**Métodos Matemáticos de la Física 1**
**Examen Parcial**
**Espacios Lineales**
Abril 2004

Nombre________________________________________________

1. Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensión $N_1$ y $N_2$, respectivamente. A estos espacios pertenecen $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ vectores genéricos. Nótese que los índices (1) y (2) denotan la pertenencia al espacio respectivo. Se define el producto tensorial de espacios vectoriales, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ le asociamos un vector

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle$$

y cumple con las siguientes propiedades:

(a) La suma entre vectores de $\mathcal{E}$ viene definida como

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \end{aligned}$$

(b) El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales $\lambda$ y $\mu$

$$\begin{aligned} [|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda\,|\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\,[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \lambda\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle \\ |\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\,|\chi(2)\rangle] = \mu\,[|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \mu\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

(c) El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle \\ [|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

**Muestre que**,

(a) $\mathcal{E}$ también es un espacio vectorial (4 ptos.)
Para ello debemos demostrar los axiomas o propiedades de los espacios vectoriales. Vemos:

1. La operación suma $\boxplus$ es cerrada en $\mathbf{V} : \forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
Esto se traduce en demostrar que sumados dos vectores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\zeta(1)\xi(2)\rangle \in \mathcal{E}$ el vector suma también pertenece a $\mathcal{E}$,$a$ y $b$ pertenecientes al campo del espacio vectorial

$$a\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle + b\,|\zeta(1)\xi(2)\rangle = |a\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + b\xi(2)\rangle$$

y esto se cumple siempre ya que, el producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales y por ser $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ espacios vectoriales se cumple

$$\left.\begin{array}{l} |a\varphi(1) + \zeta(1)\rangle = a\,|\varphi(1)\rangle + |\zeta(1)\rangle \in \mathcal{E}_1 \\ \\ |\varphi(2) + b\zeta(2)\rangle = |\varphi(2)\rangle + b\,|\zeta(2)\rangle \in \mathcal{E}_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$$

2. La operación suma $\boxplus$ es conmutativa y asociativa
   1. $\forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{v}_i\rangle$
   Esta primera es clara de la definición de suma

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle$$

$$|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\zeta(1) + \varphi(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle$$

   por ser $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos espacios vectoriales

2. $\forall\ |\mathbf{v}_i\rangle, |\mathbf{v}_j\rangle, |\mathbf{v}_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus (|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_k\rangle)$
   una vez más esto se traduce en

$$(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle)$$

   con lo cual, por la definición de suma queda expresado como

$$(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) + |\varkappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1) + \varkappa(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \kappa(2)\rangle)$$

$$|(\varphi(1) + \zeta(1)) + \varkappa(1)\rangle \otimes |(\xi(2) + \chi(2)) + \kappa(2)\rangle = |\varphi(1) + (\zeta(1) + \varkappa(1))\rangle \otimes |\xi(2) + (\chi(2) + \kappa(2))\rangle$$

3. Existe un único elemento neutro: $\exists!\ |\mathbf{0}\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{0}\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |\mathbf{0}\rangle = |\mathbf{v}_j\rangle \quad \forall\ |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V}$
   La traducción de esto es...

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |0(1)0(2)\rangle = |\varphi(1) + 0(1)\rangle \otimes |\chi(2) + 0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle$$

4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de $\mathbf{V}$ :
   $\forall\ |\mathbf{v}_j\rangle \in \mathbf{V} \quad \exists\ |-\mathbf{v_j}\rangle \quad \ni \quad |\mathbf{v}_j\rangle \boxplus |-\mathbf{v}_j\rangle = |\mathbf{0}\rangle$
   esto es...

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle - |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1) - \varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2) - \chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle = |0(1)0(2)\rangle$$

5. $\alpha(\beta|\mathbf{v}_i\rangle) = (\alpha\beta)|\mathbf{v}_i\rangle$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta|\varphi(1)\chi(2)\rangle) &= \alpha(|\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle) = |\alpha\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle \\ &= (\alpha\beta)|\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)|\varphi(1)\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

6. $(\alpha+\beta)|\mathbf{v}_i\rangle = \alpha|\mathbf{v}_i\rangle + \beta|\mathbf{v}_i\rangle$

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)|\varphi(1)\chi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |(\alpha+\beta)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\alpha\chi(2) + \beta\chi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1)\rangle \otimes [(\alpha|\chi(2)\rangle + \beta|\chi(2)\rangle)] \\ &= \alpha|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + \beta|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

7. $\alpha(|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus |\mathbf{v}_j\rangle) = \alpha|\mathbf{v}_i\rangle \boxplus \alpha|\mathbf{v}_j\rangle$

$$\begin{aligned} \alpha(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) &= \alpha(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) \\ &= |\alpha(\varphi(1) + \zeta(1))\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= |\alpha\varphi(1) + \alpha\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ &= (|\alpha\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\alpha\zeta(1)\xi(2)\rangle) \\ &= \alpha|\varphi(1)\chi(2)\rangle + \alpha|\zeta(1)\xi(2)\rangle \end{aligned}$$

(b) Si existen productos internos definidos en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ entonces muestre

$$\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\ |\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\ |\chi(2)\rangle$$

si es una buena definición de producto interno (4 ptos.).
Suponga que $\cdot$ representa la multiplicación estándar entre números reales.
Para ello debemos demostrar los axiomas o propiedades de los prodctos internos. Vemos, las propiedades que definen el producto interno son:

1. $\langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle \quad \in\Re \quad \wedge \quad \langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle \geq 0 \quad \forall\ |\mathbf{x}\rangle \in \mathbf{V} \qquad \text{si} \quad \langle\mathbf{x}|\ \mathbf{x}\rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$
   Esto es:

$$\langle\varphi(1)\chi(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\varphi(1)\ |\varphi(1)\rangle \cdot \langle\chi(2)\ |\chi(2)\rangle$$

   como $\langle\varphi(1)\ |\varphi(1)\rangle$ y $\langle\chi(2)\ |\chi(2)\rangle$ son buenas definiciones de producto interno tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} \langle\varphi(1)\ |\varphi(1)\rangle \geq 0 \\ \\ \langle\chi(2)\ |\chi(2)\rangle \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle\varphi(1)\chi(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle \geq 0$$

por lo cual **SI se cumple esta propiedad.** Aquí vale la pena mencionar algunos puntos sutiles sobre la segunda parte de la propiedad a demostrar:
si $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow |\mathbf{x}\rangle \equiv |\mathbf{0}\rangle$ lo cual para este caso se traducen en

$$\langle \varphi(1)\chi(2) \, |\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\rangle = \langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle \cdot \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0$$

$$\langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle \cdot \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle = 0 \\ \\ \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |\tilde{\varphi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \\ \left. \begin{array}{c} \langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle \neq 0 \\ \\ \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |\tilde{\chi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \\ \left. \begin{array}{c} \langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle = 0 \\ \\ \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |\tilde{\varphi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \\ \\ |\tilde{\chi}(1)\rangle = |0(1)\rangle \end{array} \right. \end{array} \right.$$

definitivamente, habría que restringir los posibles vectores que intervienen en el producto tensorial, de modo que no fuera posible vectores del tipo

$$|\varphi(1)0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle \qquad \text{o} \qquad |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$$

**sólo así se cumple la propiedad mencionada**.

2. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle^* \quad \forall \; |\mathbf{x}\rangle , |\mathbf{y}\rangle \in \mathbf{V}$
   Esto puede ser demostrado fácilmente como sigue

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\varphi(1)\chi(2)\rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle \\ &= \langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle^* \cdot \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle^* \\ &= (\langle \varphi(1) \, |\tilde{\varphi}(1)\rangle \cdot \langle \chi(2) \, |\tilde{\chi}(2)\rangle)^* \\ &= \langle \varphi(1)\chi(2) \, |\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\rangle^* \end{aligned}$$

   por lo cual **SI se cumple esta propiedad.**

3. $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle \quad \wedge \quad \langle \mathbf{x} + \mathbf{z} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z} | \mathbf{y} \rangle \quad \forall \; |\mathbf{x}\rangle , |\mathbf{y}\rangle , |\mathbf{z}\rangle \in \mathbf{V}$
   Una vez más

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \left[ |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle \right] &= \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) | \left[ |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \right] \\ &= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2) + \chi(2)\rangle \end{aligned}$$

   y otra vez, como $\langle \varphi(1) \, |\varphi(1)\rangle$ y $\langle \chi(2) \, |\chi(2)\rangle$ son buenas definiciones de producto interno tendremos que:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle &= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \\ \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2) + \chi(2)\rangle &= \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

   con lo cual

$$\langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \cdot \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2) + \chi(2)\rangle = \left( \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \right) \left( \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle \right)$$

   entonces

$$= \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \, \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\varphi(1)\rangle \, \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \, \langle \tilde{\chi}(2) \, |\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1) \, |\zeta(1)\rangle \, \langle \tilde{\chi}(2) \, |\chi(2)\rangle$$

   finalmente el lado derecho se cumple que

$$= \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\varphi(1)\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\varphi(1)\chi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\zeta(1)\xi(2)\rangle + \langle \tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2) \, |\zeta(1)\chi(2)\rangle$$

mientras que el lado izquierdo

$$\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)|\left[|\varphi(1)\chi(2)\rangle+|\zeta(1)\xi(2)\rangle\right]=$$
$$\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle+\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\zeta(1)\xi(2)\rangle=$$

por lo cual **NO se cumple esta propiedad** y no hay forma de enmedarla.

4. $\langle\mathbf{x}|\ \alpha\mathbf{y}\rangle=\alpha\langle\mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle \quad \wedge \quad \langle\alpha\mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle=\alpha^*\langle\mathbf{x}|\ \mathbf{y}\rangle \quad \forall\ |\mathbf{x}\rangle,|\mathbf{y}\rangle\in\mathbf{V} \quad \wedge \quad \alpha\in\mathbf{K}$
la traducción sería

$$\begin{aligned}\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\alpha\varphi(1)\chi(2)\rangle &= \langle\tilde{\varphi}(1)\ |\alpha\varphi(1)\rangle\cdot\langle\tilde{\chi}(2)\ |\chi(2)\rangle=\alpha\langle\tilde{\varphi}(1)\ |\varphi(1)\rangle\cdot\langle\tilde{\chi}(2)\ |\chi(2)\rangle\\ &=\alpha\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle\end{aligned}$$

por lo cual **SI se cumple esta propiedad.**

5. $\langle\mathbf{x}|\ \mathbf{0}\rangle=\langle\mathbf{0}|\ \mathbf{x}\rangle=0$
Probar esta propiedad es inmediata.

$$\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |0(1)0(2)\rangle=\langle\tilde{\varphi}(1)\ |0(1)\rangle\cdot\langle\tilde{\chi}(2)\ |0(2)\rangle=0$$
$$\langle 0(1)0(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle=\langle 0(1)\ |\varphi(1)\rangle\cdot\langle 0(2)\ |\chi(2)\rangle$$

por lo cual **SI se cumple esta propiedad.** Nótese que en este caso no hay problemas con los vectores con componentes cero, vale decir $|0(1)\chi(2)\rangle$ o $|\varphi(1)0(2)\rangle$, por cuanto la afirmación es que $\langle\mathbf{x}|\ \mathbf{0}\rangle=\langle\mathbf{0}|\ \mathbf{x}\rangle=0$.

(c) Si $|u_i(1)\rangle$ y $|v_i(2)\rangle$ son vectores bases para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, respectivamente, entonces

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle=|u_i(1)\rangle\otimes|v_j(2)\rangle$$

es base para $\mathcal{E}$ y de esta forma

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle=|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle=a^ib^j\,|u_i(1)v_j(2)\rangle$$

donde $a_i$ y $b_j$ son las componentes de $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ en sus respectivas bases. Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^k\,|v_k\rangle=\sum_{k=1}^n c^k\,|v_k\rangle$ (4 ptos.).
Si $|u_i(1)\rangle$ y $|v_i(2)\rangle$ son vectores bases para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, entonces cualquier par genérico de vectores $|\varphi(1)\rangle\in\mathcal{E}_1\wedge|\chi(2)\rangle\in\mathcal{E}_2$ se pueden escribir como combinaciones lineales $|\varphi(1)\rangle=c^i\,|u_i(1)\rangle\wedge|\chi(2)\rangle=a^k\,|v_k(2)\rangle$, respectivamente. Por consiguiente:

$$|\varphi(1)\rangle\otimes|\chi(2)\rangle=c^i\,|u_i(1)\rangle\otimes a^k\,|v_k(2)\rangle=c^ia^k\,|u_i(1)v_k(2)\rangle$$

2. Muestre que

(a) Considerando $\vec{\nabla}=\hat{\imath}\frac{\partial(\circ)}{\partial x}+\hat{\jmath}\frac{\partial(\circ)}{\partial y}+\hat{\mathrm{k}}\frac{\partial(\circ)}{\partial z}$

1. $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\varphi\left(x,y,z\right)\times\vec{\nabla}\phi\left(x,y,z\right)\right)=0$ (3 puntos)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\varphi\left(x,y,z\right)\times\vec{\nabla}\phi\left(x,y,z\right)\right) &= \partial_i\left(\epsilon^{ijk}\partial_j\varphi\left(x,y,z\right)\partial_k\phi\left(x,y,z\right)\right)=\epsilon^{ijk}\partial_i\left(\partial_j\varphi\left(x,y,z\right)\partial_k\phi\left(x,y,z\right)\right)\\ &=\epsilon^{ijk}\partial_i\left(\partial_j\varphi\right)\partial_k\phi+\epsilon^{ijk}\partial_j\varphi\partial_i\left(\partial_k\phi\right)\end{aligned}$$

como las segundas derivadas son iguales, $\partial_i\partial_j\left(\circ\right)=\partial_j\partial_i\left(\circ\right)$ podemos escribir

$$\partial_i\left(\epsilon^{ijk}\partial_j\varphi\partial_k\phi\right)=\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}\left[\left(\partial_i\partial_j\varphi\right)\partial_k\phi+\left(\partial_j\partial_i\varphi\right)\partial_k\phi\right]+\epsilon^{ijk}\frac{1}{2}\left[\partial_j\varphi\left(\partial_i\partial_k\phi\right)+\partial_j\varphi\left(\partial_k\partial_i\phi\right)\right]$$

y los índices sumados son mudos

$$\partial_i\left(\epsilon^{ijk}\partial_j\varphi\partial_k\phi\right)=\frac{1}{2}\left[\underbrace{\epsilon^{ijk}\left(\partial_i\partial_j\varphi\right)\partial_k\phi+\epsilon^{jik}\left(\partial_j\partial_i\varphi\right)\partial_k\phi}_{=0}\right]+\frac{1}{2}\left[\underbrace{\epsilon^{ijk}\partial_j\varphi\left(\partial_i\partial_k\phi\right)+\epsilon^{kji}\partial_j\varphi\left(\partial_k\partial_i\phi\right)}_{=0}\right]$$

claramente se anulan los término dentro de los corchetes por cuanto $\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ijk}$ Esto pudo háberse dicho más directo. Cuando dos tensores están contraídos en un conjunto de índices y uno de ellos es antisimétrico respecto a la permutación de índices (en este caso $\epsilon^{ijk}$ símbolo de Levi-Civita) y el otro es simétrico respecto a la permutación de los mismos índices (contraidos) con los cuales el tensor anterior es antisimétrico (en este caso el tensor simétrico son las derivadas cruzadas $\partial_i \partial_j (\circ) = \partial_j \partial_i (\circ)$) entonces uno puede decir, sin lugar a dudas, que esa contracción de tensores SE ANULA.

2. $\vec{\nabla} \times \left(\varphi(x,y,z)\, \vec{\nabla}\varphi(x,y,z)\right) = 0$ (3 puntos)
   Siguiendo el mismo procedimiento anterior tenemos que

$$\vec{\nabla} \times \left(\varphi(x,y,z)\, \vec{\nabla}\varphi(x,y,z)\right) = \epsilon^{ijk} \partial_j \left(\varphi(x,y,z)\, \partial_k \varphi(x,y,z)\right) = \epsilon^{ijk} \left[\partial_j \varphi \partial_k \varphi + \varphi \left(\partial_j \partial_k \varphi\right)\right]$$

   es evidente que $\partial_j \varphi \partial_k \varphi + \varphi(\partial_j \partial_k \varphi)$ es simétrico respecto a cambio de índices $j, k$ y que $\epsilon^{ijk}$ es antisimétrico. Por lo tanto se anula

(b) si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas $3 \times 3$, $\vec{1} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$ y dado que $\det(A) = \epsilon^{ijk} 1_i a_{jk}$ muestre que (3 ptos)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Si el $\det(A) = \epsilon^{ijk} 1_i a_{jk}$ entonces

$$\det(AB) = \det\left(\underbrace{a^i_k b^k_j}_{c^i_j}\right) = \epsilon^{ijk} 1_i c_{jk} = \left(\epsilon^{ijk} 1_i a_{jk}\right)\left(\epsilon^{ijk} 1_i b_{jk}\right)$$