**Métodos Matemáticos de la Física 1**
**Solución Examen Parcial**
**Espacios Vectoriales y vectores cartesianos**
Octubre 2004

Nombre________________________________________

1. Los vectores en $\Re^3$ en coordenada cartesianas los definimos como $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$ y definimos una "tabla de multiplicación" entre ellos de la forma $\langle \mathbf{e}^i | \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j$ con $i, j = 1, 2, 3$, esto es:

| $\langle \mathbf{e}^i \vert \mathbf{e}_j \rangle$ | $\hat{\imath}$ | $\hat{\jmath}$ | $\hat{\mathtt{k}}$ |
|---|---|---|---|
| $\hat{\imath}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\hat{\jmath}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\hat{\mathtt{k}}$ | 0 | 0 | 1 |

con $i, j = 1, 2, 3$

Un cuaternión cartesiano puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos, vale decir: $|\mathbf{a}\rangle = a^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle = a^0 + a^i |\mathbf{q}_i\rangle = a_0 + a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_y\hat{\mathtt{k}}$ con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ y donde las $a^i$con $i = 1, 2, 3$ son números reales que representan las componentes vectoriales en coordenadas cartesianas de los cuaterniones, mientras que la $a^0$, también números reales, se le llama componente escalar[1]. Los cuaterniones son, por decirlo de alguna manera, híbridos. Un vector cartesiano es un cuaternión con la componente escalar nula. Basándonos en este esquema podemos definir la "tabla de multiplicación" para los cuaterniones cartesianos como

| $\vert\mathbf{q}_i\rangle \odot \vert\mathbf{q}_j\rangle$ | $\mathbf{1}$ | $\vert\mathbf{q}_1\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_2\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_3\rangle$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $\mathbf{1}$ | $\vert\mathbf{q}_1\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_2\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_3\rangle$ |
| $\vert\mathbf{q}_1\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_1\rangle$ | $-\mathbf{1}$ | $\vert\mathbf{q}_3\rangle$ | $-\vert\mathbf{q}_2\rangle$ |
| $\vert\mathbf{q}_2\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_2\rangle$ | $-\vert\mathbf{q}_3\rangle$ | $-\mathbf{1}$ | $\vert\mathbf{q}_1\rangle$ |
| $\vert\mathbf{q}_3\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_3\rangle$ | $\vert\mathbf{q}_2\rangle$ | $-\vert\mathbf{q}_1\rangle$ | $-\mathbf{1}$ |

(a) Compruebe si el producto de cuaterniones $|P\rangle = |Q\rangle \odot |R\rangle$ es un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores (2 puntos). Explique por qué.

**Respuesta** La operación producto $\odot$ es cerrada. Vale decir que si $|Q\rangle = b^0 + b^j |\mathbf{q}_j\rangle$ y $|R\rangle = a^0 + a^j |\mathbf{q}_j\rangle$ entonces, como resultado de operar $|Q\rangle \odot |R\rangle$ encontramos un cuaternión de la forma

$$|P\rangle = \left(b^0a^0 - b^ia_i\right) + b^0a^i |\mathbf{q}_i\rangle + a^0b^j |\mathbf{q}_j\rangle + \epsilon^{ijk}b_ia_j |\mathbf{q}_k\rangle$$

por consiguiente al cambiar de signo a las componentes y los vetores base

$$\left| \begin{array}{c} b^\alpha \rightarrow -b^\alpha \\ a^\alpha \rightarrow -a^\alpha \\ |\mathbf{q}_j\rangle \rightarrow -|\mathbf{q}_j\rangle \end{array} \right\} \Longrightarrow |P\rangle \rightarrow \left(b^0a^0 - b^ia_i\right) - b^0a^i |\mathbf{q}_i\rangle - b^ja^0 |\mathbf{q}_j\rangle - \epsilon^{ijk}b_ia_j |\mathbf{q}_k\rangle$$

con lo cual unas partes (las vectoriales) cambian de signo y otras no (las escalares). Con ello no podemos concluir que sea ni un vector o ni un pseudovector.

[1] Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^\alpha |\mathbf{q}_\alpha\rangle \equiv c^0 + \sum_{j=1}^3 c^j |\mathbf{q}_j\rangle$. Adicionalmente, nótese que los índices griegos $\alpha, \beta, \cdots$ toman los valores $0, 1, 2, 3$, mientras que los latinos que acompañan a los vectores cartesianos toman los siguiente valores $j, k, l = 1, 2, 3$.

(b) Suponga ahora que se define un cuaternión conjugado como: $|Q\rangle^{\maltese} = b^0 - b^j\,|\mathbf{q}_j\rangle$ con $j = 1, 2, 3$ compruebe si

$$\left\| |Q\rangle \right\|^2 = |Q\rangle^{\maltese} \odot |Q\rangle$$

representa una buena definición de norma. (3 puntos).

**Respuesta** Una vez más,

$$|P\rangle = |Q\rangle^{\maltese} \odot |Q\rangle = \left(b^0 b^0 + b^i b_i\right) + b^0 b^i\,|\mathbf{q}_i\rangle - b^j b^0\,|\mathbf{q}_j\rangle + \epsilon^{ijk} b_i b_j\,|\mathbf{q}_k\rangle$$

claramente $|P\rangle = |Q\rangle^{\maltese} \odot |Q\rangle = (b^0 b^0 + b^i b_i)$ con lo cual, pasa todas las propiedades de norma porque es equivalente a la definición de norma en $\Re^4$

(c) Comprebe si un cuaternión definido por

$$\overline{|Q\rangle} = \frac{|Q\rangle^{\maltese}}{\left\| |Q\rangle \right\|^2}$$

puede ser considerado como el inverso o elemento simétrico de $|Q\rangle$ respecto a la multiplicación $\odot$ (2 puntos).

**Respuesta** De la definición,

$$\overline{|Q\rangle} = \frac{|Q\rangle^{\maltese}}{\left\| |Q\rangle \right\|^2} = \frac{b^0 - b^j\,|\mathbf{q}_j\rangle}{(b^0 b^0 + b^i b_i)} \Longrightarrow \overline{|Q\rangle} \odot |Q\rangle = \frac{(b^0 - b^j\,|\mathbf{q}_j\rangle)\,(b^0 + b^j\,|\mathbf{q}_j\rangle)}{(b^0 b^0 + b^i b_i)}$$

lo cual conlleva $\overline{|Q\rangle} \odot |Q\rangle = 1$

2. ¿ Cuál de los siguientes polinomios:

(a) $x^2 - 2x + 1$;

(b) $x^4 + 1$;

(c) $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$;

pertenece al subespacio de $\mathcal{P}$ generado por:
$|\mathbf{x1}\rangle = x^3 + 2x + 1$; $|\mathbf{x2}\rangle = x^2 - 2$; $|\mathbf{x3}\rangle = x^3 + x$; (3 puntos)

**Respuesta** Si estos vectores generan un subespacio, significa que son linealmente independientes. Esto es

$$\begin{aligned} 0 &= C_1|\mathbf{x1}\rangle + C_2|\mathbf{x2}\rangle + C_3|\mathbf{x3}\rangle \Longrightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0 \\ 0 &= C_1\left(x^3 + 2x + 1\right) + C_2\left(x^2 - 2\right); + C_3\left(x^3 + x\right) \end{aligned}$$

con lo cual construimos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rclll} 0 &=& C_1 & & +C_3 \\ 0 &=& & C_2 & \\ 0 &=& 2C_1 & & +C_3 \\ 0 &=& C_1 & -2C_2 & \end{array}$$

y se cumple que $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ con lo cual los $\{|\mathbf{x1}\rangle, |\mathbf{x2}\rangle, |\mathbf{x3}\rangle\}$ son Linealmente independientes. Es inmediato afirmar que $x^4 + 1 \notin$ al subespacio generado por $|\mathbf{x1}\rangle, |\mathbf{x2}\rangle, |\mathbf{x3}\rangle$ por cuanto tiene un orden superior. Los polinomios de los numerales **a** y **b** podrían pertenecer, pero hay que demostarlo. Para ello procedemos de la siguiente manera:

$$x^2 - 2x + 1 \equiv |\mathbf{p1}\rangle = C_1|\mathbf{x1}\rangle + C_2|\mathbf{x2}\rangle + C_3|\mathbf{x3}\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcllll} 0 & = & C_1 & & +C_3 \\ 1 & = & & C_2 & \\ -2 & = & 2C_1 & & +C_3 \\ 1 & = & C_1 & -2C_2 & \end{array}$$

Resolviendo el sistema comprobamos que no existe un conjunto de $\{C_1, C_2, C_3\}$ que cumplan con este sistema. Por lo tanto no podremos expresar $|\mathbf{p1}\rangle$ como combinación lineal de los vectores base $|\mathbf{p1}\rangle \neq C_1|\mathbf{x1}\rangle + C_2|\mathbf{x2}\rangle + C_3|\mathbf{x3}\rangle$.

Del mismo modo procedemos para el polinomio $\equiv |\mathbf{p3}\rangle \equiv -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1$. Entonces:

$$-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x - 1 \equiv |\mathbf{p1}\rangle = C_1|\mathbf{x1}\rangle + C_2|\mathbf{x2}\rangle + C_3|\mathbf{x3}\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rcllll} -\frac{1}{2} & = & C_1 & & +C_3 \\ \frac{5}{2} & = & & C_2 & \\ -1 & = & 2C_1 & & +C_3 \\ -1 & = & C_1 & -2C_2 & \end{array}$$

Resolviendo el sistema comprobamos que no existe un conjunto de $\{C_1, C_2, C_3\}$ que cumplan con este sistema. Por lo tanto no podremos expresar $|\mathbf{p3}\rangle$ como combinación lineal de los vectores base $|\mathbf{p3}\rangle \neq C_1|\mathbf{x1}\rangle + C_2|\mathbf{x2}\rangle + C_3|\mathbf{x3}\rangle$.
Concluimos que **ninguno de los vectores** $\{|\mathbf{p1}\rangle, |\mathbf{p2}\rangle, |\mathbf{p3}\rangle\}$ pertenece al subespacio generado por $\{|\mathbf{x1}\rangle, |\mathbf{x2}\rangle, |\mathbf{x3}\rangle\}$

3. Considerando $\langle \mathbf{q}_n|\mathbf{p}_n\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$ como definición de producto interno en el espacio vectorial de polinomios $\mathcal{P}_n$ Encontrar la distancia y el ángulo entre los vectores: $|\mathbf{x1}\rangle = x(x-1)$; $\quad |\mathbf{x2}\rangle = x$ en $\mathcal{P}_3$ (3 puntos)

**Respuesta** En términos de la definición del producto interno, la distancia entre dos vectores $|\mathbf{x}\rangle$ y $|\mathbf{y}\rangle$ se define como

$$d\left(|\mathbf{x}\rangle, |\mathbf{y}\rangle\right) \equiv \| |\mathbf{x}\rangle - |\mathbf{y}\rangle \| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}|\ x^4 - 2x^3 + x^2 \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle}$$

Por consiguiente:

$$d\left(|\mathbf{x1}\rangle, |\mathbf{x2}\rangle\right) \equiv \sqrt{\langle \mathbf{x1} - \mathbf{x2}|\ \mathbf{x1} - \mathbf{x2}\rangle} = \sqrt{\int_0^1 \left[(x(x-1)) - (x)\right]\left[(x(x-1)) - (x)\right]\mathrm{d}x}$$

de lo cual se sigue que

$$d\left(|\mathbf{x1}\rangle\,,|\mathbf{x2}\rangle\right)\equiv\sqrt{\int_0^1(x^2-2x)^2\mathrm{d}x}=\sqrt{\int_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{8}{15}}=\frac{2}{15}\sqrt{30}$$

Igualmente, el coseno entre dos vectores $|\mathbf{x}\rangle$ y $|\mathbf{y}\rangle$ se define como

$$\cos\Theta=\frac{|\langle\mathbf{x}|\,\mathbf{y}\rangle|}{\||\mathbf{x}\rangle\|\,\||\mathbf{y}\rangle\|}\Longrightarrow\cos\Theta=\frac{|\langle\mathbf{x1}|\,\mathbf{x2}\rangle|}{\||\mathbf{x1}\rangle\|\,\||\mathbf{x2}\rangle\|}=\frac{|\langle\mathbf{x1}|\,\mathbf{x2}\rangle|}{\sqrt{\langle\mathbf{x1}|\,\mathbf{x1}\rangle}\sqrt{\langle\mathbf{x2}|\,\mathbf{x2}\rangle}}$$

$$\cos\Theta=\frac{\int_0^1\left[x(x-1)\right][x]\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_0^1\left(x(x-1)\right)^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1x^2\mathrm{d}x}}=\frac{\int_0^1(x^3-x^2)\mathrm{d}x}{\sqrt{\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1x^2\mathrm{d}x}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{12}}{\left(\sqrt{\frac{1}{30}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}=-\frac{1}{12}\sqrt{90}\Longrightarrow\Theta=\arccos\left(-\frac{1}{12}\sqrt{90}\right)$$

$$\Theta=\pi-\arccos\frac{1}{4}\sqrt{10}\approx2.4825\ rad$$

4. Considerando $\langle\mathbf{q}_n|\mathbf{p}_n\rangle=\int_{-1}^1p(x)q(x)\mathrm{d}x$ como definición de producto interior en $\mathcal{P}_n$,

(a) Los polinomios

$$|\mathbf{x}1\rangle=1;\quad|\mathbf{x}2\rangle=x;\quad|\mathbf{x}3\rangle=x^2-1;\quad|\mathbf{x}4\rangle=\frac{5}{2}x^3;$$

¿ Forman una base en $\mathcal{P}_4$ ? Explique por qué (1 punto)

**Respuesta:** Si forman base porque son linealmente independiente ya que cada uno de ellos representa un polinomio de un grado diferente y polinomios de diferente grado son, por definición son linealmente independientes.

(b) ¿ Es una base ortogonal ? Explique por qué Si no lo es, construya una base **ortonormal** a partir de ella (3 puntos)

**Respuesta:** Para comprobar si es una base ortogonal realizamos los productos internos entre los distintos vectores

$$\langle\mathbf{x_1}|\,\mathbf{x_2}\rangle=\int_{-1}^1[1]\,[x]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1x\mathrm{d}x=0$$
$$\langle\mathbf{x_1}|\,\mathbf{x_3}\rangle=\int_{-1}^1[1]\left[x^2-1\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{4}{3}\neq0$$

Por lo tanto no constituye una base ortonormal y procedmos ortonormalizarla. Para ello utilizamos el método de Gram-Schmidt. Esto esDado un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|\mathbf{x}_1\rangle\,,\ |\mathbf{x}_2\rangle\,,\ |\mathbf{x}_3\rangle\,,\cdots,|\mathbf{v}_n\rangle\}$ que expanden un espacio Euclidiano de dimensión finita, $E^n$. Entonces siempre se puede construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|\mathbf{u}_1\rangle\,,\ |\mathbf{u}_2\rangle\,,\ |\mathbf{u}_3\rangle\,,\cdots,|\mathbf{u}_n\rangle\}$

que también expandan $E^n$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{x}_1\rangle \\
&|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{x}_2\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_2 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle \\
&|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{x}_3\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_3 \,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_3 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle \\
&|\mathbf{u}_4\rangle \equiv |\mathbf{x}_4\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_4 \,|\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_3\rangle} |\mathbf{u}_3\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_4 \,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_4 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle
\end{aligned}
$$

por lo cual

$$|\mathbf{u}_1\rangle \equiv |\mathbf{x}_1\rangle \longrightarrow 1$$

$$|\mathbf{u}_2\rangle \equiv |\mathbf{x}_2\rangle \longrightarrow x$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \equiv |\mathbf{x}_3\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_3 \,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_3 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \longrightarrow (x^2-1) - \left(\tfrac{\int_{-1}^{1}\left[x^2-1\right][x]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}[x][x]\mathrm{d}x}\right) x - \left(\tfrac{\int_{-1}^{1}\left[x^2-1\right][1]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}[1][1]\mathrm{d}x}\right) 1$$

$$|\mathbf{u}_3\rangle \longrightarrow (x^2-1) - \underbrace{\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x}\right)}_{0} x - \underbrace{\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x}\right)}_{-\frac{2}{3}}$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle \equiv |\mathbf{x}_4\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_4 \,|\mathbf{u}_3\rangle}{\langle \mathbf{u}_3 \,|\mathbf{u}_3\rangle} |\mathbf{u}_3\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_4 \,|\mathbf{u}_2\rangle}{\langle \mathbf{u}_2 \,|\mathbf{u}_2\rangle} |\mathbf{u}_2\rangle - \tfrac{\langle \mathbf{x}_4 \,|\mathbf{u}_1\rangle}{\langle \mathbf{u}_1 \,|\mathbf{u}_1\rangle} |\mathbf{u}_1\rangle$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle \equiv \tfrac{5}{2}x^3 - \left(\tfrac{\int_{-1}^{1}\left[\frac{5}{2}x^3\right]\left[x^2-\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\left[x^2-\frac{1}{3}\right]\left[x^2-\frac{1}{3}\right]\mathrm{d}x}\right)\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{\int_{-1}^{1}\left[\frac{5}{2}x^3\right][x]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}[x][x]\mathrm{d}x}\right) x - \left(\tfrac{\int_{-1}^{1}\left[\frac{5}{2}x^3\right][1]\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}[1][1]\mathrm{d}x}\right) 1$$

$$|\mathbf{u}_4\rangle \equiv \tfrac{5}{2}x^3 - \underbrace{\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^5-\frac{5}{6}x^3\right)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x}\right)}_{0}\left(x^2-\tfrac{1}{3}\right) - \underbrace{\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^4\right)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x}\right)}_{\frac{3}{2}} x - \underbrace{\left(\frac{\int_{-1}^{1}\left(\frac{5}{2}x^3\right)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x}\right)}_{0}$$

por lo tanto, la base ortogonal será

$$|\mathbf{u}_1\rangle \equiv 1; \qquad |\mathbf{u}_2\rangle \equiv x; \qquad |\mathbf{u}_3\rangle \equiv x^2 - \frac{1}{3}; \qquad |\mathbf{u}_4\rangle \equiv \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

ahora, bien ortogonalizando tendremos que

$$|\mathbf{e}_1\rangle \equiv 1;$$

$$|\mathbf{e}_2\rangle \equiv \frac{x}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 \, |\mathbf{u}_2\rangle}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}x\sqrt{6};$$

$$|\mathbf{e}_3\rangle \equiv \frac{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_3 \, |\mathbf{u}_3\rangle}} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{10};$$

$$|\mathbf{e}_4\rangle \equiv \frac{\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)}{\sqrt{\langle \mathbf{u}_4 \, |\mathbf{u}_4\rangle}} = \frac{\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{2}{7}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)\sqrt{14}$$

(c) Expresar $|\mathbf{p}\rangle = x^2 - x$; o $|\mathbf{q}\rangle = x^3 - 2$ en función de esa base **ortonormal** (3 puntos)

**Respuesta** Para expresar cualquiera de estos polinomios en la base $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle, |\mathbf{e}_3\rangle, |\mathbf{e}_4\rangle\}$ construimos una combinación lineal con esos vectores base. Así para expresar $|\mathbf{p}\rangle$ como combinación lineal tendremos que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{p}\rangle &= C^1 |\mathbf{e}_1\rangle + C^2 |\mathbf{e}_2\rangle + C^3 |\mathbf{e}_3\rangle + C^4 |\mathbf{e}_4\rangle \\
&\equiv \langle \mathbf{e}^1 \, |\mathbf{p}\rangle \, |\mathbf{e}_1\rangle + \langle \mathbf{e}^2 \, |\mathbf{p}\rangle \, |\mathbf{e}_2\rangle + \langle \mathbf{e}^3 \, |\mathbf{p}\rangle \, |\mathbf{e}_3\rangle + \langle \mathbf{e}^4 \, |\mathbf{p}\rangle \, |\mathbf{e}_4\rangle \\
|\mathbf{p}\rangle &= \left(\int_{-1}^{1} [1]\left[x^2 - x\right] \mathrm{d}x\right)|\mathbf{e}_1\rangle + \left(\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{6}\right]\left[x^2 - x\right] \mathrm{d}x\right)|\mathbf{e}_2\rangle \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1}\left[\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{10}\right]\left[x^2 - x\right] \mathrm{d}x\right)|\mathbf{e}_3\rangle \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)\sqrt{14}\right]\left[x^2 - x\right] \mathrm{d}x\right)|\mathbf{e}_4\rangle
\end{aligned}$$

$$|\mathbf{p}\rangle = \frac{2}{3}|\mathbf{e}_1\rangle - \frac{1}{3}\sqrt{6}\,|\mathbf{e}_2\rangle + \frac{2}{15}\sqrt{10}\,|\mathbf{e}_3\rangle$$

o equivalentemente resolviendo la igualdad entre polinomios

$$x^2 - x = C^1(1) + C^2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{6}\right) + C^3\left(\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{10}\right) + C^4\left(\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)\sqrt{14}\right)$$

Si elegimos expresar $|\mathbf{q}\rangle$ como combinación lineal tendremos que

$$|\mathbf{q}\rangle = C^1 |\mathbf{e}_1\rangle + C^2 |\mathbf{e}_2\rangle + C^3 |\mathbf{e}_3\rangle + C^4 |\mathbf{e}_4\rangle$$

$$|\mathbf{q}\rangle \equiv \langle \mathbf{e}^1 |\mathbf{q}\rangle |\mathbf{e}_1\rangle + \langle \mathbf{e}^2 |\mathbf{q}\rangle |\mathbf{e}_2\rangle + \langle \mathbf{e}^3 |\mathbf{q}\rangle |\mathbf{e}_3\rangle + \langle \mathbf{e}^4 |\mathbf{q}\rangle |\mathbf{e}_4\rangle$$

$$\begin{aligned}|\mathbf{q}\rangle = &\left(\int_{-1}^{1} [1]\left[x^3-2\right] \mathrm{d}x\right) |\mathbf{e}_1\rangle + \left(\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}x\sqrt{6}\right]\left[x^3-2\right] \mathrm{d}x\right) |\mathbf{e}_2\rangle \\ &+ \left(\int_{-1}^{1} \left[\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\sqrt{10}\right]\left[x^3-2\right] \mathrm{d}x\right) |\mathbf{e}_3\rangle \\ &+ \left(\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)\sqrt{14}\right]\left[x^3-2\right] \mathrm{d}x\right) |\mathbf{e}_4\rangle\end{aligned}$$

$$|\mathbf{q}\rangle = -4 |\mathbf{e}_1\rangle + \frac{1}{5}\sqrt{6}\, |\mathbf{e}_2\rangle + \frac{2}{35}\sqrt{14}\, |\mathbf{e}_4\rangle$$

que también será equivalente a resolver la igualdad entre polinomios

$$x^3-2 = C^1 (1) + C^2 \left(\frac{1}{2}x\sqrt{6}\right) + C^3 \left(\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\sqrt{10}\right) + C^4 \left(\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)\sqrt{14}\right)$$

Probar la siguiente relación vectorial (3 puntos)

(a) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) - \left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\right]\vec{a} + \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) - \left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{a}$

**Respuesta** Iniciamos la traducción a índices por el lado izquierdo de la ecuación así

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} &= \epsilon^{ijk}\partial_j \left(a_m\partial^m\right) a_k = \epsilon^{ijk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k + \epsilon^{ijk} a_m \partial_j \partial^m a_k \\ &= \epsilon^{ijk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k + a_m\partial^m\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right)\end{aligned}$$

el lado derecho lo traduciremos término por término

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) &= \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right) \\ -\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\right]\vec{a} &= -\left[\partial_m \epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right] a^i = -\left[\epsilon^{mjk}\partial_m\partial_j a_k\right] a^i = 0 \\ \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) &= a_m\partial^m\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right) \\ -\left[\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{\nabla}\right]\vec{a} &= -\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right] a^i\end{aligned}$$

el segundo término se anula por cuanto $\epsilon^{mjk}$ es antisimétrico respecto a los índices $mj$ mientras que $\partial_m\partial_j$ es simétrico. El tercer término del desarrollo del lado derecho corresponde con el segundo del desarrollo del lado izquierdo. Por cual llegamos a la siguiente igualdad

$$\epsilon^{ijk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k = \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{ijk}\partial_j a_k\right) - \left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right] a^i$$

Para verificar la igualdad tendremos que evaluar componente a componente. Esto es para el lado izquierdo

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{1jk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k &= \epsilon^{123}\left(\partial_2 a_m\right)\partial^m a_3 + \epsilon^{132}\left(\partial_3 a_m\right)\partial^m a_2 \\
&= \left(\partial_2 a_m\right)\partial^m a_3 - \left(\partial_3 a_m\right)\partial^m a_2 \\
&= \left(\partial_2 a_1\right)\partial^1 a_3 + \left(\partial_2 a_2\right)\partial^2 a_3 + \left(\partial_2 a_3\right)\partial^3 a_3 \\
&\qquad - \left(\partial_3 a_1\right)\partial^1 a_2 - \left(\partial_3 a_2\right)\partial^2 a_2 - \left(\partial_3 a_3\right)\partial^3 a_2
\end{aligned}
$$

mientras que para el primer término del lado derecho

$$
\begin{aligned}
\left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right) &= \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{123}\partial_2 a_3\right) + \left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{132}\partial_3 a_2\right) \\
&= \underbrace{\partial_2 a_3 \partial^1 a_1}_{\alpha} + \partial_2 a_3 \partial^2 a_2 + \partial_2 a_3 \partial^3 a_3 \\
&\qquad \underbrace{-\partial_3 a_2 \partial^1 a_1}_{\beta} - \partial_3 a_2 \partial^2 a_2 - \partial_2 a_2 \partial^3 a_3
\end{aligned}
$$

y el segundo término se escribe como

$$
\begin{aligned}
-\left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right] a^i &= -\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right)\partial_1 a^1 - \left(\epsilon^{2jk}\partial_j a_k\right)\partial_2 a^1 - \left(\epsilon^{3jk}\partial_j a_k\right)\partial_3 a^1 \\
&= -\left(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2\right)\partial_1 a^1 - \left(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3\right)\partial_2 a^1 - \\
&\qquad - \left(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1\right)\partial_3 a^1 \\
&= \underbrace{\partial_3 a_2 \partial_1 a^1}_{\beta}\underbrace{-\partial_2 a_3 \partial_1 a^1}_{\alpha} + \partial_1 a_3 \partial_2 a^1 \underbrace{-\partial_3 a_1 \partial_2 a^1}_{\gamma} \\
&\qquad \underbrace{+\partial_2 a_1 \partial_3 a^1}_{\gamma} - \partial_1 a_2 \partial_3 a^1
\end{aligned}
$$

al sumar ambos términos se eliminan los sumandos indicados con letras griegas, y queda como

$$
\begin{aligned}
\left(\partial^m a_m\right)\left(\epsilon^{1jk}\partial_j a_k\right) - \left[\left(\epsilon^{mjk}\partial_j a_k\right)\partial_m\right] a^i &= \partial_2 \underset{\Xi}{a_3} \partial_2 a_2 + \partial_2 \underset{\Upsilon}{a_3} \partial_3 a_3 \\
&\quad -\partial_3 \underset{\Omega}{a_2} \partial_2 a_2 - \partial_2 \underset{\Psi}{a_2} \partial_3 a_3 \\
&\quad + \partial_1 \underset{\Lambda}{a_3} \partial_2 a_1 - \partial_1 \underset{\Sigma}{a_2} \partial_3 a_1
\end{aligned}
$$

y al compararlo con el desarrollo del lado derecho e identificar término a término queda demostrado

$$
\begin{aligned}
\epsilon^{1jk}\left(\partial_j a_m\right)\partial^m a_k &= \underset{\Lambda}{\left(\partial_2 a_1\right)}\partial_1 a_3 + \underset{\Xi}{\left(\partial_2 a_2\right)}\partial_2 a_3 + \underset{\Upsilon}{\left(\partial_2 a_3\right)}\partial_3 a_3 \\
&\quad - \underset{\Sigma}{\left(\partial_3 a_1\right)}\partial_1 a_2 - \underset{\Omega}{\left(\partial_3 a_2\right)}\partial_2 a_2 - \underset{\Psi}{\left(\partial_3 a_3\right)}\partial_3 a_2
\end{aligned}
$$

De igual manera se procede con $i = 2$ e $i = 3$