

Métodos Matemáticos 1
Tarea 5
Matrices y Transformaciones Lineales
Diciembre 2004

1. Para comenzar a calentar ejercicios del Apostol

- a) De la sección 2.12: 3, 8, 19.
- b) De la sección 2.16: 1, 4, 12, 14.
- c) De la sección 2.20: 6, 10.
- d) De la sección 2.21: 2, 6, 8.

2. El espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Sean dos *kets*

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |u_1\rangle + \frac{i}{2} |u_2\rangle + \frac{1}{2} |u_3\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} |u_3\rangle$$

- a) ¿Estos *kets* están normalizados ?
- b) Calcule la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ de los operadores proyección $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}$ y $\mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}$
- c) Calcule la representación matricial de los siguientes operadores $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}\mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}$, $[\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}]$
- d) ¿ $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}\mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}, [\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}]$ serán hermíticos ?
- e) El conjunto $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle, |u_3\rangle\}$ ¿ será una base para ese espacio de estados ? de ser así encuentre la representación matricial de los operadores $\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}\mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}, [\mathbf{P}_{|\psi_0\rangle}, \mathbf{P}_{|\psi_1\rangle}]$

3. Dadas

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_u = \lambda\sigma_x + \mu\sigma_y$$

a) Muestre que si $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ se cumple que

$$e^{i\alpha\sigma_k} = \mathbf{I} \cos \alpha + i\sigma_k \sin \alpha \quad \text{con } k = x, y, u. \text{ Mientras que } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Calcule las matrices que representan a los operadores $e^{2i\sigma_x}$, $(e^{i\sigma_x})^2$ y $e^{i(\sigma_x + \sigma_y)}$
- c) Muestre si se cumplen las siguientes igualdades

$$e^{2i\sigma_x} = (e^{i\sigma_x})^2; \quad e^{i(\sigma_x + \sigma_y)} = e^{i\sigma_x} e^{i\sigma_y}$$

4. Considere, otra vez que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Definimos dos operadores \mathbf{L}_z y \mathbf{S} de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_z |u_1\rangle &= |u_1\rangle; & \mathbf{L}_z |u_2\rangle &= 0; & \mathbf{L}_z |u_3\rangle &= -|u_3\rangle \\ \mathbf{S} |u_1\rangle &= |u_3\rangle; & \mathbf{S} |u_2\rangle &= |u_2\rangle; & \mathbf{S} |u_3\rangle &= |u_1\rangle\end{aligned}$$

- a) Encuentre la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ de los operadores: $\mathbf{L}_z, \mathbf{S}, \mathbf{L}_z^2, \mathbf{S}^2, [\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$
- b) Encuentre las matrices más generales que conmuten con:
- 1) \mathbf{L}_z ,
 - 2) \mathbf{S} ,
 - 3) \mathbf{L}_z^2 ,
 - 4) \mathbf{S}^2 ,
 - 5) $[\mathbf{L}_z, \mathbf{S}]$