Métodos Matemáticos 1
Tarea 3
Coordenadas Vectores y Tensores
Octubre 2004

1. Dado F_{ijk} un tensor totalmente antisimetrico respecto a sus índices ijk muestre que

$$\operatorname{rot}\left[F_{ijk}\right] = \partial_m F_{ijk} - \partial_i F_{jkm} + \partial_j F_{kmi} - \partial_k F_{mij} \equiv \frac{\partial F_{ijk}}{\partial x^m} - \frac{\partial F_{jkm}}{\partial x^i} + \frac{\partial_j F_{kmi}}{\partial x^j} - \frac{\partial_k F_{mij}}{\partial x^k}$$

$$\operatorname{rot}\left[F_{ijk}\right] = F_{ijk,m} - F_{jkm,i} + F_{kmi,j} - F_{mij,k} \equiv \partial_m F_{ijk} - \partial_i F_{jkm} + \partial_j F_{kmi} - \partial_k F_{mij}$$

2. El momento de inercia se define como

$$I_j^i = \int_V \mathrm{d}v \rho\left(\vec{r}\right)\left(\delta_j^i\left(x^k x_k\right) - x^i x_j\right) \qquad \text{con} \quad x^i = \{x, y, z\} \text{ y } \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z$$

   a) Muestre que I_j^i es un tensor
   b) Encuentre la representación matricial para I_j^i
   c) Considere un cubo de lado l y masa total M tal que tres de sus aristas coinciden con un sistema de coordenadas cartesiano. Ecuentre el Tensor momento de Inercia, I_j^i.

3. Para un sistema de n partículas rígidamente unidas, la cantidad de movimiento $\vec{p}$ y cantidad de movimiento angular $\vec{L}$ vienen definidas por

$$\left(\vec{p}\right)_\alpha = m_\alpha \ \left(\vec{v}\right)_\alpha = m_\alpha \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{r}\right)_\alpha\right) \equiv \epsilon^{ijk}\omega_j x_k \left|\mathbf{e}_i\right\rangle$$

$$\vec{L} = \sum_\alpha \left(\vec{r} \times \vec{p}\right)_\alpha \equiv \epsilon^{ijk} x_k p_k \left|\mathbf{e}_i\right\rangle;$$

   con $\alpha = 1, 2, \cdots, n$, $\left|\mathbf{e}_i\right\rangle = \left\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$ y $x^i = \{x, y, z\}$
   Muestre que:

   a) $\vec{L} = \sum_\alpha m_\alpha \left[\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)_\alpha \vec{\omega} - \left(\vec{r}\right)_\alpha \left(\left(\vec{r}\right)_\alpha \cdot \vec{\omega}\right)\right]$
   b) $L^i = I_j^i \omega^j$ donde $I_j^i = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_j^i\left(x^k x_k\right) - x^i x_j\right)$ es el tensor momento de inercia para un sistema de n partículas rígidamente unidas

4. Dado un tensor genérico de segundo orden T_{ij} Demostar

   a) El determinante , $\det\left[\mathbf{T}\right] \equiv \det\left[T_j^i\right] = T$ y la traza, $\operatorname{tr}\left[T_j^i\right] = T_i^i$ de los tensores son un invariantes, en otras palabras $\det\left[T_j^i\right]$ y $\operatorname{tr}\left[T_j^i\right]$ son escalares respecto a transformaciones de coordenadas.

b) Si definimos la matriz adjunta, adj $[\mathbf{A}]$, como la traspuesta de la matriz de cofactores

$$\operatorname{adj}[\mathbf{A}] = (\mathbf{A}^c)^T \qquad \Longrightarrow \operatorname{adj}\left[A^i_j\right] = \left((A^c)^i_j\right)^T = (A^c)^j_i$$

donde la matriz de cofactores $(A^c)^i_j$ viene dada por

$$A^i_j = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow (A^c)^i_j = \begin{pmatrix} (A^c)^1_1 & (A^c)^1_2 & (A^c)^1_3 \\ (A^c)^2_1 & (A^c)^2_2 & (A^c)^2_3 \\ (A^c)^3_1 & (A^c)^3_2 & (A^c)^3_3 \end{pmatrix}$$

y los cofactores son

$$(A^c)^1_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^1_2 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a^2_1 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^1_3 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)^2_1 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^2_2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^3_1 & a^3_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^2_3 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{vmatrix}$$

$$(A^c)^3_1 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^3_2 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_3 \end{vmatrix} \quad (A^c)^3_3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix}$$

Para la transformación $\tilde{x}^i = a\, x^i$ con a un escalar constante, muestre que

1) $\tau^i_j = \frac{\operatorname{adj}\left[T^i_j\right]}{T}$ es un tensor
2) Su determinante, det $\left[\tau^i_j\right] = \tau$ y su traza, tr $\left[\tau^i_j\right] = \tau^i_i$ también serán invariantes.
3) $T^i_j = \frac{\operatorname{adj}\left[\tau^i_j\right]}{\tau}$
4) $\tau T = 1$

5. Dados dos sistemas de coordenadas ortogonales $O \rightleftharpoons (x, y, z)$ y $\tilde{O} \rightleftharpoons (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$,donde el sistema de coordenas $\tilde{O}$ se obtiene a rotando O, $\frac{\pi}{6}$alrededor del eje z, para rotarlo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje $\tilde{x}$ con lo cual los ejes $\tilde{y}$ y z coinciden.

a) Si tenemos los vectores

$$\vec{A} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{\mathbf{k}} \qquad \vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

Expréselos en el sistema de coordenadas $\tilde{O} \rightleftharpoons (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

b) El tensor de esfuerzos (tensiones normales y tangenciales a una determinada superficie) se expresa en el sistema $O \rightleftharpoons (x, y, z)$ como

$$P^i_j = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & P_6 & P_3 \end{pmatrix}$$

¿cuál será su expresión en el sistema de coordenadas $\tilde{O} \rightleftharpoons (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$?

6. Suponga un sistema de coordenadas ortogonales generalizadas $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ las cuales tienen las siguiente relación funcional con las coordenadas cartesianas

$$q^1 = x + y; \qquad q^2 = x - y; \qquad q^3 = 2z;$$

   a) Compruebe que el sistema $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ conforma un sistema de coordenadas ortogonales
   b) Encuentre los vectores base para este sistema de coordenadas
   c) Encuentre el tensor métrico y el elemento de volumen en estas coordenada.
   d) Encuentre las expresiones en el sistema $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ para los vectores

$$\vec{A} = 2\hat{\jmath}; \qquad \vec{B} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}; \qquad \vec{C} = \hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

   e) Encuentre en el sistema $\left(q^1, q^2, q^3\right)$ la expresión para las siguienentes realciones vectoriales

$$\vec{A} \times \vec{B}; \qquad \vec{A} \cdot \vec{C}; \qquad \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}$$

   ¿ qué puede decir si compara esas expresiones en ambos sistemas de coordenadas ?

7. La relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas bipolares (ξ, ζ) viene dada por

$$x = \frac{a \sinh \xi}{\cosh \xi + \cos \zeta}; \qquad y = \frac{a \sin \zeta}{\cosh \xi + \cos \zeta}; \qquad \text{con } a = const$$

   a) Compruebe si los vectores base para las coordenadas bipolares son ortogonales
   b) Encuentre el tensor métrico para las coordenadas bipolares
   c) Escriba las componentes covariantes y contravariantes para los vectores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.