Métodos Matemáticos 1
Tarea 1
Espacios Vectoriales
Marzo 2004

1. Considere el siguiente conjunto $\{1, A_\pi, \mathcal{R}, \Im\}$ donde 1 es el elemento neutro, A_π es una rotación de ángulo π, la reflexión viene representada por $\mathcal{R}$ y finalmente $\Im$ es la inversión. Esto significa que el álgebra entre estos elementos es:

$$A_\pi^2 = \mathcal{R}^2 = \Im^2 = 1$$

$$A_\pi \cdot \mathcal{R} = \Im \qquad \mathcal{R} \cdot \Im = A_\pi \qquad \Im \cdot A_\pi = \mathcal{R}$$

Muestre que ese conjunto constituye un grupo

2. Muestre que el siguiente conjunto de transformaciones en el plano xy forman un grupo y construya su tabla de multiplicación

   (a) $1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \rightarrow x \\ y \rightarrow y \end{array} \right.$
   (b) $\Im \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow -y \end{array} \right.$
   (c) $\mathcal{R}_x \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \rightarrow -x \\ y \rightarrow y \end{array} \right.$
   (d) $\mathcal{R}_y \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \rightarrow x \\ y \rightarrow -y \end{array} \right.$

3. Para cada uno de los ejemplos que se proponen a continuación indique cuál representa un espacio vectorial y cuál no. En el caso negativo, indique el (o los) axiomas que no se cumplen. Considere que la suma y la multiplicación de escalares reales es la usual.

   (a) Las funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
   (b) Las funciones tales que $f(0) = f(1)$
   (c) Las funciones tales que $f(x)$ integrables en $[0, 1]$ tal que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
   (d) Las funciones tales que $f(x) = f(1-x) \quad \forall x$
   (e) Los vectores $(x, y, z) \in V_3$ tal que $z = 0 \ \wedge \ 3x + 2y = 1$
   (f) Los vectores $(x, y, z) \in V_3$ tal que sus componentes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

4. Suponga un vector (x, y, z) genérico de V_3. Si este vector cumple, adicionalmente, con una de las condiciones que se enumeran a continuación, indique si el conjunto de vectores que cumplen esa condición, forman un subespacio de V_3

   (a) $x + y + z = 0$
   (b) $x = y$
   (c) $x^2 + y^2 = 1$
   (d) $x = 2y \ \wedge \ z = 3x$

5. Sea P_n el espacio vectorial de todos los polinomios de grado $\leq n$ donde n es un número fijo. Dado un $f(x) \in P_n$ Determine si las $f(x)$ forman un subespacio de P_n al cumplir con una de las condiciones abajo mencionadas.

   (a) Las funciones tales que $f(0) = 0$
   (b) Las funciones tales que $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0$
   (c) Las funciones tales que $f(0) = f(1)$
   (d) Las funciones pares $f(x) = f(-x)$

6. Sea el Espacio Vectorial de funciones reales de variable real $f(x)$. Indique cuál de los conjuntos que se indican a continuación está constituido por funciones linealmente independientes

   (a) $\left\{1, e^{ax}, Ce^{bx}\right\}$ con $C = cont$, y con $a \neq b$ ó con $a = b$
   (b) $\{1, e^{x}, Ce^{-x}, \cosh x\}$
   (c) $\left\{\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x\right\}$
   (d) $\left\{1, \cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x\right\}$
   (e) $\left\{1, \cos 2x, \operatorname{sen}^2 x\right\}$
   (f) $\left\{1, e^{ax}, xe^{bx}\right\}$ con $a \neq b$ ó con $a = b$

7. Dados dos vectores $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \wedge (y_1, y_2, y_3, \ldots y_n) \in V_n$ Compruebe cuál de las siguientes definiciones cumplen con las condiciones de una buena definición de producto interno.

   (a) $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \|y_i\|$
   (b) $\langle x \mid y\rangle = \|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\|$
   (c) $\langle x \mid y\rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2}$
   (d) $\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

8. En el espacio vectorial de funciones continua $\mathcal{C}_{[1,e]}$ si definimos como producto interno
$$\langle f \mid g\rangle = \int_1^e \ln(x) f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

(a) Considere $f(x) = \sqrt{x}$, calcule la norma de $f(x)$ esto es $\|f\|$

(b) Encuentre el polinomio lineal $g(x) = ax + b$ que es ortogonal a la función constante $f(x) = 1$

9. Dado el espacio vectorial lineal de funciones continua $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ en el cual está definido el producto interno $\langle f \,| g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$. Considere el conjunto de funciones

$$u_1(x) = 1; \qquad u_2(x) = t; \qquad u_3(x) = 1 + t;$$

Pruebe que: dos de ellas son ortogonales, dos forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$

10. Dado un sistema de n partículas de masas $m_1, m_2, \cdots, m_n$ y $\vec{r}_k$ el radio vector de la $k-$esima partícula (con $k = 1, 2, \cdots, n$) medido respecto a algún origen común de coordenadas. Entonces el Centro de Masa se define como

$$\vec{R} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

Encuentre el centro de masa de los siguientes sistemas

(a) $m = 1, 2, 3$; las cuales se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero de lado a

(b) $m = 1, 2, 3$; situadas en los vértices inferiores de un cubo de lado a mientras que otras masa $m = 4, 5, 6$ están situadas en los vértices superiores.

11. Dado el siguiente conjunto de vectores linealmente independientes, encuentre la base ortogonal correspondiente

(a) Para un espacio vectorial pseudoeuclideano donde se define un producto interno de la forma $\langle x \,| y \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$ y en el cual tenemos definidos los siguientes vectores linealmente independientes. $\alpha = (1, 1, 0, 0)\,, \quad \beta = (0, 1, 1, 0)\,, \quad \gamma = (0, 0, 1, 1)\,, \quad \delta = (1, 0, 0, 1)$

(b) Para un espacio vectorial de funciones continua $\mathcal{C}_{[1,\pi]}$ en el cual el producto interno está definido por

$$\langle x \,| y \rangle = \int_{1}^{e} x(t) \cdot y(t) \, \mathrm{d}t$$

Considere los siguientes vectores linealmente independientes $|x_n\rangle \to x_n(t) = \cos nt$ para $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$ pruebe que los vectores funciones $|y_n\rangle \to y_n(t)$ dados por

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \quad y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt \qquad \text{con } n \geq 1$$

forman una base ortonormal para mismo espacio vectorial expandido por $|x_n\rangle$

12. Rotaciones de un vector: activas y pasivas. Pasiva: rota el sistema de coordenadas. Sea un vector genérico en dos dimensiones $\vec{a}$ y dos bases ortonormales $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ y $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2)$ relacionadas entre ellas a través de una rotación en el plano

$$\hat{e}'_1 \rightarrow \hat{e}_1 \cos\theta + \hat{e}_2 \operatorname{sen}\theta$$
$$\hat{e}'_2 \rightarrow -\hat{e}_1 \operatorname{sen}\theta + \hat{e}_2 \cos\theta$$

   (a) Compruebe que el módulo de ese vector no cambia al rotar el sistema de coordenadas

   (b) Activa: rota el vector. Considere el sistema de coordenadas $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ y refiera ese vector al mencionado sistema de coordenadas de tal forma que $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$. Rote el vector $\vec{a}$ de tal forma que sus nuevas componentes sean

$$a'_1 = a_1 \cos\theta + a_2 \operatorname{sen}\theta$$
$$a'_2 = -a_1 \operatorname{sen}\theta + a_2 \cos\theta$$

   Compruebe que el módulo del vector se conserva bajo esta transformación de sus componentes

   (c) Encuentre la forma de la matriz de rotación, $\mathcal{R}$, si escribimos la relación anterior de una manera más elegante

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & \mathcal{R}_{12} \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$