Métodos Matemáticos 1
Tarea 4
Transformaciones Lineales

L. A. Núñez*

Centro de Astrofísica Teórica,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
y
Centro Nacional de Cálculo Científico
Universidad de Los Andes (CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela

Mérida, Marzo 2004

1. Para cada uno de los casos propuestos, determine se la transformación propuesta es o no una transformación lineal

   a) $\mathbf{T}\left\{(x,y,z)\right\} = (x+1, 2y+1, 3z-1)$
   b) $\mathbf{T}\left\{(x,y,z)\right\} = (x, y^2, z^3)$
   c) $\mathbf{T}\left\{(x,y,z)\right\} = (x+z, 0, x+y)$
   d) Sea $\mathcal{V}_n$ el espacio vectorial de todos los polinomios $P_n(x)$ de grado $\leq n$ y sea

   $$Q_n = \mathbf{T}\left\{P_n(x)\right\} \equiv P_n(x+1) \qquad \forall x \in \Re$$

   e) Sea $\mathcal{C}^1_{[-1,1]}$ el espacio vectorial de funciones diferenciables en el intervalo $[-1,1]$ entonces definimos

   $$g(x) = \mathbf{T}\left\{f(x)\right\} \equiv x f'(x) \equiv x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\right] \qquad \forall x \in \Re$$

*e-mail: `nunez@ula.ve`

f) Sea $\mathcal{C}^1_{[a,b]}$ el espacio vectorial de funciones diferenciables en el intervalo $[a,b]$ entonces definimos

$$g(x) = \mathbf{T}\{f(x)\} \equiv \int_a^b \mathrm{d}x \; f(t) \; \mathrm{sen}\,(x-t)$$

2. Definiremos como transformación lineal biyectiva, biunívoca o $1-1$ aquella transformación $\mathbf{T} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ tal que si (x,y,z) es un punto en $\mathbf{V}_1$ el cual está asociado a un punto $(u,v,w) = \mathbf{T}\{(x,y,z)\}$ en $\mathbf{V}_2$ entonces, $(x,y,z) = \mathbf{T}^{-1}\{(u,v,w)\}$ para $\forall\,(u,v,w) \in \mathbf{V}_2$. Determine si las siguientes transformaciones lineales son biyectivas en el sentido antes mencionado.

    a) $\mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (x+1, 2y+1, 3z-1)$

    b) $\mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (x, y^2, z^3)$

    c) $\mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (x+z, 0, x+y)$

    d) $\mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (x, 2y, 3z)$

    e) $\mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (z, y, x)$

3. Considere las siguientes transformaciones lineales $\mathbf{T}, \mathbf{S} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ tales que

$$\mathbf{S}\{(x,y,z)\} = (z,y,x) \qquad \wedge \qquad \mathbf{T}\{(x,y,z)\} = (x, x+y, x+y+z)$$

    a) Determine la acción de los siguientes operadores

        1) $[\mathbf{S},\mathbf{T}]$

        2) $(\mathbf{ST})^2$

        3) $[\mathbf{S},\mathbf{T}]^2$

    b) Pruebe que $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ son transformaciones lineales biyectivas

    c) ¿ El operador $[\mathbf{S},\mathbf{T}]$ será biyectivo ?

    d) Encuentre la imagen de (u,v,w) para $\mathbf{S^{-1}}, \mathbf{T^{-1}}, (\mathbf{ST})^{-1}$

4. Dados dos operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y

    a) Considere que $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = 0$ y pruebe que $(\mathbf{AB})^n = \mathbf{A}^n\mathbf{B}^n$

    b) Ahora considere que $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{1}$ el operador indentidad, pruebe que $\mathbf{AB}^n - \mathbf{B}^n\mathbf{A} = \mathbf{nB}^{n-1}$

5. Pruebe la indentidad de Jacobi $0 = [\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]$

6. Pruebe la relación de Glauber

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A},\mathbf{B}]}$$