**Métodos Matemáticos de la Física 1**
**Examen Parcial**
**Espacios Lineales**
Abril 2004

Nombre________________________________________

1. Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensión $N_1$ y $N_2$, respectivamente. A estos espacios pertenecen $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ vectores genéricos. Nótese que los índices (1) y (2) denotan la pertenencia al espacio respectivo. Se define el producto tensorial de espacios vectoriales, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle \in \mathcal{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathcal{E}_2$ le asociamos un vector

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle$$

y cumple con las siguientes propiedades:

(a) La suma entre vectores de $\mathcal{E}$ viene definida como

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \end{aligned}$$

(b) El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales $\lambda$ y $\mu$

$$\begin{aligned} [|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= [\lambda\, |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \lambda\, |\varphi(1)\chi(2)\rangle \\ |\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\, |\chi(2)\rangle] = \mu\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \mu\, |\varphi(1)\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

(c) El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle \\ [|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \end{aligned}$$

**Muestre que**,

(a) $\mathcal{E}$ también es un espacio vectorial (4 ptos.)

(b) Si existen productos internos definidos en $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ entonces muestre

$$\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\ |\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\ |\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\ |\chi(2)\rangle$$

si es una buena definición de producto interno (4 ptos.).
Suponga que $\cdot$ representa la multiplicación estándar entre números reales.
Para ello debemos demostrar los axiomas o propiedades de los prodctos internos. Vemos, las propiedades que definen el producto interno son:

(c) Si $|u_i(1)\rangle$ y $|v_i(2)\rangle$ son vectores bases para $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$, respectivamente, entonces

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$$

es base para $\mathcal{E}$ y de esta forma

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = a^i b^j\, |u_i(1)v_j(2)\rangle$$

donde $a_i$ y $b_j$ son las componentes de $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ en sus respectivas bases. Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein en la cual $c^k\, |v_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} c^k\, |v_k\rangle$ (4 ptos.).

2. Muestre que

(a) Considerando $\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial(\circ)}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial(\circ)}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial(\circ)}{\partial z}$

1. $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\varphi\,(x,y,z) \times \vec{\nabla}\phi\,(x,y,z)\right) = 0$ (3 puntos)
2. $\vec{\nabla} \times \left(\varphi\,(x,y,z)\,\vec{\nabla}\varphi\,(x,y,z)\right) = 0$ (3 puntos)

(b) si $A$ y $B$ son dos matrices cuadradas $3\times 3$, $\vec{1} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{\mathrm{k}}$ y dado que $\det(A) = \epsilon^{ijk} 1_i a_{jk}$ muestre que (3 ptos)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$