Métodos Matemáticos 1
Tarea 4
Análisis Vectorial
Enero 2005

1. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

2. La ecuación de equilibrio hidrostático para una esférica es

$$\vec{\nabla} P(r) + \rho(r) \vec{\nabla} \varphi(r) = 0$$

donde $P(r)$ es la presión, $\rho(r)$ la densidad y $\varphi(r)$ el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

3. Dado $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{\mathbf{k}}$ con $\|\vec{r}\| = r = cte$, $f(r)$ un campo escalar bien comportado y $\vec{a}$ y $\vec{c}$ vectores constantes, muestre que

   a) $\vec{\nabla} r = \hat{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r}$; $\quad \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r} f(r)) = \vec{a} f(r) + (\vec{a} \cdot \vec{r}) f'(r)\, \hat{\mathbf{u}}_r$

   b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{r} f(r)) = 3 f(r) + r f'(r)\,; \quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r})\, \vec{r}) = 4 (\vec{a} \cdot \vec{r})$
   $\vec{\nabla} \cdot ((\vec{a} \cdot \vec{r})\, \vec{c}) = \vec{\nabla} \cdot ((\vec{c} \cdot \vec{r})\, \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,; \quad \vec{\nabla} \cdot ((\vec{r} \times \vec{a}) \times \vec{c}) = -2 (\vec{a} \cdot \vec{c})$

   c) Encuentre los enteros n tales que $\vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = 0$

   d) $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{\nabla} \times (f(r)\, \vec{r}) = 0; \quad \vec{\nabla} \times (\vec{c} \times \vec{r}) = 2\vec{c}; \quad \vec{\nabla} \times (\vec{c}\, (\vec{a} \cdot \vec{r})) = \vec{a} \times \vec{c}$
   $\vec{\nabla} \times ((\vec{c} \times \vec{r})\, \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{c}$

   e) $\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) \cdot \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) f(r) = r^2 \Delta f(r) - r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ con $\Delta f(r) \equiv \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) f(r)$

4. Encuentre la expresión para la divergencia y el rotor de la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ de un cuerpo rígido alrededor de un punto (x, y, z)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular y $\vec{\epsilon}$ es un vector constante.

5. Pruebe que el campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r})$ de un disco que rota alrededor de su centro con una velocidad angular $\vec{\omega}$ cumple con la relación $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\vec{\omega}$

6. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los siguientes campos.

a) $\vec{a} = \frac{1}{2}\left(-y\ \hat{\imath} + x\ \hat{\jmath}\right)$

b) $\vec{a} = (xy+1)\,\hat{\imath} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 2\right)\hat{\jmath}$

7. Encuentre el rotor y el flujo para el campo vectorial

$$\vec{a} = \left(x^2 + y - 4\right)\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath} + \left(2xz + z^2\right)\hat{\mathbf{k}}$$

a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z > 0$

8. Muestre la relación

$$\Delta\vec{a} \equiv \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right)$$

y a partir de ella encuentre las componentes del Laplaciano $\Delta\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas

9. Muesre que el vector, $\vec{A}\left(\vec{r}\right)$, soluci'on a la ecuaci'on

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - k^2\vec{A} = 0 \qquad \Rightarrow \left(\vec{\nabla} + k^2\right)\vec{A} = 0$$

con la condici'on solenoidal $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. La ecuaci'on $\left(\vec{\nabla} + k^2\right)\vec{A} = 0$ se conoce como la ecuaci'on de Helmholtz.

10. Dado un campo de fuerzas$\vec{F} = r^n\ \vec{r}$. Verifique si existe una función escalar $\varphi\left(x, y, z\right)$ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi\left(x, y, z\right)$. En el caso de que sea posible, encuentre esa función $\varphi\left(x, y, z\right)$.

11. En mecánica clásica la cantidad de movimiento viene definida como $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$. Para pasar a mec'anica cu'antica se asocia $\vec{r}$ y $\vec{p}$ con los operadores posici'on y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la funci'on de onda nos proveen

$$\langle\mathbf{r}|\,\mathbf{X}\,|\psi\rangle = x\,\langle\mathbf{r}\,|\psi\rangle = x\ \psi\left(\vec{r}\right) \qquad \langle\mathbf{r}|\,\mathbf{P}_x\,|\psi\rangle = \left(-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle\mathbf{r}\,|\psi\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(\vec{r}\right)$$

$$\langle\mathbf{r}|\,\mathbf{Y}\,|\psi\rangle = y\,\langle\mathbf{r}\,|\psi\rangle = y\ \psi\left(\vec{r}\right) \qquad \langle\mathbf{r}|\,\mathbf{P}_y\,|\psi\rangle = \left(-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\langle\mathbf{r}\,|\psi\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(\vec{r}\right)$$

$$\langle\mathbf{r}|\,\mathbf{Z}\,|\psi\rangle = z\,\langle\mathbf{r}\,|\psi\rangle = z\ \psi\left(\vec{r}\right) \qquad \langle\mathbf{r}|\,\mathbf{P}_z\,|\psi\rangle = \left(-i\hbar\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\langle\mathbf{r}\,|\psi\rangle = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial z}\psi\left(\vec{r}\right)$$

En definitiva, en coordenadas cartesianas en la representaci'on de coordenadas $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ tendremos que

$$\langle\mathbf{r}|\,\mathbf{R}\,|\psi\rangle = \vec{r}\ \psi\left(\vec{r}\right) \qquad \text{y} \qquad \langle\mathbf{r}|\,\mathbf{P}_x\,|\psi\rangle = -i\hbar\ \vec{\nabla}\ \psi\left(\vec{r}\right)$$

a) Muestre que en Mec'anica cu'antica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular son

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{L}_x |\psi\rangle = -i\hbar \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\vec{r}) ; \qquad \langle \mathbf{r}| \mathbf{L}_y |\psi\rangle = -i\hbar \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\vec{r})$$

$$\langle \mathbf{r}| \mathbf{L}_z |\psi\rangle = -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\vec{r})$$

b) Utilizando las definiciones anteriores muestre que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantindad de movimiento angular cumple con

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = i\hbar \mathbf{L}_z \qquad \text{y en general } \varepsilon_{ijk}\mathbf{L}^i\mathbf{L}^j = i\hbar \mathbf{L}_i \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{L}} \times \tilde{\mathbf{L}} = i\tilde{\mathbf{L}}$$

con $\mathbf{L}^1 = \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_x$; $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{L}_y$; $\mathbf{L}^3 = \mathbf{L}_3 = \mathbf{L}_z$ y $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_x\hat{\imath} + \mathbf{L}_y\hat{\jmath} + \mathbf{L}_z\hat{\mathbf{k}}$

c) Dados dos Operadores Vectoriales $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$ que conmtan entre ellos y con $\tilde{\mathbf{L}}$ tales que

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\right] = \left[\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{L}}\right] = \left[\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}}\right] = 0$$

demuestre entonces que

$$\left[\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{B}} \cdot \tilde{\mathbf{L}}\right] = i \left(\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\mathbf{B}}\right) \cdot \tilde{\mathbf{L}}$$

12. El campo magnético generado por una corriente I es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath} \right)$$

Encuentre un vector potencial magnético, $\vec{A}$, tal que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

13. Si un campo vectorial tiene la forma $\vec{B} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\varphi$, entonces $\vec{B}$ es solenoidal y su potencial vectorial es: $\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\phi\vec{\nabla}\varphi - \varphi\vec{\nabla}\phi\right)$.

14. Dados, el potencial vectorial, $\vec{A}(\vec{r})$, del momento magn'etico dipolar, $\vec{m}$, y la fuerza $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} \times \vec{m}\right)$ que registra un momento magn'etico dipolar, $\vec{m}$, sometido a un campo magn'etico externo, $\vec{B}$, muestre que la fuerza ejercida por un dipolo magn'etico sobre otro viene dada por

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A}_{\vec{m}}(\vec{r}) = \left(\dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\right) \vec{m} \times \vec{r} \\[2ex] \vec{F}_{\vec{m}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{B} \times \vec{m}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \vec{F}_{m_1 \to m_2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{2m_{1r}\ m_{2r} - m_{1\varphi}\ m_{2\varphi} - m_{1z}\ m_{2z}}{r^3} \right)$$

con $\vec{m} = m_r\hat{\mathbf{u}}_r + m_\varphi\hat{\mathbf{u}}_\varphi + m_z\hat{\mathbf{u}}_z$

15. Desarrolle el Teorema de Gauss para el caso bidimensional. Esto es, suponga una línea de carga orientada en la dirección del eje z genera un potencial

$$\varphi(\rho) = -q\frac{\ln \rho}{2\pi\epsilon_0}; \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \qquad \text{con } \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

16. Pruebe la generalizaci'on del Teorema de Green

$$\iiint_V \{\zeta(\vec{r})\,\mathcal{L}\xi(\vec{r}) - \xi(\vec{r})\,\mathcal{L}\zeta(\vec{r})\}\,\mathrm{d}\,V = p(\vec{r})\iint_s \left\{\zeta(\vec{r})\,\tilde{\nabla}\xi(\vec{r}) - \xi(\vec{r})\,\tilde{\nabla}\zeta(\vec{r})\right\}\cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

donde $\mathcal{L}$ es el operador autoadjunto definido por $\mathcal{L} = \vec{\nabla}\cdot\left(p(\vec{r})\,\vec{\nabla}\right) + q(\vec{r})$

17. Considere una esfera de radio $r = a$ y carga Q.Grafique su potencial electrost'atico para $0 < r < \infty$.

18. Considere una esfera de densidad uniforme, ρ_0, radio $r = a$, y masa M.

    a) Muestre que la fuerza gravitacional por unidad de masa es $\vec{F} = -\left(\frac{4\pi G\rho_0}{3r}\right)\hat{\mathbf{u}}_r$ para $0 < r \leq a$

    b) Encuentre el potencial gravitacional asociado a esta fuerza

    c) Imagine un tunel que atravieza la esfera pasado por su centro. Encentre la ecuaci'on de movimiento y la expresi'on del per'iodo para una part'icula de masa m, que se deja caer por ese t'unel.

19. Dado un vector potencial magnético, $\vec{A}$, tal que $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$ muestre que

$$\iint_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S} = \oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} \qquad \text{es invariante de calibre: } \vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r})$$

20. La fuerza de Lorentz para una part'icula con carga q que se mueve con una velocidad $\vec{v}$ en un campo electr'ico $\vec{E}$ y magn'etico $\vec{B}$ es $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$. Muestre que

$$\left.\begin{array}{c} \vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \\ \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \\ \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \vec{F} = \left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} + \vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right)\right]$$