Métodos Matemáticos 1
Tarea 6
Autovalores y Autovectores
Enero 2005

1. Para comenzar a calentar ejercicios del Apóstol

   a) *De la sección 3.6*: 3, 9, 10.
   b) *De la sección 3.11:* 1, 2, 6.
   c) *De la sección 3.17:* 4, 5.
   d) *De la sección 4.8:* 6, 8, 11.
   e) *De la sección 4.10:* 4,7, 8.
   f) *De la sección 5.5:* 5, 7.
   g) *De la sección 5.11:* 2, 3, 10, 14.

2. Dado el operador σ_z cuya acción viene definida por las siguientes ecuaciones

$$\sigma_z \left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle \qquad \text{y} \qquad \sigma_z \left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$$

   y la representación matricial de otros dos operadores en la base $\{\left|+\right\rangle, \left|-\right\rangle\}$:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

   a) Encuentre la representación matricial para σ_z
   b) Encuentre los autovalores y autovectores para la Matrices de Pauli: σ_x, σ_y y σ_z.
   c) Compruebe las siguientes propiedades de las Matrices de Pauli

$$\det(\sigma_j) = -1 \qquad \text{con } j = x, y, z.$$
$$\mathrm{Tr}(\sigma_j) = 0 \qquad \text{con } j = x, y, z.$$
$$\sigma_j \sigma_k = i \sum_m \epsilon_{jkm} \sigma_m + \delta_{jk} \mathbf{1} \qquad \text{con } j, k, m = x, y, z \qquad \text{y } \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$[\sigma_j \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkm}\sigma_m \qquad \text{con } j, k, m = x, y, z.$$
$$[\sigma_j \sigma_k]_+ = \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 0 \qquad \text{con } j, k = x, y, z.$$

   d) Muestre que las Matrices de Pauli σ_x, σ_y, σ_z y la matriz identidad forman base para el espacio de matrices 2×2, de tal forma que una matriz genérica puede expresarse en esa base como

$$M = \begin{pmatrix} m_1^1 & m_2^1 \\ m_1^2 & m_2^2 \end{pmatrix} = a_0 \mathbf{1} + \vec{a} \cdot \tilde{\sigma} \qquad \text{con } \tilde{\sigma} = \sigma_x \hat{\imath} + \sigma_y \hat{\jmath} + \sigma_z \hat{\mathbf{k}}$$

   y $\vec{a} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{\mathbf{k}}$ siendo a_0, a_x, a_yy a_z números complejos. Muestre además que

$$a_0 = \mathrm{Tr}(M) \qquad \text{y} \qquad \vec{a} = \mathrm{Tr}(M\tilde{\sigma})$$

3. Sea $\mathbf{H}$ un operador hermítico cuya representación matricial en la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} h^1_1 & h^1_2 \\ h^2_1 & h^2_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } h^2_1 = \left(h^1_2\right)^*$$

   a) Si descomponemos $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\left(h^1_1 + h^2_2\right)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\left(h^1_1 - h^2_2\right)\mathbf{K}$ encuentre la representación matricial del operador $\mathbf{K}$ en la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$.

   b) Si los autovectores de $\mathbf{H}$ y $\mathbf{K}$ $\{|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}$ son tales que

$$\mathbf{H}|\psi_\pm\rangle = E_\pm|\psi_\pm\rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{K}|\psi_\pm\rangle = \kappa_\pm|\psi_\pm\rangle$$

   Muestre que $E_\pm = \frac{1}{2}\left(h^1_1 + h^2_2\right) + \frac{1}{2}\left(h^1_1 - h^2_2\right)\kappa_\pm$

   c) Si definimos

$$\tan\theta = \frac{2\left|h^2_1\right|}{h^1_1 - h^2_2} \qquad \text{y} \qquad h^2_1 = \left|h^2_1\right| e^{i\varphi} \qquad \text{con } 0 \leq \theta < \pi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

   Encuentre la representación matricial de $\mathbf{K}$ en término de θ y φ, encuentre, igualmente la expresión para los autovalores de $\mathbf{K}$, $\{\kappa_+, \kappa_-\}$.

   d) Encuentre la base **ortonormal** de autovectores para $\mathbf{K}$ y $\mathbf{H}$ en término de θ y φ y expresada en la base $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$.