left\langle \tilde{P}^i \,\middle|\tilde{P}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

como siempre i indica las filas y j las columnas.

Otra manera de verlo es operar (diferenciar) sobre el $|P_j\rangle \in P^3$ y expresar ese resultado en la base de P^2

$$D\,|P_j\rangle \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} & = & 0 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} & = & 1 & = & 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d}x} & = & 2x & = & 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^3\right)}{\mathrm{d}x} & = & 3x^2 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 \end{array} \right.$$

y los coeficientes de esa expansión serán las columnas de la matriz que los representa.

Para enfatizar que los elementos de matriz, no sólo dependen de la base sino del orden en el cual la base se presente. Consideremos que la base de P^2 viene representadas por $\left\{x^2, x, 1\right\}$. La representación matricial del operador $D(\cdot) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ será

$$\left\langle P^i \right| D \left| P_j \right\rangle = \left\langle P^i \left| \tilde{P}_j \right.\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aunque

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow 1 + 2x + 3x^2$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow 1 + 2x + 3x^2$$

¡Es el mismo polinomio!

Recuerde que las componentes del vector multiplican a los vectores bases en el mismo orden.

Si ahora construimos la representación para el mismo operador $D(\cdot) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}x}$ en la siguiente base $\left\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\right\}$ y $\left\{1, x, x^2\right\}$ de P^3 y P^2, respectivamente.

$$D \left| P_j \right\rangle = \left| \tilde{P}_j \right\rangle \quad \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}x} & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}(1+x)}{\mathrm{d}x} & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(1+x+x^2\right)}{\mathrm{d}x} & = & 1 + 2x & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{\mathrm{d}\left(1+x+x^2+x^3\right)}{\mathrm{d}x} & = & 1 + 2x + 3x^2 & = & 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{array} \right.$$

con lo cual

$$\left\langle P^i \right| D \left| P_j \right\rangle = \left\langle P^i \left| \tilde{P}_j \right.\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Algebra de Matrices

Por comodidad supongamos que $\dim(V) = \dim(W) = n$ y consideremos la base ortogonal $\{|\mathbf{e}_1\rangle\,,\ |\mathbf{e}_2\rangle\,,\ |\mathbf{e}_3\rangle\,, \cdots |\mathbf{e}_n\rangle\}$.De este modo es claro, que se reobtienen las conocidas relaciones para matrices cuadradas

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} + \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} + \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e_j} \right\rangle + \left\langle \mathbf{e^i} \right| \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = A^i_j + B^i_j$$

con lo cual tenemos la suma de matrices. Esto es

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} A^1_1 + B^1_1 & A^1_2 + B^1_2 & \cdots & A^1_n + B^1_n \\ A^2_1 + B^2_1 & A^2_2 + B^2_2 & & A^2_n + B^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_1 + B^n_1 & & & A^n_n + B^n_n \end{pmatrix}$$

en forma compacta puede demostrarse $A^i_j + B^i_j = (A+B)^i_j$con lo cual es directo la demostrar la igualdad de matrices

$$\begin{pmatrix} A^1_1 + B^1_1 & A^1_2 + B^1_2 & \cdots & A^1_n + B^1_n \\ A^2_1 + B^2_1 & A^2_2 + B^2_2 & & A^2_n + B^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_1 + B^n_1 & & & A^n_n + B^n_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix}$$

de donde $A^i_j = B^i_j$

De igual modo para la representación de composición de operadores

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{AB} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A1B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left(\left| \mathbf{e_k} \right\rangle \left\langle \mathbf{e^k} \right| \right) \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_k \right\rangle \left\langle \mathbf{e}^k \right| \mathbf{B} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = A^i_k B^k_j$$

para multiplicación de matrices. Esto es

$$\begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & & A^2_n \\ \vdots & & \ddots & \\ A^n_1 & A^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n \\ B^2_1 & B^2_2 & & B^2_n \\ \vdots & & \vdots & \\ B^n_1 & B^n_2 & & A^n_n \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} A^1_k B^k_1 & A^1_k B^k_2 & \cdots & A^1_k B^k_n \\ A^2_k B^k_1 & A^2_k B^k_2 & & A^2_k B^k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^n_k B^k_1 & & & A^n_k B^k_n \end{pmatrix}$$

como ya sabíamos $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \rightarrow A^i_k B^k_j \neq B^i_k A^k_j$

De la misma manera la multiplicación de un número por una matriz es la multiplicación de todos sus elementos por ese número

$$\left\langle \mathbf{e}^i \right| \alpha\mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \alpha \left\langle \mathbf{e}^i \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{e}_j \right\rangle = \alpha A^i_j$$

5. Representación Diagonal

Finalmente mostraremos que dado un operador lineal $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ donde $\dim(V) = \dim(W) = n$ y sea $\{|\mathbf{u}_1\rangle, |\mathbf{u}_2\rangle, |\mathbf{u}_3\rangle, \cdots |\mathbf{u}_n\rangle\}$ una base ortonormal para V y W. Si adicionalmente se da el caso que

$$\mathbf{A} |\mathbf{u}_i\rangle = |\mathbf{u}_i\rangle$$

la representación matricial es diagonal

$$\left\langle \mathbf{u}^j \right| \mathbf{A} \left| \mathbf{u}_i \right\rangle = A^j_i = \left\langle \mathbf{u}^j \;|\mathbf{u}_i \right\rangle = \delta^j_i$$

Esta afirmación también es válida para $\dim(V) \neq \dim(W)$ pero por simplicidad seguimos trabajando con matrices cuadradas.

En lenguaje de índices estaremos diciendo que

$$D^i_j = D_k \; \delta^k_l \delta^l_j \delta^i_k = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix}$$

6. Sistemas de Ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones más útiles del álgebra de matrices es la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. El cual puede ser expresado de la siguiente forma

$$A^\alpha_i x^i = c^\alpha \qquad \text{con } i = 1, 2, .., n \qquad \text{y } \alpha = 1, 2, .., m$$

por lo tanto tendremos m ecuaciones lineales para n incógnitas $\left(x^1, x^2, \cdots x^n\right)$. Las A^α_i es la matriz de los coeficientes. Por lo tanto este problema puede ser pensado como un problema de un operador $\mathbf{A}$ en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(V, W)$ donde $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, con las c^α las componentes del vector transformado

$$|\mathbf{c}\rangle = \mathbf{A} |\mathbf{x}\rangle \rightarrow c^\alpha = A^\alpha_i x^i$$

Concretemos en un ejemplo

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 5 \\ 4x + 4y - 3z & = & 3 \\ -2x + 3y - z & = & 10 \end{array} \qquad \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

el método más utilizado es la eliminación de *Gauss Jordan* el cual se basa en el intercambio de ecuaciones y la multiplicación apropiada e inteligente por constantes y resta de ecuaciones. La idea es construir una matriz triangular superior para poder luego despejar desde abajo. Veamos:

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

entonces para eliminar x de la fila c (o la ecuación c) sumamos la fila a con la $c, a+c$ y esta nueva ecuación será la nueva c

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c' \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

ahora $-2a+b$ será la nueva b

$$\begin{array}{c} a \\ b' \\ c' \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right]$$

finalmente $3b'+c'$

$$\begin{array}{c} a \\ b' \\ c'' \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right]$$

Este sistema es equivalente al primer sistema de ecuaciones. La solución emerge rápidamente:

$$-5z=-15 \rightarrow z=3 \quad -2y-z=-7 \rightarrow -2y-3=-7 \rightarrow y=2 \quad 2x+3\,(2)-3=5 \rightarrow x=1$$

Es bueno recalcar que los sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente tienen solución y a veces tienen más de una solución.

7. Operadores Hermíticos

La representación matricial de un operador hermítico,

$$\left(A^{\dagger}\right)^{i}_{j} = \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^{j}\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{e}_{i}\right\rangle^{*} = \left(A^{j}_{i}\right)^{*}$$

vale decir: el hermítico conjugado de una matriz, es su traspuesta conjugada. Si la matriz es Hermítica, i.e.

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A} \Longrightarrow \quad \left(A^{\dagger}\right)^{i}_{j} = A^{i}_{j}$$

por lo tanto, las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales. Un operador hermítico estará representado por una matriz hermítica.

Aquí vale la pena probar algunas de las propiedades que arriba expresamos para operadores hermíticos conjugados, vale decir

$$\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} = \mathbf{A}; \qquad (\lambda\mathbf{A})^{\dagger} = \lambda^{*}\mathbf{A}^{\dagger}; \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\dagger} = \mathbf{A}^{\dagger}+\mathbf{B}^{\dagger}; \qquad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$$

Es claro que

$$\left(\mathbf{A}^{\dagger}\right)^{\dagger} \rightarrow \left(\left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle\right)^{\dagger} = \left(\left(A^{\dagger}\right)^{i}_{j}\right)^{\dagger} = \left(\left(A^{j}_{i}\right)^{*}\right)^{\dagger} = A^{i}_{j}$$

y

$$(\lambda\mathbf{A})^{\dagger} \rightarrow \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \lambda\mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \left\langle \mathbf{e}^{j}\right| \lambda\mathbf{A} \left|\mathbf{e}_{i}\right\rangle^{*} = \lambda^{*} \left\langle \mathbf{e}^{j}\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{e}_{i}\right\rangle^{*} = \lambda^{*} \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{A}^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \lambda^{*}\mathbf{A}^{\dagger}$$

pero más interesante es

$$(\mathbf{AB})^{\dagger} \rightarrow \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| (\mathbf{AB})^{\dagger} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \left(A^{i}_{k}B^{k}_{j}\right)^{\dagger} = A^{j*}_{k}B^{k*}_{i} = A^{k*}_{j}B^{i*}_{k} = B^{i*}_{k}A^{k*}_{j} \rightarrow \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$$

8. Inversa de una matriz

Hemos visto que dada una transformación lineal biyectiva, podemos definir una inversa para esa transformación lineal. Esa transformación lineal tendrá como representación un matriz. Por lo tanto dado un operador lineal $\mathbf{A}$ diremos que otro operador lineal $\mathbf{B}$ será su inverso (por la derecha) si

$$\mathbf{AB} = \mathbf{1} \rightarrow \left\langle \mathbf{e}^{i}\right| \mathbf{AB} \left|\mathbf{e}_{j}\right\rangle = \delta^{i}_{j} \rightarrow A^{i}_{k}B^{k}_{j} = \delta^{i}_{j}$$

ahora bien, como conocemos la matriz A^{i}_{k} y las suponemos no singular (esto es: $\det\left(A^{i}_{k}\right) \neq 0$) y si tomamos un j fijo tendremos un sistema de n ecuaciones lineales inhomogéneo con n incógnitas $B^{1}_{j}, B^{2}_{j}, B^{3}_{j}, \cdots B^{n}_{j}$. Al resolver el sistema tendremos la solución. El procedimiento para encontrar la inversa es equivalente al método de eliminación de Gauss Jordan, veamos como funciona. Supongamos una matriz 3×3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A^{1}_{1} & A^{1}_{2} & A^{1}_{3} & 1 & 0 & 0 \\ A^{2}_{1} & A^{2}_{2} & A^{2}_{3} & 0 & 1 & 0 \\ A^{3}_{1} & A^{3}_{2} & A^{3}_{3} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss Jordan}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & B^{1}_{1} & B^{1}_{2} & B^{1}_{3} \\ 0 & 1 & 0 & B^{2}_{1} & B^{2}_{2} & B^{2}_{3} \\ 0 & 0 & 1 & B^{3}_{1} & B^{3}_{2} & B^{3}_{3} \end{array}\right)$$

Como un ejemplo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$$

9. Cambio de Bases para vectores

Dada una representación (una base) particular un *bra*, un *ket* o un operador queda representado por una matriz. Si cambiamos la representación, ese mismo *bra*, *ket* u operador tendrá otra matriz como representación. Mostraremos cómo están relacionadas esas matrices.

Dadas dos base discretas ortonormales $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ y $\{|\mathbf{t}_i\rangle\}$, entonces un vector cualquiera

$$\left.\begin{array}{l} |\boldsymbol{\Psi}\rangle = \left(|\mathbf{u^k}\rangle\langle\mathbf{u_k}|\right)|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \underbrace{\left\langle \mathbf{u^k}\right|\boldsymbol{\Psi}\rangle}_{c^k} |\mathbf{u_k}\rangle \\ \\ |\boldsymbol{\Psi}\rangle = \left(|\mathbf{t^m}\rangle\langle\mathbf{t_m}|\right)|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \underbrace{\langle\mathbf{t}^m|\,\boldsymbol{\Psi}\rangle}_{\tilde{c}^m} |\mathbf{t}_m\rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \langle\mathbf{t}^m\,|\boldsymbol{\Psi}\rangle = \left\langle\mathbf{u}^k\right|\boldsymbol{\Psi}\rangle\ \underbrace{\langle\mathbf{t}^m\,|\mathbf{u}_k\rangle}_{S^m_k} \\ \\ \left\langle\mathbf{u}^k\,|\boldsymbol{\Psi}\right\rangle = \langle\mathbf{t}^m|\,\boldsymbol{\Psi}\rangle\ \underbrace{\left\langle\mathbf{u}^k\,|\mathbf{t}_m\right\rangle}_{\tilde{S}^k_m} \end{array}\right.$$

con lo cual, una vez más, tendremos que la expresión de transformación de componentes de un vector

$$\tilde{c}^m = S^m_k c^k \quad \Longleftrightarrow \quad c^k = \tilde{S}^k_m \tilde{c}^m$$

y S^m_k (o $\tilde{S}^k_m$) será la matriz de transformación, cambio de base o cambio de representación. Ahora bien, por definición de producto interno

$$\langle\mathbf{t}^m\,|\mathbf{u}_k\rangle = \left\langle\mathbf{u}^k\,|\mathbf{t}_m\right\rangle^* \quad \Longrightarrow \quad S^m_k = S^{k*}_m \equiv S^{m\dagger}_k$$

por lo tanto, la matriz de transformación entre bases es hermítica o autoadjunta y la relación anterior queda escrita como

$$\tilde{c}^m = S^m_k c_k \quad \Longrightarrow \quad \langle\mathbf{t}^m|\,\boldsymbol{\Psi}\rangle = S^m_k\ \left\langle\mathbf{u}^k\right|\boldsymbol{\Psi}\rangle$$

$$c^k = S^{k\dagger}_m \tilde{c}^m \quad \Longrightarrow \quad \left\langle\mathbf{u}^k\,|\boldsymbol{\Psi}\right\rangle = S^{k\dagger}_m \langle\mathbf{t}^m|\,\boldsymbol{\Psi}\rangle$$

Igualmente la regla de transformación de las representaciones matriciales de operadores quedan expresadas como

$$\left\langle\mathbf{t}^i\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{t}_j\rangle = \left\langle\mathbf{t}^i\right|\left(|\mathbf{u_k}\rangle\left\langle\mathbf{u^k}\right|\right)\mathbf{A}\left(|\mathbf{u_m}\rangle\langle\mathbf{u^m}|\right)|\mathbf{t}_j\rangle = \underbrace{\left\langle\mathbf{t}^i\,|\mathbf{u}_k\right\rangle}_{S^i_k}\left\langle\mathbf{u}^k\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{u}_m\rangle\underbrace{\langle\mathbf{u}^m\,|\mathbf{t}_j\rangle}_{S^{m\dagger}_j}$$

por lo tanto,

$$\tilde{A}^i_j = S^i_k\ A^k_m\ S^{m\dagger}_j$$

donde $\tilde{A}^i_j$ es la representación del operador $\mathbf{A}$ respecto a la base $\{|\mathbf{t}_j\rangle\}$ y A^k_m su representación en la base $\{|\mathbf{u}_m\rangle\}$

10. Traza de Operadores

La traza, $\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A})$, de un operador $\mathbf{A}$ es la suma de los elementos diagonales de su representación matricial. Esto es dado un operador $\mathbf{A}$ y una base ortogonal $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ para V^n

$$\mathrm{Tr}\,(\mathbf{A}) = \left\langle\mathbf{u}^k\right|\mathbf{A}\,|\mathbf{u}_k\rangle = A^i_i$$

Así

$$A^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}\right) = A^i_i = 15$$

10.1. Invariancia de la Traza

La traza de una matriz no depende de la base que seleccionemos. Es un invariante que caracteriza al operador independientemente de la base en la cual se represente. Entonces Dadas dos base discretas ortonormales $\{|\mathbf{u}_i\rangle\}$ y $\{|\mathbf{t}_i\rangle\}$,

$$A^k_k = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right. \left|\mathbf{t}^m\right\rangle \left\langle \mathbf{t}_m\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{t}_m\right| \mathbf{A} \underbrace{\left|\mathbf{u}_k\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^k \right.}_{\mathbf{1}} \left|\mathbf{t}^m\right\rangle = \left\langle \mathbf{t}_m\right| \mathbf{A} \left|\mathbf{t}^m\right\rangle = A^m_m$$

Donde una vez más hemos utilizado las dos relaciones de cierre $\left|\mathbf{t}^m\right\rangle \left\langle \mathbf{t}_m\right| = \mathbf{1}$ y $\left|\mathbf{u}^k\right\rangle \left\langle \mathbf{u}_k\right| = \mathbf{1}$. Es claro que el número que representa esta suma será el mismo independientemente de su representación matricial.

10.2. Propiedades de la Traza

Claramente la traza es lineal

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}{+}\lambda\mathbf{B}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}\right) + \lambda\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}\right)$$

ya que

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}\right) = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A}+\lambda\mathbf{B} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle + \lambda \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{B} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}\right) + \lambda\,\mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}\right)$$

La traza de un producto conmuta esto es

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{AB}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{BA}\right)$$

y es fácilmente demostrable

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{AB}\right) = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{AB} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \underbrace{\left|\mathbf{u}_m\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^m \right|}_{\mathbf{1}} \mathbf{B} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{B} \underbrace{\left|\mathbf{u}_\mathbf{m}\right\rangle \left\langle \mathbf{u}^\mathbf{m} \right|}_{\mathbf{1}} \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{BA}\right)$$

Recuerde que $\left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{B} \left|\mathbf{u}_\mathbf{m}\right\rangle$ y $\left\langle \mathbf{u}^k \right| \mathbf{A} \left|\mathbf{u}_k\right\rangle$ son números que pueden ser reordenados.

Del mismo modo es fácil demostrar que la traza de un triple producto de matrices respeta la ciclicidad del orden de la matrices en el producto

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{ABC}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{BCA}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{CAB}\right)$$

11. Producto Tensorial de Operadores

Dado dos operadores lineales $\mathbf{A}_{(\mathbf{1})}: \mathcal{E}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_1$ y $\mathbf{B}_{(\mathbf{2})}: \mathcal{E}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2$ tales que,

$$\mathbf{A}_{(1)} \left|\varphi(1)\right\rangle = \left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}_{(2)} \left|\chi(2)\right\rangle = \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle$$

entonces definiremos un operador lineal $\mathbf{C}: \mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ como el producto tensorial de operadores $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}$ si

$$\mathbf{C} \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle \equiv \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle \equiv \mathbf{A}_{(1)} \left|\varphi(1)\right\rangle \otimes \mathbf{B}_{(2)} \left|\chi(2)\right\rangle = \left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \otimes \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle = \left|\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\right\rangle$$

en otras palabras, cada operador lineal sigue actuando en el espacio en el cual viene definido. La "extensión" de un operador $\mathbf{A}_{(\mathbf{1})}: \mathcal{E}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_1$ para que actúe en $\mathcal{E}$ (y equivalentemente $\mathbf{B}_{(\mathbf{2})}: \mathcal{E}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2$) es inmediata

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}$$

Donde $\mathbf{1}_{(1)}$ y $\mathbf{1}_{(2)}$ son los operadores identidad para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, respectivamente.

Es muy fácil demostrar que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$, vale decir que los operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan. Así

$$\mathbf{AB} \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle \stackrel{?}{=} \mathbf{BA} \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle$$

Entonces el lado izquierdo nos da

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle &= \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)}\right] \left[\mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle = \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)}\right] \left(\mathbf{1}_{(1)} \left|\varphi(1)\right\rangle \otimes \mathbf{B}_{(2)} \left|\chi(2)\right\rangle\right) \\
&= \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)}\right] \left(\left|\varphi(1)\right\rangle \otimes \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle\right) = \mathbf{A}_{(1)} \left|\varphi(1)\right\rangle \otimes \mathbf{1}_{(2)} \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle = \left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \otimes \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle \\
&= \left|\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\right\rangle
\end{aligned}$$

mientras que el lado derecho

$$\begin{aligned}
\mathbf{BA} \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle &= \left[\mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)}\right] \left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle = \left[\mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left(\mathbf{A}_{(1)} \left|\varphi(1)\right\rangle \otimes \mathbf{1}_{(2)} \left|\chi(2)\right\rangle\right) \\
&= \left[\mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left(\left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \otimes \left|\chi(2)\right\rangle\right) = \mathbf{1}_{(1)} \left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \otimes \mathbf{B}_{(2)} \left|\chi(2)\right\rangle = \left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \otimes \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle
\end{aligned}$$

exactamente equivalente.

11.1. Representación Matricial del Producto Tensorial

Dado dos operadores lineales $\mathbf{A}_{(\mathbf{1})}: \mathcal{E}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_1$ y $\mathbf{B}_{(\mathbf{2})}: \mathcal{E}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2$ tales que,

$$\mathbf{A}_{(1)} \left|\varphi(1)\right\rangle = \left|\tilde{\varphi}(1)\right\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}_{(2)} \left|\chi(2)\right\rangle = \left|\tilde{\chi}(2)\right\rangle$$

y $\{\left|u_i(1)\right\rangle\}$ y $\{\left|v_i(2)\right\rangle\}$ son bases ortogonales discretas para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, respectivamente. La representación matricial del operador producto tensorial $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}$ vendrá dada por

$$\left\langle \left| u^k(1)v^l(2) \right\rangle \right| \mathbf{C} \left|u_i(1)v_j(2)\right\rangle = C^{k,l}_{i,j} = \left\langle u^k(1)v^l(2) \right| \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left|u_i(1)v_j(2)\right\rangle$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
C_{i,j}^{k,l} &= \left\langle u^k(1)v^l(2)\right| \left[\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right] \left|u_i(1)v_j(2)\right\rangle = \left\langle u^k(1)v^l(2)\right| \left(\mathbf{A}_{(1)} \left|u_i(1)\right\rangle \otimes \mathbf{B}_{(2)} \left|v_j(2)\right\rangle\right) \\
&= \left\langle u^k(1)v^l(2) \left|\tilde{a}(1)\tilde{b}(2)\right.\right\rangle = \left\langle u^k(1) \left|\tilde{a}(1)\right.\right\rangle \left\langle v^l(2) \left|\tilde{b}(2)\right.\right\rangle = \left\langle u^k(1)\right| \mathbf{A}_{(1)} \left|u_i(1)\right\rangle \left\langle v^l(2)\right| \mathbf{B}_{(2)} \left|v_j(2)\right\rangle \\
C_{i,j}^{k,l} &= A_i^k B_j^l
\end{aligned}
$$

que no es otra cosa que si

$$
A_i^k = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B_j^l = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix}
$$

entonces

$$
C_{j,l}^{i,k} = \begin{pmatrix} A_1^1 B_j^i & A_2^1 B_j^i \\ A_1^2 B_j^i & A_2^2 B_j^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 & A_1^1 B_2^1 & A_2^1 B_1^1 & A_2^1 B_2^1 \\ A_1^1 B_1^2 & A_1^1 B_2^2 & A_2^1 B_1^2 & A_2^1 B_2^2 \\ A_1^2 B_1^1 & A_1^2 B_2^1 & A_2^2 B_1^1 & A_2^2 B_2^1 \\ A_1^2 B_1^2 & A_1^2 B_2^2 & A_2^2 B_1^2 & A_2^2 B_2^2 \end{pmatrix}
$$

por lo tanto para dos matrices de Pauli

$$
\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

nos quedará

$$
\sigma_1 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0\sigma_3 & 1\sigma_3 \\ 1\sigma_3 & 0\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

11.2. Algunas Propiedades del Producto Tensorial

Ahora podemos probar un par de propiedades del producto tensorial.
Estas son

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right)\left(\mathbf{C}_{(1)} \otimes \mathbf{D}_{(2)}\right) &= \left(\mathbf{A}_{(1)}\mathbf{C}_{(1)}\right) \otimes \left(\mathbf{B}_{(2)}\mathbf{D}_{(2)}\right) \\
&= \left(\left(\mathbf{A}_{(1)}\mathbf{C}_{(1)}\right) \otimes \left(\mathbf{B}_{(2)}\mathbf{D}_{(2)}\right)\right)_{j,l}^{i,k} \\
&= \left(\mathbf{A}_{(1)}\mathbf{C}_{(1)}\right)_j^i \left(\mathbf{B}_{(2)}\mathbf{D}_{(2)}\right)_l^k = \left(\mathbf{A}_{(1)}\right)_m^i \left(\mathbf{C}_{(1)}\right)_j^m \left(\mathbf{B}_{(2)}\right)_n^k \left(\mathbf{D}_{(2)}\right)_l^n \\
&= \left(\mathbf{A}_{(1)}\right)_m^i \left(\mathbf{B}_{(2)}\right)_n^k \left(\mathbf{C}_{(1)}\right)_j^m \left(\mathbf{D}_{(2)}\right)_l^n = \left(\mathbf{A}_{(1)}\mathbf{B}_{(2)}\right)_{m,n}^{i,k} \left(\mathbf{C}_{(1)}\mathbf{D}_{(2)}\right)_{j,l}^{m,n} \\
&= \left(\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right)\left(\mathbf{C}_{(1)} \otimes \mathbf{D}_{(2)}\right)
\end{aligned}
$$

La segunda propiedad es que

$$
\operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}_{(1)} \otimes \mathbf{B}_{(2)}\right) = \operatorname{Tr}\left(\mathbf{A}_{(1)}\right) \operatorname{Tr}\left(\mathbf{B}_{(2)}\right)
$$

Esto es

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}_{(1)}\otimes\mathbf{B}_{(2)}\right)=\mathrm{Tr}\left(C_{i,j}^{k,l}\right)=\mathrm{Tr}\left(A_i^k B_j^l\right)=A_i^i B_j^j=\mathrm{Tr}\left(A_i^k\right)\mathrm{Tr}\left(B_j^l\right)$$

Claramente el producto tensorial es distributivo

$$\left(\mathbf{A}_{(1)}+\mathbf{B}_{(1)}\right)\otimes\mathbf{C}_{(2)}=\mathbf{A}_{(1)}\otimes\mathbf{C}_{(2)}+\mathbf{B}_{(1)}\otimes\mathbf{C}_{(2)}$$

Dejamos al lector la demostración de esta propiedad

12. Diferenciación de Operadores

Dado un operador $\mathbf{A}(t)$ el cual supondremos dependiente de una variable arbitraria t podremos definir la derivada como

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{A}(t+\Delta t)-\mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

por lo tanto si $\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left|u_i\right\rangle=A_i^k$ entonces

$$\left\langle u^k\right|\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle=\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}\right)_i^k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k\right|\mathbf{A}(t)\left|u_i\right\rangle=\frac{\mathrm{d}A_i^k}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}A_1^1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A_2^1}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}A_n^1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}A_1^2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A_2^2}{\mathrm{d}t} & & \frac{\mathrm{d}A_n^2}{\mathrm{d}t}\\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\mathrm{d}A_1^n}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}A_2^n}{\mathrm{d}t} & & \frac{\mathrm{d}A_n^n}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}$$

con lo cual la regla es simple, la representación matricial de la derivada de un operador será la derivada de cada uno de sus elementos. Con ello

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix}x & x^2 & 2\\ 1 & e^{-x} & 5x\\ 3x^3 & 3 & \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & -e^{-x} & 5\\ 9x^2 & 0 & -\operatorname{sen}x\end{pmatrix}$$

12.1. Reglas de Diferenciación de Operadores Lineales

Las reglas usuales de la diferenciación se cumplirán con la diferenciación de operadores. Esto se demuestra con la representación matricial

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\left\langle u^k\right|\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k\right|\left(\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t)\right)\left|u_i\right\rangle\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left\langle u^k\right|\mathbf{A}(t)\left|u_i\right\rangle+\left\langle u^k\right|\mathbf{B}(t)\left|u_i\right\rangle\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k\right|\mathbf{A}(t)\left|u_i\right\rangle+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k\right|\mathbf{B}(t)\left|u_i\right\rangle\\&=\left\langle u^k\right|\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle+\left\langle u^k\right|\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}(t)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle=\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}(t)\right)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{B}(t)\right)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

Del mismo modo se cumplirá que

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{B}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\mathbf{B}\left(t\right)+\mathbf{A}\left(t\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}$$

con la precaución que no se puede modificar el orden de aparición de los operadores. Es fácil ver que

$$\begin{aligned}\left\langle u^k\right|\frac{\mathrm{d}\left(\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{B}\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left(t\right)\mathbf{1}\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle\\
&=\left(\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle\left\langle\mathbf{u}^m\right|\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle\right)\\
&=\frac{\mathrm{d}\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle}{\mathrm{d}t}\left\langle\mathbf{u}^m\right|\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle+\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle\frac{\mathrm{d}\left\langle\mathbf{u}^m\right|\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle}{\mathrm{d}t}\\
&=\left\langle u^k\right|\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{u}_m\right\rangle\left\langle\mathbf{u}^m\right|\mathbf{B}\left(t\right)\left|u_i\right\rangle+\left\langle u^k\right|\mathbf{A}\left(t\right)\left|\mathbf{u}_m\right\rangle\left\langle\mathbf{u}^m\right|\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\left|u_i\right\rangle\end{aligned}$$

Otras propiedades de la derivación de operadores se demuestran a partir de la expansión en series de los operadores. Por ejemplo si queremos conocer la expresión para $\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}$, con $\mathbf{A}\neq\mathbf{A}\left(t\right)$si recordamos que

$$e^{\mathbf{A}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle=\left[\mathbf{1}+\mathbf{A}t+\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^2}{2!}+\cdots+\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\cdots\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\left(\mathbf{A}t\right)^n}{n!}\right)\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle\\
&=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nt^{n-1}\mathbf{A}^n}{n!}\right]\left|\mathbf{v}\right\rangle=\underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}\mathbf{A}^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\right]}_{e^{\mathbf{A}t}}\mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle\end{aligned}$$

Nótese que la suma es hasta infinito, por lo tanto al cambiar de índice $p=n-1$, p sigue variando hasta infinito y la serie es la misma que la anterior. Entonces

$$\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}\left|\mathbf{v}\right\rangle\equiv\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

también fíjese que si un solo operador esta siendo derivado el orden de presentación de los operadores es indiferente. Ahora bien, cuando se presenta la siguiente situación

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle&=\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t}}{\mathrm{d}t}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle+e^{\mathbf{A}t}\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{B}t}}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle+e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle\\
&=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}e^{\mathbf{B}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle+e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{B}\left|\mathbf{v}\right\rangle\end{aligned}$$

con $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}(t)$ y siempre $\left[e^{\mathbf{B}t}, \mathbf{B}\right] = 0$. Con lo cual, sólo para el caso en el cual $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ podremos factorizar $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}$ y

$$\frac{\mathrm{d}\left(e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}\right)}{\mathrm{d}t}|\mathbf{v}\rangle = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}|\mathbf{v}\rangle$$

Si $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$ el orden de aparición de los operadores es MUY importante.

Para el caso en el cual $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ **no necesariamente** $\left[\mathbf{A}(t), e^{\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}(t)}{\mathrm{d}t}}\right] = 0$. Veamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}(t)}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{v}\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathbf{A}(t))^n}{n!}\right]|\mathbf{v}\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))^n}{\mathrm{d}t}\right)\right]|\mathbf{v}\rangle \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\left\{\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)^{n-1} + \mathbf{A}(t)\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t}\mathbf{A}(t)^{n-2}\cdots\mathbf{A}(t)^{n-1}\frac{\mathrm{d}(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t}\right\}\right)\right]|\mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

Adicionalmente

$$\text{si } [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0 \qquad \Longrightarrow [\mathbf{A}, \mathbf{F}(\mathbf{B})] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

Esta relación es fácilmente demostrable para el caso en el cual $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{1}$ el operador identidad, en ese caso teníamos que $\mathbf{AB}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} = \mathbf{nB}^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} &= \mathbf{A}\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= (\mathbf{1}+\mathbf{BA})\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{1B}^{n-1} + \mathbf{B}(\mathbf{1}+\mathbf{BA})\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= 2\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}^2(\mathbf{1}+\mathbf{BA})\underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbf{BB}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{nB}^{n-1}
\end{aligned}$$

Obviamente, para este caso, se cumple que

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{1} \qquad \Longrightarrow [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] = 0$$

para demostrar esta relación "desarrollemos en Serie de Taylor" la función $\mathbf{F}(\mathbf{B})$. Esto es

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{F}(\mathbf{B})] &= \left[\mathbf{A}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{[\mathbf{A}, \mathbf{B}^n]}{n!} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{n\mathbf{B}^{n-1}}{n!} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{\mathbf{B}^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Para el caso más general se procede del mismo modo

$$\text{si } [\mathbf{A},\mathbf{C}] = [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0 \qquad \text{con } \mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] \stackrel{?}{=} [\mathbf{A},\mathbf{B}] \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

Probaremos primero que

$$\text{si } [\mathbf{A},\mathbf{C}] = [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0 \qquad \text{con } \mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{B}^n] = \mathbf{A}\mathbf{B}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} = \mathbf{n}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{B}^{n-1}$$

Tendremos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{B}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} &= \mathbf{A}\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= (\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{A})\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{C}\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}(\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{A})\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&= 2\mathbf{C}\mathbf{B}^{n-1} + \mathbf{B}^2(\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{A})\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}\cdots\mathbf{B}}_{n}\mathbf{A} \\
&\vdots \\
&= \mathbf{n}\mathbf{C}\mathbf{B}^{n-1} = \mathbf{n}[\mathbf{A},\mathbf{B}]\,\mathbf{B}^{n-1}
\end{aligned}$$

con lo cual es inmediato demostrar que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] &= \left[\mathbf{A}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{[\mathbf{A},\mathbf{B}^n]}{n!} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{n\mathbf{B}^{n-1}}{n!} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbf{B}^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= [\mathbf{A},\mathbf{B}] \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

12.2. La Fórmula de Glauber

Ahora estamos en capacidad de demostrar limpiamente la fórmula de Glauber. Esta es

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$

Para demostrarla, procedemos a considerar un operador $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(t)}{\mathrm{d}t} |\mathbf{v}\rangle &= \frac{\mathrm{d}e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}}{\mathrm{d}t} |\mathbf{v}\rangle = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\, e^{\mathbf{B}t} |\mathbf{v}\rangle + e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{B}e^{\mathbf{B}t} |\mathbf{v}\rangle = \left(\mathbf{A} + e^{\mathbf{A}t}\, \mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right) e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} |\mathbf{v}\rangle \\
&= \left(\mathbf{A} + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right) \mathbf{F}(t) |\mathbf{v}\rangle
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\text{si } [\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = 0 \qquad \Longrightarrow [\mathbf{A},\mathbf{F}(\mathbf{B})] = [\mathbf{A},\mathbf{B}] \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t}$$

entonces

$$\left[e^{\mathbf{A}t},\mathbf{B}\right] = t\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]e^{\mathbf{A}t} \qquad \Longrightarrow e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = \mathbf{B}e^{\mathbf{A}t} + t\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]e^{\mathbf{A}t}$$

por lo cual

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(t)}{\mathrm{d}t}\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\mathbf{A} + e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}e^{-\mathbf{A}t}\right)\mathbf{F}(t)\left|\mathbf{v}\right\rangle = \left(\mathbf{A} + \mathbf{B} + t\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]e^{\mathbf{A}t}\right)\mathbf{F}(t)\left|\mathbf{v}\right\rangle$$

por tanteo uno puede darse cuenta que

$$\mathbf{F}(t) = e^{\left\{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t + \frac{t^2}{2}\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]\right\}}$$

cumple con la ecuación anterior, por lo tanto absorbiendo t en los operadores correspondientes llegamos a la fórmula de Glauber

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right]}$$

Referencias

[1] Apostol, T. M. (1972) **Calculus** Vol 2 (*Reverté Madrid*) `QA300 A66C3 1972`

[2] Arfken, G. B. y Weber, H. (2000) **Mathematical Methods for Physicists** 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)

[3] Cohen-Tannoudji, C., Diu B. y Laloë (1977) **Quantum Mechanics** Vol 1 (*John Wiley Interscience, Nueva York*)

[4] Gel´fand, I.M. (1961) **Lectures on Linear .Algebra** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[5] Jordan, T.F. (1969) **Linear Operator for Quantum Mechanics** (*John Wiley & Sons Interscience, Nueva York*).

[6] Schutz, B. (1980) **Geometrical Methods in Mathematical Physics** (*Cambridge University Press, Londres*)