Métodos Matemáticos de la Física 1
Examen Parcial 2
Tensores y Coordenadas
Noviembre 2004

Nombre______________________________

1. Dado el sistema de coordenadas parabólicas

$$x = \xi\eta\cos\varphi; \qquad y = \xi\eta \operatorname{sen}\varphi; \qquad z = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \xi^2\right)$$

Exprese el diferencial de volumen $\mathbf{d}v = \mathbf{d}x\ \mathbf{d}y\ \mathbf{d}z$ en estas coordenadas (3 ptos.)
Solución
Hay varias maneras de resolver este problema. La más intuitiva es que, dado que las coordenadas parabólicas son un sistema de coordenadas ortogonales es multiplicar largo, por ancho, alto con las longitudes de arco en cada una de las direcciones ortogonales. Esto es

$$\mathbf{d}s^2 = \tilde{g}_{nu}\mathbf{d}q^n\mathbf{d}q^u \quad = \tilde{g}_{11}\left(\mathbf{d}q^1\right)^2 + \tilde{g}_{22}\left(\mathbf{d}q^2\right)^2 + \tilde{g}_{33}\left(\mathbf{d}q^3\right)^2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{d}s^2_{\to 1} = \tilde{g}_{11}\left(\mathbf{d}q^1\right)^2 \\ \\ \mathbf{d}s^2_{\to 2} = \tilde{g}_{22}\left(\mathbf{d}q^2\right)^2 \\ \\ \mathbf{d}s^2_{\to 3} = \tilde{g}_{33}\left(\mathbf{d}q^3\right)^2 \end{cases}$$

por consiguiente

$$\mathbf{d}v = \left(\mathbf{d}s_{\to 1}\right)\left(\mathbf{d}s_{\to 2}\right)\left(\mathbf{d}s_{\to 3}\right) = \sqrt{\tilde{g}_{11}}\mathbf{d}q^1\sqrt{\tilde{g}_{22}}\mathbf{d}q^2\sqrt{\tilde{g}_{33}}\mathbf{d}q^3 = h_1h_2h_3\mathbf{d}q^1\mathbf{d}q^2\mathbf{d}q^3$$

con

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1}\right\| = \sqrt{\tilde{g}_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\ x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^1}\right)^2}$$

$$h_2 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2}\right\| = \sqrt{\tilde{g}_{22}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\ x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^2}\right)^2}$$

$$h_3 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^3}\right\| = \sqrt{\tilde{g}_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\ x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^3}\right)^2}$$

por lo cual dado que $|\mathbf{r}\rangle = x\left(\eta,\xi,\varphi\right)|\mathbf{i}\rangle + y\left(\eta,\xi,\varphi\right)|\mathbf{j}\rangle + z\left(\eta,\xi\right)|\mathbf{k}\rangle$

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1}\right\| = \sqrt{\tilde{g}_{11}} = \sqrt{\left(\eta\cos\varphi\right)^2 + \left(\eta\sin\varphi\right)^2 + \left(\xi\right)^2} = \sqrt{\left(\eta^2+\xi^2\right)}$$

$$h_2 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2}\right\| = \sqrt{\tilde{g}_{22}} = \sqrt{\left(\xi\cos\varphi\right)^2 + \left(\xi\sin\varphi\right)^2 + \left(-\eta\right)^2} = \sqrt{\left(\eta^2+\xi^2\right)}$$

$$h_1 = \left\|\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1}\right\| = \sqrt{\tilde{g}_{11}} = \sqrt{\left(-\xi\eta\sin\varphi\right)^2 + \left(\xi\eta\cos\varphi\right)^2 + \left(0\right)^2} = \xi\eta$$

y finalmente

$$\mathbf{d}v = h_1h_2h_3\mathbf{d}\xi\mathbf{d}\eta\mathbf{d}\varphi = \xi\eta\left(\eta^2+\xi^2\right)\mathbf{d}\xi\mathbf{d}\eta\mathbf{d}\varphi$$

La otra forma de resolverlo, también intuitiva es hacer el producto mixto de los tres vectores ortogonales base sin normalizar. Esto es

$$\mathbf{d}v = \left\| \left(\mathbf{d}q^1 \frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1} \right) \bullet \left(\mathbf{d}q^2 \frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2} \times \mathbf{d}q^3 \frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^3} \right) \right\| = \mathbf{d}q^1 \mathbf{d}q^2 \mathbf{d}q^3 \left\| \frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^1} \bullet \left(\frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^2} \times \frac{\partial\ |\mathbf{r}\rangle}{\partial\ q^3} \right) \right\|$$

entonces, en general

$$\mathbf{d}v = \mathbf{d}q^1 \mathbf{d}q^2 \mathbf{d}q^3 \left(\det \begin{pmatrix} \frac{\partial\ x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^1} & \frac{\partial\ y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^1} & \frac{\partial\ z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^1} \\ \frac{\partial\ x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^2} & \frac{\partial\ y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^2} & \frac{\partial\ z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^2} \\ \frac{\partial\ x\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^3} & \frac{\partial\ y\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^3} & \frac{\partial\ z\left(q^1,q^2,q^3\right)}{\partial\ q^3} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathbf{d}q^1 \mathbf{d}q^2 \mathbf{d}q^3 \det \left(J \left(x \left(q^1, q^2, q^3 \right), y \left(q^1, q^2, q^3 \right), z \left(q^1, q^2, q^3 \right) \right) \right)$$

donde $J \left(x \left(q^1, q^2, q^3 \right), y \left(q^1, q^2, q^3 \right), z \left(q^1, q^2, q^3 \right) \right)$ es la matriz Jacobiana de la transformación. Entonces

$$\mathbf{d}v = \mathbf{d}\xi \mathbf{d}\eta \mathbf{d}\varphi \left(\det \begin{pmatrix} \eta \cos\varphi & \eta \sin\varphi & \xi \\ \xi \cos\varphi & \xi \sin\varphi & -\eta \\ -\xi\eta \sin\varphi & \xi\eta \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \right) = \xi\eta \left(\eta^2 + \xi^2 \right) \mathbf{d}\xi \mathbf{d}\eta \mathbf{d}\varphi$$

En general, el diferencial del volumen viene expresado como un producto mixto de la base ortonormal $\{|\mathbf{q}_1\rangle, |\mathbf{q}_2\rangle, |\mathbf{q}_3\rangle\}$

$$\mathbf{d}v = \left\| \left(\mathbf{d}q^1 |\mathbf{q}_1\rangle \right) \bullet \left(\mathbf{d}q^2 |\mathbf{q}_2\rangle \times \mathbf{d}q^3 |\mathbf{q}_3\rangle \right) \right\| = \mathbf{d}q^1 \mathbf{d}q^2 \mathbf{d}q^3 \left\| |\mathbf{q}_1\rangle \bullet \left(|\mathbf{q}_2\rangle \times |\mathbf{q}_3\rangle \right) \right\|$$

$$\mathbf{d}v = \mathbf{d}q_n \langle \mathbf{q}^n | \left(\epsilon^{123} \mathbf{d}q_2 \mathbf{d}q_3 |\mathbf{q}_1\rangle \right) = \tilde{g}_{nu} \mathbf{d}q^u \tilde{g}_{22} \mathbf{d}q^2 \tilde{g}_{33} \mathbf{d}q^3 \underbrace{\langle \mathbf{q}^n\ |\mathbf{q}_1\rangle}_{\delta_1^n} = \tilde{g}_{11} \mathbf{d}q^1 \tilde{g}_{22} \mathbf{d}q^2 \tilde{g}_{33} \mathbf{d}q^3$$

2. Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = a\,|\mathbf{i}\rangle + b\,|\mathbf{j}\rangle\,; \qquad |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = c\,|\mathbf{i}\rangle + d\,|\mathbf{j}\rangle$$

   (a) Encuentre la expresión para la métrica $\tilde{g}_{ij}$ en estas coordenadas (2 ptos.)
   Solución
   Para una base genérica, $\{|\mathbf{x}_j\rangle\}$ la métrica viene definida por

$$g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g}\left[|\mathbf{x}_i\rangle, |\mathbf{x}_j\rangle \right] \equiv \langle \mathbf{x}_i\ |\mathbf{x}_j\rangle \equiv \langle \mathbf{x}_j\ |\mathbf{x}_i\rangle \quad \Rightarrow$$
$$\langle g_{ij} \rangle = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1\ |\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_1\ |\mathbf{x}_2\rangle \\ \langle \mathbf{x}_2\ |\mathbf{x}_1\rangle & \langle \mathbf{x}_2\ |\mathbf{x}_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

   (b) Encuentre la expresión para un vector genérico $\vec{v} = v_x\,|\mathbf{i}\rangle + v_y\,|\mathbf{j}\rangle$ en estas coordenadas (2 ptos.)
   Solución

$$\left. \begin{array}{l} |\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle = a\,|\mathbf{i}\rangle + b\,|\mathbf{j}\rangle \\ \\ |\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle = c\,|\mathbf{i}\rangle + d\,|\mathbf{j}\rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{i}\rangle = \frac{1}{\Delta} \left(d\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle - b\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle \right) \\ \\ |\mathbf{j}\rangle = \frac{1}{\Delta} \left(c\,|\tilde{\mathbf{e}}_1\rangle - a\,|\tilde{\mathbf{e}}_2\rangle \right) \end{array} \right.$$

con $\Delta = bc - ad$ por lo cual

$$\vec{v} = v_x \left|\mathbf{i}\right\rangle + v_y \left|\mathbf{j}\right\rangle = \frac{v_x}{\Delta}\left(d\left|\tilde{\mathbf{e}}_1\right\rangle - b\left|\tilde{\mathbf{e}}_2\right\rangle\right) + \frac{v_y}{\Delta}\left(c\left|\tilde{\mathbf{e}}_1\right\rangle - a\left|\tilde{\mathbf{e}}_2\right\rangle\right)$$

$$= \left(d\frac{v_x}{\Delta} + c\frac{v_y}{\Delta}\right)\left|\tilde{\mathbf{e}}_1\right\rangle - \left(b\frac{v_x}{\Delta} + a\frac{v_y}{\Delta}\right)\left|\tilde{\mathbf{e}}_2\right\rangle$$

(c) Suponga ahora una base y un tensor concreto

$$\left|\tilde{\mathbf{e}}_1\right\rangle = \left|\mathbf{i}\right\rangle; \qquad \left|\tilde{\mathbf{e}}_2\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathbf{i}\right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\mathbf{j}\right\rangle; \qquad T^i_j = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre la expresión matricial para el tensor $\tilde{T}_{ij}$[1] (3 ptos.)
Solucin
En general,

$$\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{ik}\tilde{T}^k_j = \tilde{g}_{ik}\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^m}T^m_n\frac{\partial\, x^n}{\partial\, \tilde{x}^j}$$

Identificando

$$\tilde{v}_x = \tilde{v}^1 = \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^j}v^j = \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1}v^1 + \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2}v^2 = \left(\underbrace{\frac{d}{\Delta}}_{\frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^1}} v_x + \underbrace{\frac{c}{\Delta}}_{\frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2}} v_y\right)$$

$$\tilde{v}_y = \tilde{v}^2 = \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^j}v^j = \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^1}v^1 + \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^2}v^2 = \left(\underbrace{\frac{-b}{\Delta}}_{\frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^1}} v_x + \underbrace{\frac{-a}{\Delta}}_{\frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^2}} v_y\right)$$

como

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\langle \tilde{g}_{ik}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ \left\langle \frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^m}\right\rangle = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \left\langle \frac{\partial\, x^n}{\partial\, \tilde{x}^j}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\, \tilde{x}^n}{\partial\, x^j}\right\rangle^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

finalmente

$$\tilde{T}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 3 \end{pmatrix}$$

[1] **Ayuda** dada una mantriz genérica $A^i_j = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, su inversa será $\begin{pmatrix} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{pmatrix}$

3. Definimos una transformación ortogonal (una transformación de un sistema de coordenadas ortogonales a otro ortogonal también) si se cumple

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^k} x^k + a^i; \qquad x^i = \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^k} x^k + \tilde{a}^i; \qquad \text{donde } \det\left(\frac{\partial\, x^k}{\partial\, \tilde{x}^l}\right) = \det\left(\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i}\right) = \pm 1$$

con

$$\frac{\partial\, \tilde{x}^k}{\partial\, x^i} \frac{\partial\, x^i}{\partial\, \tilde{x}^l} = \frac{\partial\, x^k}{\partial\, \tilde{x}^i} \frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^l} = \delta^k_l$$

(a) Muestre que las transformaciones de Galileo en 2 dimensiones

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^1_{O\tilde{O}} t \\ V^2_{O\tilde{O}} t \end{pmatrix}$$

son transformaciones ortogonales (3 ptos.). Note que $V^1_{O\tilde{O}}$, y $V^2_{O\tilde{O}}$ son las velocidades en la dirección 1 y 2, respectivamente, del observador $\tilde{O}$ con coordenadas $\tilde{x}^i$ respecto al observador O con coordenadas x^i,mientras t es el tiempo medido por ambos observadores.

Solución

Una vez más, identificando

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial\, \tilde{x}^i}{\partial\, x^k} x^k + a^i \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2} & \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2} \\ \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^1} & \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2} = \cos\theta & \frac{\partial\, \tilde{x}^1}{\partial\, x^2} = -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^1} = \operatorname{sen}\theta & \frac{\partial\, \tilde{x}^2}{\partial\, x^2} = \cos\theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a^1 = V^1_{O\tilde{O}} t \\ a^2 = V^2_{O\tilde{O}} t \end{pmatrix} \quad \text{con } \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \overset{2}{\operatorname{sen}}\theta^2 = 1$$

4. Las transformaciones de Galileo nos permiten relacionar las posiciones de una partícula respecto a dos observadores los cuales se encuentran en movimiento, uno respecto al otro. Considere entonces el movimiento de una partícula visto desde el sistema de coordenadas x^i tal que

$$x = V_{0x} t; \qquad y = V_{0y} t - g\frac{t^2}{2}$$

Exprese el vector velocidad $\vec{V}$ de esta partícula visto del sistema de coordenadas $\tilde{x}^k$ (2 ptos.)

Solución

Tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = x = V_{0x} t \\ \\ x^2 = y = V_{0y} t - g\frac{t^2}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} V^1 = V_x = \frac{\mathbf{d}x^1}{\mathbf{d}t} = V_{0x} \\ \\ V^2 = V_y = \frac{\mathbf{d}x^2}{\mathbf{d}t} = V_{0x} - gt \end{array}$$

por lo cual

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}^1 \\ \tilde{V}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^1 \\ V^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^1_{O\tilde{O}} t \\ V^2_{O\tilde{O}} t \end{pmatrix}$$

finalmente

$$\vec{V} = \tilde{V}^1 \hat{\imath} + \tilde{V}^2 \hat{\jmath} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}^1 = V^1 \cos\theta - V^2 \operatorname{sen}\theta + V^1_{O\tilde{O}} t \\ \\ \tilde{V}^2 = V^1 \operatorname{sen}\theta + V^1 \cos\theta + V^2_{O\tilde{O}} t \end{array} \right.$$

5. Consideremos este par de tensores provenientes de la teoría de elasticidad

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\partial_k\ u_i + \partial_i\ u_k\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\ u_i}{\partial\ x^k} + \frac{\partial\ u_k}{\partial\ x^i}\right); \qquad \left(u_k^i\right)^0 = u_k^i - \frac{1}{3}u_m^m\ \delta_k^i;$$

y construyamos el tensor de esfuerzos como

$$p_j^i = 2\lambda\left(u_j^i\right)^0 + Ku_l^l\ \delta_j^i$$

Calcule la energía libre para el medio elástico, definida como $F = \frac{1}{2}p_j^i u_i^j$ (3 ptos.)
Solución
Tenemos que

$$p_j^i = 2\lambda\left(u_j^i\right)^0 + Ku_l^l\ \delta_j^i = 2\lambda\left(u_j^i - \frac{1}{3}u_m^m\ \delta_j^i\right) + Ku_l^l\ \delta_j^i = 2\lambda u_j^i + u_l^l\delta_j^i\left(K - \frac{2\lambda}{3}\right)$$

donde $u_m^m = \frac{1}{2}\left(\partial^m\ u_m + \partial_m\ u^m\right) = \partial^m\ u_m$ con lo cual

$$\begin{aligned}
F &= \frac{1}{2}p_j^i u_i^j = \frac{1}{2}\left(2\lambda u_j^i + u_l^l\delta_j^i\left(K - \frac{2\lambda}{3}\right)\right)u_i^j = \left(\lambda u_j^i u_i^j + u_l^l\delta_j^i u_i^j\left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\right) \\
&= \lambda\left(u_1^i u_i^1 + u_2^i u_i^2 + u_3^i u_i^3\right) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\left(u_l^l\right)^2 \\
&= \lambda\left(\left(u_1^1u_1^1 + u_1^2u_2^1 + u_1^3u_3^1\right) + \left(u_2^1u_1^2 + u_2^2u_2^2 + u_2^3u_3^2\right) + \left(u_3^1u_1^3 + u_3^2u_2^3 + u_3^3u_3^3\right)\right) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\left(u_l^l\right)^2 \\
&= \lambda\left(\left(u_1^1\right)^2 + \left(u_2^2\right)^2 + \left(u_3^3\right)^2 + 2\left(u_2^1u_1^2 + u_3^2u_2^3 + u_1^3u_3^1\right)\right) + \left(\frac{1}{2}K - \frac{\lambda}{3}\right)\left(u_l^l\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}K + \frac{2\lambda}{3}\right)\left(u_l^l\right)^2 + 2\lambda\left(u_2^1u_1^2 + u_3^2u_2^3 + u_1^3u_3^1\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}K + \frac{2\lambda}{3}\right)\left(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z\right)^2 + 2\lambda\left(\partial_x u_y\partial_y u_x + \partial_y u_z\partial_z u_y + \partial_z u_x\partial_x u_z\right)
\end{aligned}$$

6. Considere ahora la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\alpha = L_\beta^\alpha\ x^\beta + a^\alpha; \quad \text{con}\ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^k v_k}}; \quad \alpha,\beta = 0,1,2,3; \quad i,j,k = 1,2,3\ \text{y}\ \left\{\begin{array}{l} L_0^0 = \gamma \\ \\ L_0^i = L_i^0 = \gamma v^i \\ \\ L_j^i = L_i^j = \delta_j^i + v^i v_j \frac{(\gamma-1)}{v^k v_k} \end{array}\right.$$

las L_β^α se denomina impulso (*boost*) de Lorentz donde las v^k son las componentes tridimensionales de la velocidad relativa entre los observadores $\tilde{O}$ y O con coordenadas $\tilde{x}^\alpha$ y x^β, respectivamente. La coordenada x^0 representa el tiempo medido por el observador O mientras que las x^j representan las coordenadas espaciales x, y, z para el mismo observador O con $i, j = 1, 2, 3$ respectivamente. Nótese que $0 \leq v^k v_k < 1$.
Suponga, por facilidad, que el movimiento es en una dimensión $\alpha, \beta = 0, 1$ y $i, j = 1$.

Esto implica

$$\left\langle L^{\alpha}_{\beta}\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \tilde{L}^{\alpha}_{\beta}\right\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que los tiempos se alargan cuando son medidos por observadores en movimiento (3 ptos.)
Solución
Tenemos que $\Delta t = t_2 - t_1 = x_2^0 - x_1^0$ medido por el observador en reposo y equivalentemente $\Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0$ medido por el observador en movimiento.

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0 &= \left(L^0_\beta \; x_2^\beta + a^0\right) - \left(L^0_\beta \; x_1^\beta + a^0\right) = L^0_\beta \; x_2^\beta - L^0_\beta \; x_1^\beta = L^0_\beta \left(x_2^\beta - x_1^\beta\right) \\ &= L^0_0 \left(x_2^0 - x_1^0\right) + L^0_1 \left(x_2^1 - x_1^1\right) = \frac{\left(x_2^0 - x_1^0\right)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\end{aligned}$$

Claramente

$$\lim_{v \to 1} \Delta \tilde{t} = \infty$$

Nótese que hemos supuesto que el reloj que marca el Δt y que está en reposo respecto al sistema x^β se encuentra en la misma posición espacial $x_2^0 = x_1^0$

(b) Muestre como las distancias se acortan cuando son medidas respecto a observadores en movimiento (3 ptos.)
Solución
Igualmente la distancia entre dos puntos espaciales será

$$l = x_2^1 - x_1^1 = \left(\tilde{L}^1_\beta \; \tilde{x}_2^\beta + a^1\right) - \left(\tilde{L}^1_\beta \; \tilde{x}_1^\beta + a^1\right) = L^1_\beta \left(\tilde{x}_2^\beta - \tilde{x}_1^\beta\right) = \tilde{L}^1_0 \left(\tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0\right) + \tilde{L}^1_1 \left(\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1\right)$$

Si suponemos ahora que la distancia en el sistema en movimiento $\tilde{x}^\beta$ la medimos en el mismo tiempo, entonces $\tilde{x}_2^0 = \tilde{x}_1^0$ con lo cual

$$l = \tilde{L}^1_1 \left(\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1\right) = \frac{\left(\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1\right)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \Rightarrow \tilde{l} = \sqrt{1-v^2}\, l \quad \Rightarrow \lim_{v \to 1} \sqrt{1-v^2}\, l = 0$$