Métodos Matemáticos 1
Tarea 5
Matrices y Transformaciones Lineales

L. A. Núñez*

Centro de Astrofísica Teórica,
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela
y
Centro Nacional de Cálculo Científico
Universidad de Los Andes (CeCalCULA),
Corporación Parque Tecnológico de Mérida,
Mérida 5101, Venezuela

Mérida, Abril 2004

1. Para comenzar a calentar ejercicios del Apostol

    a) *De la sección 2.12*: 3, 8, 19.
    b) *De la sección 2.16:* 1, 4, 12, 14.
    c) *De la sección 2.20:* 6, 10.
    d) *De la sección 2.21:* 2, 6, 8.

2. El espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Sean dos *kets*

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

*e-mail: nunez@ula.ve

a) ¿ Estos *kets* están normalizados ?

b) Calcule la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ de los operadores proyección $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}$ y $\mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}$

c) Calcule la representación matricial de los siguientes operadores $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}\mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}$, $\left[\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}\right]$

d) ¿ $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}\mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}, \left[\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}\right]$ serán hermíticos ?

e) El conjunto $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |u_3\rangle\}$¿ será una base para ese espacio de estados ? de ser así encuentre la representación matricial de los operadores $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}\mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}, \left[\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi 1\rangle}\right]$

3. Dadas

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_u = \lambda\sigma_x + \mu\sigma_y$$

a) Muestre que si $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ se cumple que

$$e^{i\alpha\sigma_k} = \mathbf{I}\cos\alpha + i\sigma_k \operatorname{sen}\alpha \qquad \text{con } k = x, y, u. \text{ Mientras que } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcule las matrices que representan a los operadores $e^{2i\sigma_x}$, $\left(e^{i\sigma_x}\right)^2$ y $e^{i(\sigma_x+\sigma_y)}$

c) Muestre si se cumplen las siguientes igualdades

$$e^{2i\sigma_x} = \left(e^{i\sigma_x}\right)^2; \qquad e^{i(\sigma_x+\sigma_y)} = e^{i\sigma_x}e^{i\sigma_y}$$

4. Consiere, otra vez que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Definimos dos operadores $\mathbf{L}_z$y $\mathbf{S}$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{lll} \mathbf{L}_z|u_1\rangle = |u_1\rangle; & \mathbf{L}_z|u_2\rangle = 0; & \mathbf{L}_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle \\ \mathbf{S}|u_1\rangle = |u_3\rangle; & \mathbf{S}|u_2\rangle = |u_2\rangle; & \mathbf{S}|u_3\rangle = |u_1\rangle \end{array}$$

a) Encuentre la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ de los operadores: $\mathbf{L}_z, \mathbf{S}, \mathbf{L}_z^2$,$\mathbf{S}^2$, $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$

b) Encuentre la matrices más generales que conmuten con:

1) $\mathbf{L}_z$,
2) $\mathbf{S}$,
3) $\mathbf{L}_z^2$,
4) $\mathbf{S}^2$,
5) $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$