Métodos Matemáticos 1
Solución al Examen Parcial
Tensores y Coordenadas
Diciembre 2004

Nombre____

1. Hallar las componentes cartesianas del vector que, en coordenadas cilíndricas, tiene las siguiente componentes $(1, -1, 3)$ (3 ptos.)
   Solución
   Ese vector en coordenadas cilíndricas se puede escribir como: $\vec{V} = \hat{\mathbf{u}}_r - \hat{\mathbf{u}}_\varphi + 3\hat{\mathbf{u}}_z$
   En general, las componentes de los vectores transforman como

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial\ \tilde{x}^i\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \tilde{a}^1 = \dfrac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k \\ \\ \tilde{a}^2 = \dfrac{\partial\ \tilde{x}^2\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k \\ \\ \tilde{a}^3 = \dfrac{\partial\ \tilde{x}^3\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k \end{array} \right\} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{c} \tilde{x}^1 = x \\ \\ \tilde{x}^2 = y \\ \\ \tilde{x}^3 = z \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{c} x^1 = r \\ \\ x^2 = \varphi \\ \\ x^3 = z \end{array} \right\}$$

y la ley de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas es

$$x = x\left(r,\varphi\right) = r\cos\varphi; \quad y = y\left(r,\varphi\right) = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \text{y} \quad z = z$$

con lo cual es fácil identificar

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial\ x(r,\varphi)}{\partial\ r} = \cos\varphi \\ \\ \frac{\partial\ y(r,\varphi)}{\partial\ r} = \mathrm{sen}\,\varphi \\ \\ \frac{\partial\ z}{\partial\ r} = 0 \end{array} \right); \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\ x(r,\varphi)}{\partial\ \varphi} = -r\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \\ \frac{\partial\ y(r,\varphi)}{\partial\ \varphi} = r\cos\varphi \\ \\ \frac{\partial\ z}{\partial\ \varphi} = 0 \end{array} \right); \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{c} \frac{\partial\ x(r,\varphi)}{\partial\ z} = 0 \\ \\ \frac{\partial\ y(r,\varphi)}{\partial\ z} = 0 \\ \\ \frac{\partial\ z}{\partial\ z} = 1 \end{array} \right)$$

con lo cual

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k = \frac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^1}\ a^1 + \frac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^2}\ a^2 + \frac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^3}\ a^3$$

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial\ x\left(r,\varphi\right)}{\partial\ r}\left(1\right) + \frac{\partial\ x\left(r,\varphi\right)}{\partial\ \varphi}\left(-1\right) = \cos\varphi + r\sin\varphi = \cos\left(-1\right) + 1\sin\left(-1\right) = -0{,}30117$$

del mismo modo

$$\tilde{a}^2 = \frac{\partial\ y\left(r,\varphi\right)}{\partial\ r}\left(1\right) + \frac{\partial\ y\left(r,\varphi\right)}{\partial\ \varphi}\left(-1\right) = \sin\varphi - r\cos\varphi = \sin\left(-1\right) - \left(1\right)\cos\left(1\right) = -1{,}3818$$

$$\tilde{a}^3 = 3$$

con lo cual $\vec{V} = \hat{\mathbf{u}}_r - \hat{\mathbf{u}}_\varphi + 3\hat{\mathbf{u}}_z = -0{,}30117\ \hat{\imath} - 1{,}3818\ \hat{\jmath} + 3\ \hat{\mathbf{k}}$

2. En coordenadas cilíndricas un vector tiene por componentes $(0, \sin\varphi, z)$.
Calcular:

a) La divergencia en coordenadas esféricas (3 ptos.)
Solución
Una vez más $\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right) \rightleftharpoons (r, \theta, \varphi)$ y $\left(x^1, x^2, x^3\right) \rightleftharpoons (\rho, \varphi, z)$

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k; \qquad \tilde{a}^2 = \frac{\partial\ \tilde{x}^2\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k; \qquad \tilde{a}^3 = \frac{\partial\ \tilde{x}^3\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k$$

donde x^1, con

$$r = \sqrt{z^2+\rho^2}; \qquad \theta = \arctan\left(\tfrac{\rho}{z}\right) \qquad \varphi = \varphi$$

$$\rho = r\sin\theta \qquad \varphi = \varphi \qquad z = r\cos\theta$$

con lo cual

$$\tilde{a}^1 = \frac{\partial\ \tilde{x}^1\left(x^m\right)}{\partial\ x^k}\ a^k = \frac{\partial\ \sqrt{z^2+\rho^2}}{\partial\ z}\ z = \frac{z^2}{\sqrt{\left(z^2+\rho^2\right)}} = \frac{\left(r\cos\theta\right)^2}{\sqrt{\left(r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2}} = r\cos^2\theta$$

$$\tilde{a}^2 = \frac{\partial\ \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial\ z}\ z =: \frac{-\rho z}{z^2+\rho^2} = \frac{-r^2\sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right)}{\left(r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\tilde{a}^2 = \sin\varphi$$

de modo que el campo vectorial, en esféricas

$$(0, \sin\varphi, z) \qquad \rightleftharpoons \qquad \left(r\cos^2\theta, -\sin\theta\cos\theta, \sin\varphi\right)$$

y la divergencia

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(\left(r^2\sin\theta\right)r\cos^2\theta\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\left(r\sin\theta\right)\left(-\sin\theta\cos\theta\right)\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(\left(r\right)\left(\sin\varphi\right)\right)}{\partial\varphi}\right)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{3r\sin\theta\cos^2\theta - 3\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta + \cos\varphi}{r\sin\theta}$$

b) El rotor en coordenadas cartesianas (3 ptos.)
Solución
Ahora $\left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right) \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $\left(x^1, x^2, x^3\right) \rightleftharpoons (\rho, \varphi, z)$ con

$$x = \rho\cos\varphi; \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) \qquad z = z$$

de allí se sigue si las componentes de en cilíndricas $\vec{A} \rightleftharpoons (0, \sin\varphi, z)$

$$\tilde{a}_x = \frac{\partial\ (\rho\cos\varphi)}{\partial\ \varphi}\ \sin\varphi = -\rho\ \left(1+\cos^2\varphi\right) = -\sqrt{x^2+y^2}\left(1+\cos^2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right) = -\frac{\left(2x^2+y^2\right)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\tilde{a}_y = \frac{\partial\rho\sin\varphi}{\partial\ \varphi}\sin\varphi = \rho\cos\varphi\sin\varphi = \sqrt{x^2+y^2}\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

$$\tilde{a}_z = z$$

y el rotor

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\imath}\ \left(\frac{\partial\tilde{a}_z}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{a}_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\ \left(\frac{\partial\tilde{a}_x}{\partial z} - \frac{\partial\tilde{a}_z}{\partial x}\right) + \hat{\mathbf{k}}\ \left(\frac{\partial\tilde{a}_y}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{a}_x}{\partial y}\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{\mathbf{k}}\ \left(\frac{\partial\left(\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(-\frac{\left(2x^2+y^2\right)}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)}{\partial y}\right) = \frac{2y^3\hat{\mathbf{k}}}{\left(\sqrt{(x^2+y^2)}\right)^3}$$

3. Muestre la relación
$$\Delta\vec{a} \equiv \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$$
y a partir de ella encuentre las componentes del Laplaciano $\Delta\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas (4 ptos.)
Solución
En coordenadas cartesianas tendremos que

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \partial^i\left(\partial^j a_j\right)|\mathbf{e}_i\rangle - \varepsilon^{ijk}\left[\partial_j\left(\varepsilon_{klm}\partial^l a^m\right)\right]|\mathbf{e}_i\rangle = \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right) - \left(\delta^i_l\delta^j_m - \delta^j_l\delta^i_m\right)\partial_j\left(\partial^l a^m\right)\right]|\mathbf{e}_i\rangle$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} == \left[\partial^i\left(\partial^j a_j\right) - \partial_j\left(\partial^i a^j\right) + \partial_j\left(\partial^j a^i\right)\right]|\mathbf{e}_i\rangle = \left[\partial_j\partial^j a^i\right]|\mathbf{e}_i\rangle$$

Para encontrar la expresión del Laplaciano de un vector en coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\Delta\vec{a} = \Delta a_x\hat{\imath} + \Delta a_y\hat{\jmath} + \Delta a_z\hat{\mathbf{k}} = \Delta a_x\left(\cos\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle - \sin\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle\right) + \Delta a_y\left(\sin\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle + \cos\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle\right) + \Delta a_z\,|\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

$$\Delta\vec{a} = \left(\Delta a_x\cos\varphi + \Delta a_y\sin\varphi\right)|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle + \left(\Delta a_y\cos\varphi - \Delta a_x\sin\varphi\right)|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle + \Delta a_z\,|\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

ya que

$$\hat{\imath} = \cos\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle - \sin\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle \qquad \hat{\jmath} = \sin\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_r\rangle + \cos\varphi\,|\tilde{\mathbf{e}}_\varphi\rangle \qquad \hat{\mathbf{k}} = |\tilde{\mathbf{e}}_z\rangle$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \qquad z = z$$

Nótese que

$$\Delta a_x = \partial_j\partial^j a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \qquad \Delta a_y = \partial_j\partial^j a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}$$

$$\Delta a_z = \partial_j\partial^j a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}$$

son las componentes **cartesianas**

4. Considere, que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Definimos dos operadores $\mathbf{L}_z$y $\mathbf{S}$ de la siguiente manera

$$\mathbf{L}_z |u_1\rangle = |u_1\rangle ; \qquad \mathbf{L}_z |u_2\rangle = 0; \qquad \mathbf{L}_z |u_3\rangle = -|u_3\rangle$$
$$\mathbf{S} |u_1\rangle = |u_3\rangle ; \qquad \mathbf{S} |u_2\rangle = |u_2\rangle ; \qquad \mathbf{S} |u_3\rangle = |u_1\rangle$$

a) Encuentre la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ del operador: $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$ (3 ptos.)
Solución La matriz será

$$\begin{pmatrix} \langle u^1| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_1\rangle & \langle u^1| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_2\rangle & \langle u^1| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_3\rangle \\ \langle u^2| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_1\rangle & \langle u^2| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_2\rangle & \langle u^2| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_3\rangle \\ \langle u^3| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_1\rangle & \langle u^3| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_2\rangle & \langle u^3| \mathbf{L}_z\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_3\rangle \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{pmatrix} \langle u^1| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_1\rangle - \langle u^1| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_1\rangle & \langle u^1| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_2\rangle - \langle u^1| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_2\rangle & \langle u^1| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_3\rangle - \langle u^1| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_3\rangle \\ \langle u^2| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_1\rangle - \langle u^2| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_1\rangle & \langle u^2| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_2\rangle - \langle u^2| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_2\rangle & \langle u^2| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_3\rangle - \langle u^2| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_3\rangle \\ \langle u^3| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_1\rangle - \langle u^3| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_1\rangle & \langle u^3| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_2\rangle - \langle u^3| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_2\rangle & \langle u^3| \mathbf{L}_z\mathbf{S} |u_3\rangle - \langle u^3| \mathbf{S}\mathbf{L}_z |u_3\rangle \end{pmatrix}$$

de donde

$$\langle u^i| [\mathbf{L}_z, \mathbf{S}] |u_j\rangle = \begin{pmatrix} 0-0 & 0-0 & 1-(-1) \\ 0-0 & 0-0 & 0-0 \\ (-1)-1 & 0-0 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{L}_z, \mathbf{S}$ y $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$ serán biyectivas (3 ptos.)
Solución
Por definición $\mathbf{S}$ es biyectivas ya que cada vector tiene su imagen, $\mathbf{L}_z$ no lo es por cuanto el vector $|u_2\rangle$ no tiene imagen y, finalmente $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$ tampoco será biyectiva dado que $\langle u^i| [\mathbf{L}_z, \mathbf{S}] |u_j\rangle$ no tiene inversa ya que del det $\left[\langle u^i| [\mathbf{L}_z, \mathbf{S}] |u_j\rangle\right] = 0$

c) Encuentre la dimensión del Dominio, del Rango y del núcleo de la transformaciones $\mathbf{L}_z, \mathbf{S}$ y $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$ (3 ptos.).
Solución

	Dominio	**Rango**	**Núcleo**
$\mathbf{L}_z$	3	2	1
$\mathbf{S}$	3	3	0
$[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$	3	2	2

dado que $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}] |u_2\rangle = 0$

5. Encuentre la expresión matricial para los operadores lineales de Pauli $\Re^2 \longmapsto \Re^2$ dado que actúan como (4 puntos)

$$\sigma_z |+\rangle = |+\rangle, \qquad \sigma_z |-\rangle = -|-\rangle$$
$$\sigma_x |+\rangle_x = |+\rangle_x, \qquad \sigma_x |-\rangle_x = -|-\rangle_x$$
$$\sigma_y |+\rangle_y = |+\rangle_y, \qquad \sigma_y |-\rangle_y = -|-\rangle_y$$

con

$$
\begin{aligned}
|+\rangle &\leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |-\rangle &\leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|+\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right], & |-\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - |-\rangle\right] \\
|+\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + i\,|-\rangle\right], & |-\rangle_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle - i\,|-\rangle\right]
\end{aligned}
$$

ahora bien

$$
{}_x\langle + |+\rangle_x = 1 \qquad {}_x\langle + |-\rangle_x = {}_x\langle - |+\rangle_x = 0 \qquad {}_x\langle - |-\rangle_x = 1
$$

$$
{}_y\langle + |+\rangle_y = 1 \qquad {}_y\langle + |-\rangle_y = {}_y\langle - |+\rangle_y = 0 \qquad {}_y\langle - |-\rangle_y = 1
$$

Es decir las los vectores $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ y $\left\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\right\}$ forman bases ortonormales, por lo que los vectores $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se pueden expresar en término de esas bases como

$$
|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right] \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right]
$$

$$
|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right] \qquad |-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right]
$$

Así las expresiones matriciales serán

$$
(\sigma_z)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\,\sigma_z\,|+\rangle & \langle +|\,\sigma_z\,|-\rangle \\ \langle -|\,\sigma_z\,|+\rangle & \langle -|\,\sigma_z\,|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(\sigma_x)^i_j &= \begin{pmatrix} \langle +|\,\sigma_x\,|+\rangle & \langle +|\,\sigma_x\,|-\rangle \\ \langle -|\,\sigma_x\,|+\rangle & \langle -|\,\sigma_x\,|-\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| + {}_x\langle -|\right]\sigma_x\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right] & \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| + {}_x\langle -|\right]\sigma_x\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right] \\ \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| - {}_x\langle -|\right]\sigma_x\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right] & \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| - {}_x\langle -|\right]\sigma_x\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| + {}_x\langle -|\right]\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right] & \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| + {}_x\langle -|\right]\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right] \\ \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| - {}_x\langle -|\right]\left[|+\rangle_x - |-\rangle_x\right] & \frac{1}{2}\left[{}_x\langle +| - {}_x\langle -|\right]\left[|+\rangle_x + |-\rangle_x\right] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
(\sigma_x)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
(\sigma_y)^i_j = \begin{pmatrix} \langle +|\,\sigma_y\,|+\rangle & \langle +|\,\sigma_y\,|-\rangle \\ \\ \langle -|\,\sigma_y\,|+\rangle & \langle -|\,\sigma_y\,|-\rangle \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[{}_y\langle +| +{}_y\langle -|\right]\sigma_y\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right] & \frac{-i}{2}\left[{}_y\langle +| +{}_y\langle -|\right]\sigma_y\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right] \\ \\ \frac{i}{2}\left[{}_y\langle +| -{}_y\langle -|\right]\sigma_y\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right] & \frac{1}{2}\left[{}_y\langle +| -{}_y\langle -|\right]\sigma_y\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right] \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[{}_y\langle +| +{}_y\langle -|\right]\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right] & \frac{-i}{2}\left[{}_y\langle +| +{}_y\langle -|\right]\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right] \\ \\ \frac{i}{2}\left[{}_y\langle +| -{}_y\langle -|\right]\left[|+\rangle_y - |-\rangle_y\right] & \frac{-1}{2}\left[{}_y\langle +| -{}_y\langle -|\right]\left[|+\rangle_y + |-\rangle_y\right] \end{pmatrix}
$$

$$
(\sigma_y)^i_j = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ \\ i & 0 \end{pmatrix}
$$