

# Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior...<sup>1</sup>

L. A. Núñez<sup>2</sup>

*Centro de Física Fundamental,  
Departamento de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela y  
Centro Nacional de Cálculo Científico, Universidad de Los Andes,  
(CECALCULA),  
Corporación Parque Tecnológico de Mérida, Mérida 5101, Venezuela*

Versión  $\beta$  1.0 Mayo 2006

<sup>1</sup>ADVERTENCIA: El presente documento constituye una guía para los estudiantes de Métodos Matemáticos de la Física de la Universidad de Los Andes. Es, en el mejor de los casos, un FORMULARIO y de ninguna manera sustituye a los libros de texto del curso. La bibliografía de la cual han surgido estas notas se presenta al final de ellas y debe ser consultada por los estudiantes.

<sup>2</sup>e-mail: [nunez@ula.ve](mailto:nunez@ula.ve) Web: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/nunez/>

# Índice

<b>1. Definiciones para comenzar</b>	<b>1</b>
<b>2. Homogéneas, Lineales, de Segundo Orden</b>	<b>2</b>
<b>3. Ecuaciones Diferenciales de Orden n</b>	<b>4</b>
<b>4. Algunos Métodos de Solución para Ecuaciones Inhomog'eneas</b>	<b>7</b>
4.1. El Wronskiano . . . . .	7
4.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados . . . . .	8
4.3. Métodos de Variación de los Parámetros . . . . .	10
4.4. Métodos de Reducción de Orden . . . . .	12
<b>5. Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior</b>	<b>13</b>
5.1. Mecánica y Electricidad . . . . .	13
5.2. Oscilaciones libres . . . . .	13
5.3. Oscilaciones Libres Amortiguadas . . . . .	14
5.4. Oscilaciones Forzadas . . . . .	17
5.4.1. Oscilaciones Forzadas no amortiguadas . . . . .	17
5.4.2. Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$ . . . . .	17
5.4.3. Resonancia $\varpi = \omega_0$ . . . . .	19
5.5. Oscilaciones Forzadas amortiguadas . . . . .	19
5.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio . . . . .	22
5.7. Péndulo Simple con desplazamiento finito. . . . .	23
5.8. Disgresión Elíptica . . . . .	30
5.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal ? . . . . .	33
5.10. El Péndulo Físico: Integración Numérica . . . . .	34
<b>6. Transformaciones Integrales</b>	<b>35</b>
6.1. Cálculo Operacional . . . . .	35
6.2. Definiciones para Comenzar . . . . .	36
6.3. Transformada de Laplace . . . . .	38
6.4. Ejemplos Sencillos . . . . .	39
6.5. Integral de Convolución . . . . .	41
<b>7. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>42</b>
7.1. Motivación . . . . .	42
7.2. Notación Vectorial . . . . .	44
7.3. Sistemas Lineales Homogéneos . . . . .	45
7.4. Sistemas Lineales Inhomogéneos . . . . .	47

## 1. Definiciones para comenzar

### Definición

La ecuación diferencial

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + a_n(x) y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

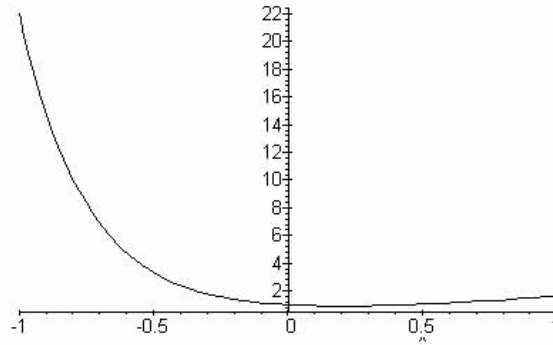


Figura 1:  $y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$

o equivalentemente,

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

es lineal de orden  $n$ . Obviamente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &= 0 && \implies \text{Homogénea} \\ \mathcal{F}(x) &\neq 0 && \implies \text{InHomogénea} \\ a_i(x) &= a_i = \text{tes} \end{aligned}$$

### Definición

Si los coeficientes  $a_i = \text{tes}$  entonces la ecuación diferencial lineal y homogénea, de orden  $n$ , tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Las raíces de este polinomio indicarán la forma de la solución.

### Definición

Si el polinomio característico puede factorizarse

$$(r - m_1)^{k_1} (r - m_2)^{k_2} (r - m_3)^{k_3} \dots (r - m_l)^{k_l} = 0$$

entonces diremos que las raíces  $m_{k_1}, m_{k_2}, m_{k_3}, \dots, m_{k_l}$  tienen multiplicidades  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_l$ , respectivamente.

## 2. Homogéneas, Lineales, de Segundo Orden

La ecuación

$$a y'' + b y' + c y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a r^2 + b r + c = 0$$

tiene asociada ese polinomio característico y sus raíces  $m_1$  y  $m_2$  condicionan la solución de la manera siguiente

1. Si  $m_1 \neq m_2$  y  $m_1$  y  $m_2$  son reales, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

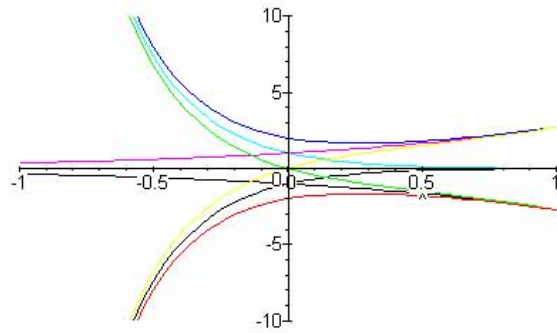


Figura 2:  $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x$  para  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

2. Si  $m_1 = m_2$  y  $m_1$  y  $m_2$  son reales, entonces la solución es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}$$

3. Si  $m_1 = \alpha + i\beta$  con  $\beta \neq 0$  y  $m_2 = \bar{m}_1 = \alpha - i\beta$ , entonces la solución es

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

### Ejemplos

La ecuación

$$y'' + 3y' - 4y = 0; \quad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 3r - 4 = (r + 4)(r - 1) = 0$$

tiene asociado ese polinomio característico y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = \frac{2}{5}e^{-4x} + \frac{3}{5}e^x$$

En la figura 1 se encuentra graficada esa solución particular. De igual modo, para distintos valores de  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$  tendremos las gráficas representadas en la figura 2 ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

Otra ecuación podría ser

$$y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-x}$$

La gráfica para esta solución está representada en la figura 3

Para distintos valores de  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$  tendremos las gráficas representadas en la figura 4. Cabe seguir preguntando ¿Cuáles son las condiciones iniciales a las cuales corresponden esos valores de las constantes?

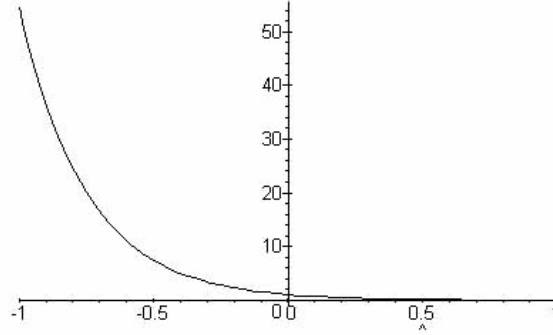


Figura 3:  $y(x) = e^{-x}$

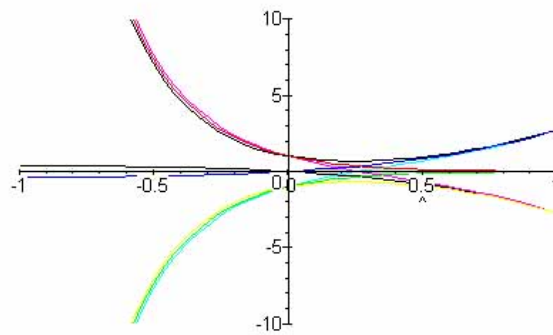


Figura 4:  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$  para  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

Finalmente, la ecuación

$$y'' + 4y' + 20y = 0; \quad y(0) = 3 \quad \wedge \quad y'(0) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + 4r + 20 = (r + 2)^2 + 16 = 0$$

con las siguientes soluciones  $r = -2 \pm 4i$  y por lo tanto tiene como solución general

$$y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) \quad \text{y como solución particular} \quad y(x) = e^{-2x} \left( 3 \cos 4x + \frac{5}{4} \sin 4x \right)$$

y su representación gráfica se encuentra en la figura 5 y para distintos valores de las constantes

Al igual que en los casos anteriores, para distintos valores de las constantes de integración, tendremos las gráficas de la figura 6

### 3. Ecuaciones Diferenciales de Orden n

La ecuación

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + a_n y^{(n)}(x) = 0$$

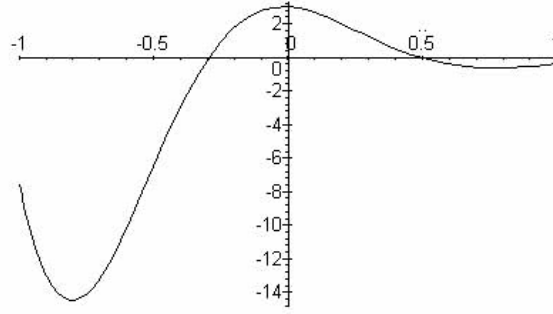


Figura 5:  $y(x) = e^{-2x} \left( 3 \cos 4x + \frac{5}{4} \sin 4x \right)$

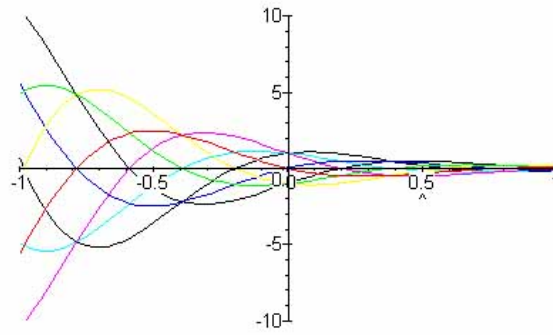


Figura 6:  $y(x) = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$  para  $C_1 = \{-1, 0, 1\}$  y  $C_2 = \{-1, 0, 1\}$

con  $a_i = \text{ctes}$  tiene asociada un polinomio característico de la forma

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

el cual condicionará la solución de la siguiente forma

1. Si  $m$  es una raíz real con multiplicidad  $k \geq 2$  entonces las  $k$  soluciones asociadas con  $m$  serán de la forma

$$e^{mx}, x e^{mx}, x^2 e^{mx}, x^3 e^{mx}, \dots, x^{k-1} e^{mx}$$

2. Si  $m$  y  $\bar{m}$  son parejas de soluciones complejas,  $\alpha \pm i\beta$ , del polinomio característico y tienen multiplicidad  $k$ , entonces las soluciones correspondientes serán

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Ejemplos

- La ecuación

$$24y''' + 2y'' - 5y' - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 24r^3 + 2r^2 - 5r - 1 = (3r + 1)(2r - 1)(4r + 1) = 0$$

consecuentemente con las raíces

$$m_1 = -\frac{1}{3}, \quad m_2 = \frac{1}{2}, \quad m_3 = -\frac{1}{4},$$

y con la solución de la forma

$$y(x) = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{x/2} + C_3 e^{-x/4}$$

- La ecuación

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r + 1)^3 = 0$$

con las raíces  $m = -1$  con multiplicidad  $k = 3$  y con una solución de la forma

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

- La ecuación

$$4y^{(4)} + 12y''' + 49y'' + 42y' + 10y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4r^4 + 12r^3 + 49r^2 + 42r + 10 = (r^2 + 2r + 10)(2r + 1)^2 = 0$$

consecuentemente con las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad m_3 = -\frac{1}{2}, \text{ con multiplicidad } 2$$

Entonces la solución es de la forma

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + C_3 e^{-x/2} + C_4 x e^{-x/2}$$

- La ecuación

$$y^{(4)} + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^4 + 4r^3 + 24r^2 + 40r + 100 = (r^2 + 2r + 10)^2 = 0$$

con las raíces

$$m_1 = -1 + 3i, \quad m_2 = -1 - 3i, \quad \text{con multiplicidad } 2.$$

Entonces la solución es de la forma

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + C_3 x \cos 3x + C_4 x \operatorname{sen} 3x)$$

- La ecuación

$$4y''' + 33y' - 37y = 0;$$

con

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4r^3 + 33r - 37 = (r - 1)(4r^2 + 4r + 37) = 0$$

consecuentemente con una solución general de la forma

$$y(x) = C_1 e^x + e^{-x/2}(C_2 \cos 3x + C_3 \operatorname{sen} 3x)$$

y con la solución particular

$$y(x) = \frac{8}{45} e^x - e^{-x/2} \left( \frac{8}{45} \cos 3x + \frac{19}{45} \operatorname{sen} 3x \right)$$

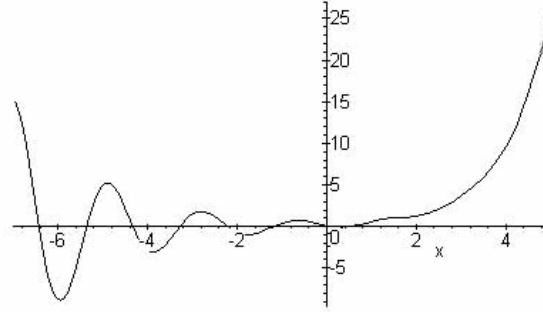


Figura 7:  $y(x) = \frac{8}{45}e^x - e^{-x/2}(\frac{8}{45} \cos 3x + \frac{19}{45} \sin 3x)$

## 4. Algunos Métodos de Solución para Ecuaciones Inhomog'eneas

### 4.1. El Wronskiano

**Definición:** Independencia y Dependencia Lineal.

Sean  $n$  funciones  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ ,  $f_4(x)$ ,  $\dots$ ,  $f_n(x)$ , cuando menos  $n - 1$  veces diferenciables. Entonces, el conjunto  $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$ , se dice linealmente dependiente en el intervalo  $I$ , si existen algunas constantes,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $\dots$ ,  $c_n$  distintas de cero tal que

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

Por el contrario, si no existe ninguna constante  $c_i \neq 0$ , se dirá que  $S$  es linealmente independiente.

**Definición:** Wronskiano

El conjunto  $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$  de funciones, cuando menos  $n - 1$  veces diferenciables, conforman el Wronskiano,

$$W(S) = W(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x))$$

a través del siguiente determinante

$$W(S) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si  $W(S) \neq 0$  al menos en un punto dentro del intervalo  $I$ , entonces  $S$  es linealmente independiente

**Definición:** Conjunto Fundamental de Soluciones.

El conjunto  $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), \dots, f_n(x)\}$  de  $n$  soluciones no triviales a la ecuación diferencial:

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \dots + a_n(x) y^{(n)}(x) = 0, \quad (1)$$



Se le denomina conjunto fundamental de soluciones. La combinación lineal

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)$$

también es solución de la ecuación diferencial (1) y se denomina como solución general de (1). Adicionalmente, si los coeficientes  $a_i(x)$  son continuos en el intervalo abierto I para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces la ecuación diferencial (1) tiene un conjunto fundamental de  $n$  soluciones linealmente independientes.

**Definición:** Soluciones Particulares y Generales.

Dada una ecuación diferencial lineal Inhomogénea

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_n(x) y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (2)$$

Si  $y_p(x)$  es solución de (2) sin constantes arbitrarias, entonces  $y_p(x)$  se denomina solución particular de (2). De igual modo, se denominará solución general de (2) a la suma de la solución,  $y_h(x)$ , de la ecuación homogénea (1) más la solución particular:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

## 4.2. Métodos de los Coeficientes Indeterminados

Dada la ecuación diferencial

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (3)$$

con  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  coeficientes constantes, el método de los coeficientes indeterminados se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

$$a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = 0 \quad (4)$$

y obtenga  $y_h(x)$ .

2. Proponga la forma de la solución particular para la ecuación inhomogénea (3) siguiendo el siguiente procedimiento. Dada  $F(x) = b_0 g_0(x) + b_1 g_1(x) + \cdots + b_n g_n(x)$ , con los  $b_i$  coeficientes constantes, entonces

- a) Si  $F(x) = P(x)$ , un polinomio, es decir  $g_i(x) = x^m$  entonces proponga como solución particular a

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m$$

- b) Si  $g_i(x) = x^m e^{kx}$  entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

$$y_p(x) = e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m)$$

- c) Si  $g_i(x) = x^m e^{kx} \cos \beta x$  o  $g_i(x) = x^m e^{kx} \sin \beta x$ , entonces proponga como conjunto fundamental de soluciones particulares a

$$y_p(x) = \begin{matrix} e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m) \cos \beta x + \\ e^{kx} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_m x^m) \sin \beta x \end{matrix}$$

3. Determine el valor de los coeficientes  $A_i$  al sustituir la solución propuesta  $y_p(x)$  en (3)

4. Construya la solución general  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Ejemplos

$$y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6e^x$$

Tiene como solución de la homogénea

$$y_h = (C_1 + C_2x) e^{-2x}$$

y proponemos como solución particular de la ecuación a

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + De^x$$

sustituimos su expresión en la ecuación y obtenemos

$$\begin{aligned} & A + De^x + \\ & 4(2Ax + B + De^x) + \\ & 4((Ax^2 + Bx + C) + De^x) + \\ & = 4x^2 + 6e^x \end{aligned}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A &= 4 \\ 8A + 4B &= 0 \\ 2A + 4B + 4C &= 0 \\ 9D &= 6 \end{aligned}$$

y de allí el valor de los coeficientes

$$A = 1; \quad B = -2; \quad C = \frac{3}{2}; \quad D = \frac{2}{3}$$

y con ellos la solución general

$$y = (C_1 + C_2x) e^{-2x} + x^2 - 2x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3}e^x$$

Ejercicios

1. La ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x e^{3x} + 3\operatorname{sen}x$$

tiene como solución

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x e^{3x} - \frac{3}{2} e^{3x} + \frac{3}{10} \operatorname{sen}x + \frac{9}{10} \cos x$$

2. La ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3 e^{2x}$$

tiene como solución

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{7}{2} + 3x + x^2 + 3x e^{2x}$$

### 4.3. Métodos de Variación de los Parámetros

Dada la ecuación diferencial

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_n(x) y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x) \quad (5)$$

El método de variación de los parámetros se puede esquematizar de la siguiente manera

1. Resuelva la ecuación diferencial homogénea

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + \cdots + a_n(x) y^{(n)}(x) = 0 \quad (6)$$

y obtenga  $y_h(x)$ .

2. Proponga como solución particular

$$y_p = u_1(x) y_{h1} + u_2(x) y_{h2}$$

donde las funciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$  son funciones a determinar en el método y las  $y_1$  y  $y_2$  son las soluciones a la ecuación homogénea (6).

3. Sustituya esta solución propuesta en la ecuación (5) para obtener, luego de algún nivel de álgebra elemental

$$\begin{aligned} & u_1(x) \overbrace{(a_0(x) y_1 + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1'')}^{=0} + \\ & u_2(x) \overbrace{(a_0(x) y_2 + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2'')}^{=0} + \\ & a_2(x) (u_1' y_1 + u_2' y_2)' + a_1(x) (u_1' y_1 + u_2' y_2) \\ & a_2(x) (u_1' y_1 + u_2' y_2) = \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

de donde surge el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ a_2(x) (u_1' y_1 + u_2' y_2) &= \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

con sus soluciones de la forma

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x) \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{\mathcal{F}(x)}{a_2(x)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x) \end{aligned}$$

e integrando se obtienen los coeficientes respectivos,

$$u_1(x) = \int \mathcal{G}_1(x) dx; \quad u_2(x) = \int \mathcal{G}_2(x) dx$$

para finalmente obtener la solución general

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1(x) y_1 + u_2(x) y_2$$

nótese que no incorporamos las constantes de integración en la funciones  $u_1(x)$  y  $u_2(x)$ .

Ejemplo:

La ecuación inhomogénea de Cauchy<sup>1</sup>-Euler<sup>2</sup>

$$a_0 y(x) + a_1 x y'(x) + \cdots + a_n x^n y^{(n)}(x) = \mathcal{F}(x)$$

con los  $a_i = \text{ctes}$ , puede ser resuelta por este método. Consideremos una ecuación de orden 2

$$c y(x) + b x y'(x) + a x^2 y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

La solución de la homogénea se propone como  $y_h = x^m$  por lo tanto

$$\begin{aligned} c y(x) + b x y'(x) + a x^2 y''(x) &= 0 \\ c x^m + b x m x^{m-1} + a x^2 m(m-1) x^{m-2} &= 0 \\ x^m (c + b m + a m(m-1)) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$a m^2 + (b - a) m + c = 0$$

con

$$m = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}}{2a}$$

por lo tanto

1. Si  $m_1 \neq m_2$  y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

2. Si  $m_1 = m_2$  y ambas reales, entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^{m_1} (C_1 + C_2 \ln x)$$

3. Si  $m_1 = \overline{m_2} = \alpha + i\beta$ , entonces la solución de la homogénea será

$$y_h = x^\alpha (C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x))$$

Ahora para lograr la solución de la inhomogénea suponemos el caso  $m_1 \neq m_2$  por lo tanto

$$\begin{aligned} y_{1h} &= x^{m_1} & y_{2h} &= x^{m_2} \\ u'_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{m_2} \\ \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_1(x) \\ u'_2 &= \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1 x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^{m_1} & x^{m_2} \\ m_1 x^{m_1-1} & m_2 x^{m_2-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x^{m_1} & 0 \\ m_1 x^{m_1-1} & \frac{\mathcal{F}(x)}{a x^2} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \mathcal{G}_2(x) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>**Louis Augustin Baron de Cauchy** (1789-1857). Matemático francés, uno de los creadores del análisis matemático moderno. Estudió, entre otras cuestiones, los criterios de convergencia de series, las funciones de variable compleja y los sistemas de ecuaciones diferenciales

<sup>2</sup>**Leonhard Euler** (1707-1783). Matemático suizo. Destacó en el estudio de diversas cuestiones del cálculo logarítmico y diferencial, así como de las series algebraicas y la trigonometría.

La siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y'' - xy + 5y = \frac{1}{x}$$

tiene como solución de la homogénea

$$y_h = x (C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x))$$

la solución particular por el método de variación de los parámetros queda como

$$y_p = u_1(x) y_{h1} + u_2(x) y_{h2}$$

calculando los coeficientes respectivos en donde el Wronskiano

$$W(x \cos(2 \ln x); x \operatorname{sen}(2 \ln x)) = 2x$$

por lo cual los coeficientes quedan

$$u_1 = \int \mathcal{G}_1(x) dx = \int \frac{x \operatorname{sen}(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \cos(2 \ln x)$$

$$u_2 = \int \mathcal{G}_2(x) dx = \int \frac{x \cos(2 \ln x) \frac{1}{x}}{2x} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \ln x)$$

finalmente la solución particular será

$$y_p = x \left( \frac{1}{4} \cos^2(2 \ln x) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \ln x) \right) = \frac{1}{4} x$$

y la general

$$y = x (C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(2 \ln x)) + \frac{1}{4} x$$

#### 4.4. Métodos de Reducción de Orden

Este método supone, por lo tanto

$$a_0(x) y(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y''(x) = \mathcal{F}(x)$$

tendrá como primer solución no trivial para la ecuación homogénea,  $y_{h1}(x)$ , entonces la segunda solución vendrá dada por

$$y_{h2}(x) = y_{h1}(x) \int u(x) dx$$

donde  $u(x)$  es la función incógnita a determinar. Sustituyendo esta expresión en la ecuación homogénea se obtiene

$$\overbrace{(a_0(x) y_1(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_2(x) y_1''(x))}^{=0} \int u(x) dx + a_2(x) y_1(x) u'(x) + (2a_2(x) y_1'(x) + a_1(x) y_1(x)) u(x) = 0$$

resolviendo la ecuación diferencial para  $u(x)$  tendremos que:

$$u(x) = \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_2} dx}}{y_1^2}$$

La ecuación

$$(x-1)y''' + 2y'' = \frac{x+1}{2x^2}$$

tiene como solución  $y_1 = C_1x + C_2$  y como solución general

$$y = C_1x + C_2 + C_3 \ln|x-1| + \frac{1}{2} x \ln|x|$$

## 5. Algunas Aplicaciones de las Ecuaciones de Orden Superior

### 5.1. Mecánica y Electricidad

Una de las más famosas ecuaciones diferenciales, lineales, ordinaria con coeficientes constantes es

$$\alpha \ddot{u} + \beta \dot{u} + \gamma u \equiv \alpha \frac{d^2u}{dt^2} + \beta \frac{du}{dt} + \gamma u = \Lambda(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x & \Rightarrow \text{Desplazamiento} \\ \frac{dx}{dt} & \Rightarrow \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow \text{Constante de Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow \text{Constante Elástica} \\ F(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Aplicada} \end{cases}$$

y circuitos eléctricos

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Q & \Rightarrow \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{dQ}{dt} = I & \Rightarrow \text{Intensidad de Corriente} \\ L & \Rightarrow \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow \text{Capacitancia} \\ E(t) & \Rightarrow \text{Fuerza Electromotriz} \end{cases}$$

Analicemos la ecuación que describe sistemas mecánicos y dejemos la cual describe sistemas eléctricos para un análisis posterior. El primero de los casos a analizar será el de las oscilaciones libres, vale decir  $F(t) = 0$ , lo cual en el lenguaje de las ecuaciones diferenciales se traduce a ecuaciones diferenciales homogéneas. En contraste, si  $F(t) \neq 0$ , es decir, el caso inhomogéneo, estaremos describiendo oscilaciones forzadas.

### 5.2. Oscilaciones libres

Analicemos pues del caso del oscilador armónico libre, i.e.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \text{con} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$\omega_0$  se denomina la frecuencia natural de oscilación y  $C_1$  y  $C_2$  las constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales. Es claro que

$$\text{si} \quad \begin{cases} C_1 = A \cos \delta \\ C_2 = A \sin \delta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

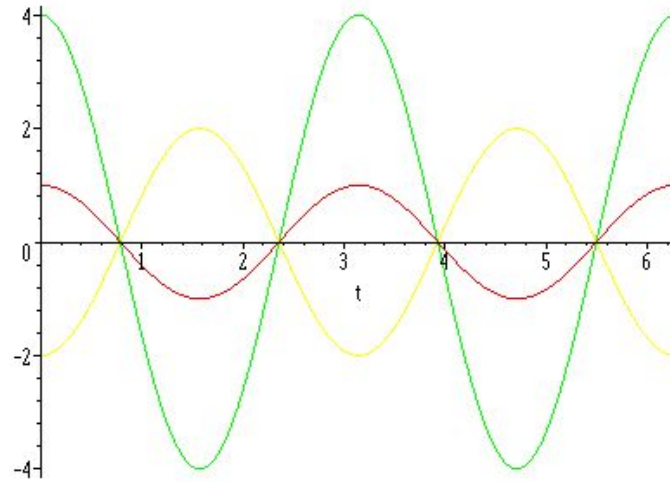


Figura 8: Oscilador armónico libre. Cambios en la posición inicial no afectan la frecuencia natural.

con  $R$  la amplitud y  $\delta$  en ángulo de fase. Obviamente, el período del movimiento será

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Ejemplo** Como un ejemplo analicemos el caso de un sistema en el cual  $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m En este caso la frecuencia angular  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$  rad/sg. La ecuación diferencial que describe este movimiento será

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = 0; & \Rightarrow x(t) = \cos(2t) \\ x(0) = 4; \quad \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = 0 & \Rightarrow x(t) = 4\cos(2t) \\ x(0) = -2; \quad \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = 0 & \Rightarrow x(t) = -2\cos(2t) \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \begin{cases} x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = 1; & \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) \\ x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = 4; & \Rightarrow x(t) = 2\sin(2t) \\ x(0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}\big|_{t=0} = -2 & \Rightarrow x(t) = -\sin(2t) \end{cases}$$

### 5.3. Oscilaciones Libres Amortiguadas

Consideremos que en el movimiento actúa una fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad, por lo cual el movimiento viene descrito por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + kx = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

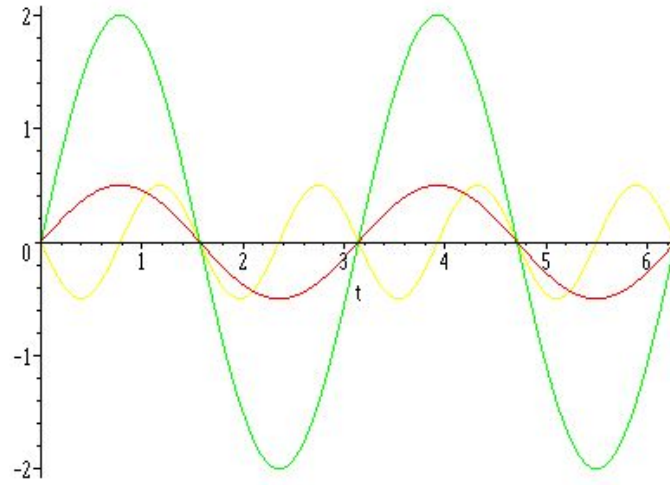


Figura 9: Oscilador Armónico Libre. Cambios de velocidad inicial no afectan la frecuencia natural

la cual constituye una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Las raíces del polinomio característico asociado serán

$$r = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4km}}{2m} = -\frac{\eta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$$

por lo tanto la solución será

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}$$

de donde se deducen los siguientes casos

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \text{Sobreamortiguado}$$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\mu t} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \text{Crítico}$$

$$x(t) = e^{-\mu t} \left\{ C_1 \cos \left[ \left( \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] + C_2 \sin \left[ \left( \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \right) t \right] \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \text{Subamortiguado}$$

**Ejemplo** Como un ejemplo analicemos el mismo caso del sistema anterior en el cual  $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m, sólo que ahora la constante de amortiguamiento será  $\eta = 0,60, 0,40$  y  $0,15$ . En todos los casos la frecuencia angular  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2$  rad/sg. y la cantidad subradical  $(\mu^2 - \omega_0^2)$  corresponderá a los tres casos



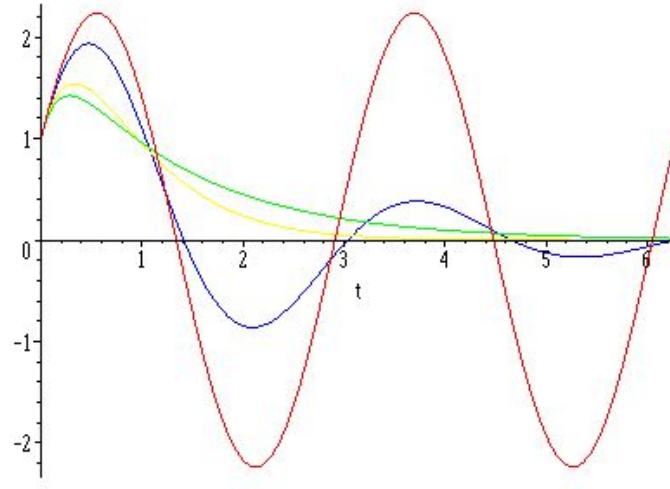


Figura 10: Oscilaciones libres amortiguadas y no amortiguadas. Nótese que el período es mayor para el caso subamortiguado

anteriormente mencionados. Las ecuaciones diferenciales que describen este movimiento serán

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{2\sqrt{5}}\right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2\sqrt{5}}\right) e^{-(3+\sqrt{5})t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = (1 + 6t) e^{-2t}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 4x = 0 \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \frac{9}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \right]$$

Si en los casos anteriores cambiamos el signo de la velocidad inicial, i.e.  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4$  m/s, tendremos la siguiente representación gráfica.

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4; \Rightarrow x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) e^{(\sqrt{5}-3)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) e^{-(3+\sqrt{5})t}$$

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4; \Rightarrow x(t) = (1 + 2t) e^{-2t}$$

$$x(0) = 1; \quad \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -4 \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left[ \frac{-7}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) \right]$$

En todos los casos dado que  $r_1, r_2 < 0$  se tiene que  $x(t \rightarrow 0) \rightarrow 0$ . El movimiento subamortiguado es

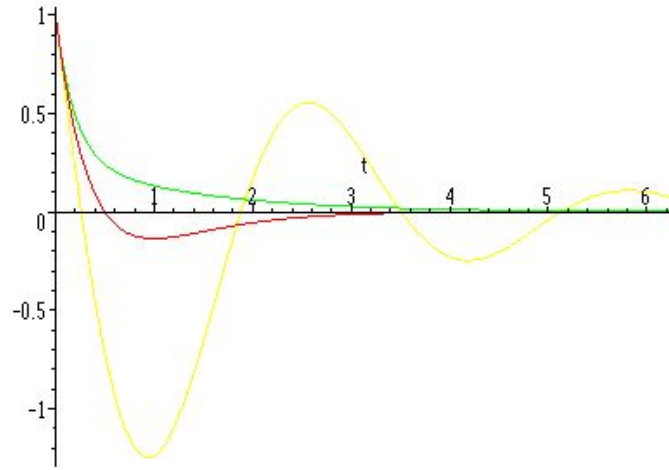


Figura 11: Oscilaciones Libres amortiguadas con cambio de signo en la velocidad inicial

periódico y el período viene descrito por

$$T_{am} = \frac{\frac{2\pi}{\omega_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{si} \quad \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2 < 1 \Rightarrow T_{am} \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\omega_0}\right)^2\right)$$

el cual siempre será mayor que el periodo de oscilación natural del sistema.

## 5.4. Oscilaciones Forzadas

Supongamos ahora que existe una fuerza aplicada al sistema tal que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

### 5.4.1. Oscilaciones Forzadas no amortiguadas

En este caso  $\mu = 0$  y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

### 5.4.2. Amplitud modulada $\varpi \neq \omega_0$

y tendrá como solución

$$x(t) = \underbrace{C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)}_{\text{homogénea}} + \underbrace{\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)}_{\text{inhomogénea}} = A \cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \cos(\varpi t)$$

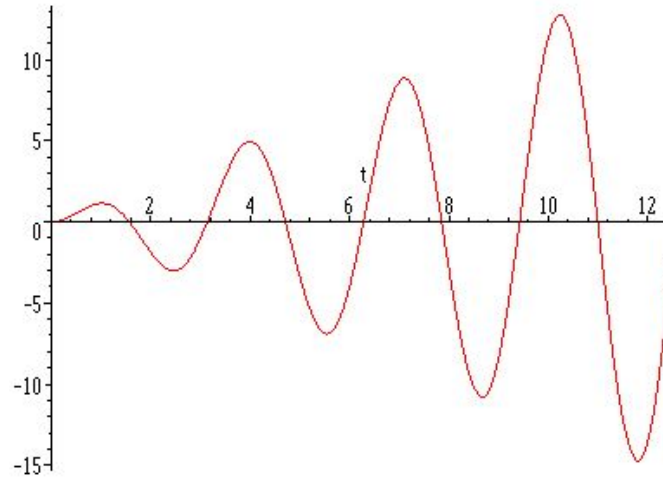


Figura 12: Oscilador armónico forzado con  $\varpi = \omega_0^2$  Nótese el fenómeno de resonancia

con lo cual es la suma de dos movimientos armónicos con distintas frecuencias y amplitudes. Si el cuerpo parte del reposo, esto es:  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  entonces

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{-F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \\ C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} [\cos(\varpi t) - \cos(\omega_0 t)]$$

dato que

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) &= \cos \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) + \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\omega_0 t) &= \cos \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) - \sin \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) - \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \right\} t \right] \\ \cos(\varpi t) &= \cos \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) + \sin \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} \right) \\ x(t) &= \underbrace{\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \varpi^2)} \left[ \sin \left( \frac{\omega_0 - \varpi}{2} t \right) \right]}_{\text{Envolvente}} \left[ \sin \left( \frac{\omega_0 + \varpi}{2} t \right) \right] \end{aligned}$$

**Ejemplo** El mismo sistema anterior en el cual  $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m, cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación  $F = 0,5 \cos(3t)$ . Por lo tanto la ecuación

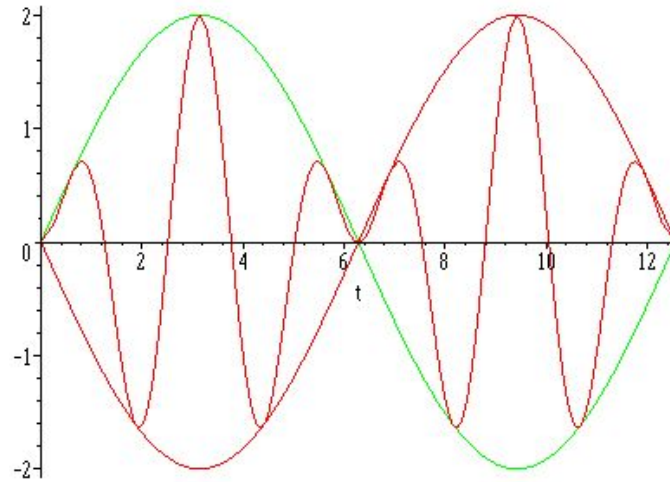


Figura 13: Oscilador armónico forzado. Nótese la envolvente de la función

diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(3t) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \underbrace{\cos(2t)}_{\text{homogénea}} - \underbrace{\cos(3t)}_{\text{inhomogénea}} \equiv \underbrace{2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \sin\left(\frac{5}{2}t\right)}_{\text{envolvente}}$$

#### 5.4.3. Resonancia $\varpi = \omega_0$

En el caso que la frecuencia de la fuerza de excitación coincida con la frecuencia natural del sistema, se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{F_0}{2m\omega_0} t}_{\text{envolvente}} \sin(\omega_0 t)$$

**Ejemplo** El sistema anterior ( $m = 0,1$  Kg. y  $k = 0,4$  N/m), cuando parte del reposo desde el origen de coordenadas y existe una fuerza de excitación  $F = 0,5 \cos(2t)$ . Por lo tanto la ecuación diferencial que describe el movimiento sera

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 5 \cos(2t) \quad \wedge \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{5t}{4} \sin(2t)$$

### 5.5. Oscilaciones Forzadas amortiguadas

En este caso  $\mu \neq 0$  y por lo tanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\varpi t)$$

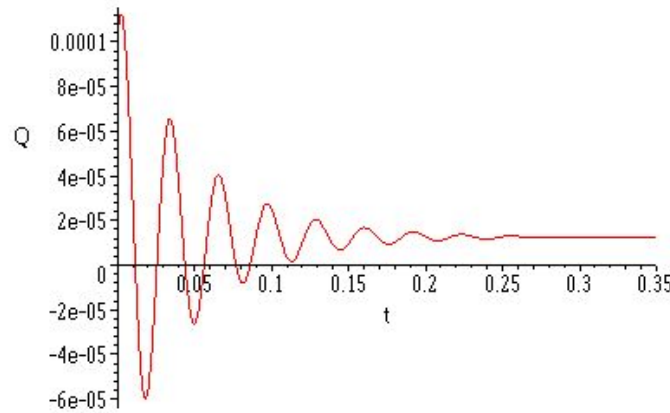


Figura 14: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltage constante. Nótese que el sistema alcanza el régimen estacionario cercano a los 0,3 sg

la cual tendrá como solución

$$x(t) = C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + \frac{F_0}{m} \left( \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2) \cos(\varpi t) + 2\mu\varpi \sin(\varpi t)}{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2} \right)$$

una vez más se puede convertir en

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{m} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Es claro que el término homogéneo en todos sus casos (sobreamortiguado, crítico y subamortiguado) tiende a cero, por ello se considera un término transitorio, no así el término inhomogéneo que permanece oscilando. En términos Físico se puede decir que el término transitorio representa la disipación de la energía inicial que se le provee al sistema a través de la posición y la velocidad inicial de lanzamiento. Esta energía inicial se expresa a través de las condiciones iniciales se disipa. Si no existiera disipación esta energía inicial permanecería por siempre en el sistema. Finalmente el término inhomogéneo, a través de la fuerza de excitación, impone el movimiento al sistema. Nótese además que el término inhomogéneo nunca se hace infinito, ni siquiera para el caso para el cual tiene un máximo y es aquel en el cual la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia natural del sistema.

**Ejemplo** En un circuito RLC, cuyos componentes son  $L = 1$  henry,  $R = 40$  ohmios y  $C = \frac{1}{40000}$  faradios, se le aplica un tensión de  $V = 24$  voltios. Determine el comportamiento de la carga y la intensidad de corriente en el circuito.

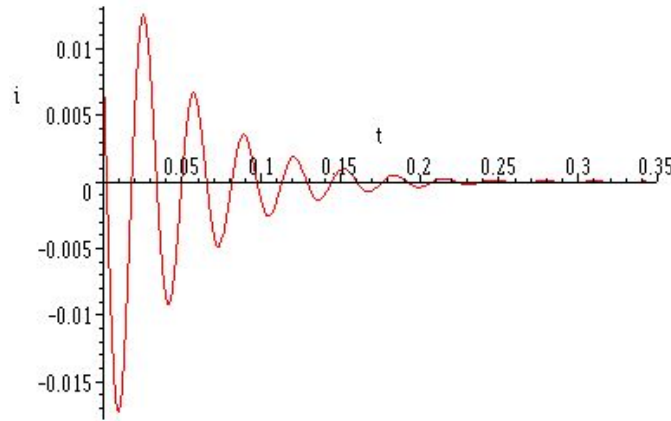


Figura 15: Intensidad en un circuito RLC sometido a un voltage constante.

La ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) &= E(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + 40 \frac{dQ(t)}{dt} + 40000 Q(t) = \frac{1}{2} \\ L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} I(t) &= \frac{dE(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 40 \frac{dI(t)}{dt} + 40000 I(t) = 0 \end{aligned}$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales tendremos como solución

$$\left. \begin{aligned} Q(0) &= 10^{-4} \\ I(0) &= \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 10^{-2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{8000} + e^{-20t} \left[ \frac{47\sqrt{11}}{2640000} \sin(\sqrt{11}60t) + \frac{7}{8000} \cos(\sqrt{11}60t) \right] \\ I(t) &= \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} \left[ \frac{1}{100} \cos(\sqrt{11}60t) - \frac{37\sqrt{11}}{6600} \sin(\sqrt{11}60t) \right] \end{aligned} \right.$$

Si en vez de un tensión constante de 0,5 V. la fuente de tensión es sinusoidal de la forma  $E(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$  voltios las ecuaciones se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 40000 Q &= \frac{1}{2} \cos(180t) \quad \text{con} \quad Q(0) = 10^{-4} \quad \wedge \quad I(0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} = 10^{-2} \\ \frac{d^2 I}{dt^2} + 40 \frac{dI}{dt} + 40000 I &= -90 \sin(180t) \end{aligned}$$

con sus correspondientes soluciones a las condiciones iniciales del sistema

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1}{1000} \left\{ e^{-20t} \left[ \frac{293\sqrt{11}}{30140} \sin(60\sqrt{11}t) + \frac{91}{685} \cos(60\sqrt{11}t) \right] - \frac{9}{274} \cos(180t) + \frac{19}{548} \sin(180t) \right\} \\ I(t) &= \frac{1}{100} \left\{ e^{-20t} \left[ \frac{103}{274} \cos(60\sqrt{11}t) - \frac{2461\sqrt{11}}{3014} \sin(60\sqrt{11}t) \right] + \frac{81}{137} \sin(180t) + \frac{171}{274} \cos(180t) \right\} \end{aligned}$$

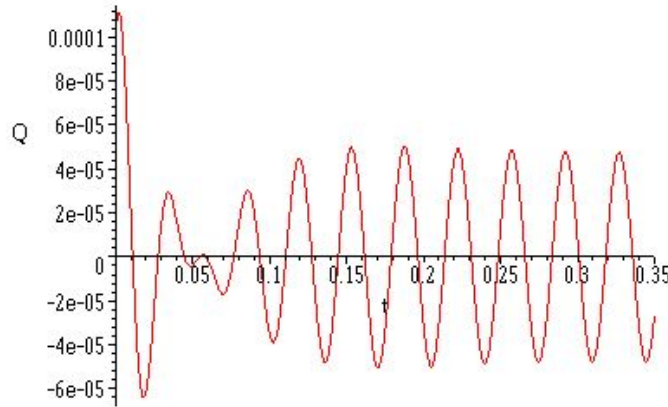


Figura 16: Carga en función del tiempo en un circuito RLC sometido a un voltage sinusoidal  $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$ . Nótese el régimen transitorio ( $0 \leq t \lesssim 0,17$ ) y estacionario ( $t \gtrsim 0,17$ ).

Por analogía con el caso mecánico procedemos a identificar cantidades

$$\left. \begin{aligned} 2\mu &= \frac{R}{L} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{V_0}{L\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\omega^4 - 78400\omega^2 + 16000000000}}$$

con ello se puede ver la funcionalidad de la amplitud con la frecuencia excitatriz

## 5.6. Movimiento alrededor de un punto de equilibrio

La fuerza elástica  $F = -k x$  más allá de ser el caso más simple, representa la primera aproximación al movimiento alrededor de un punto de equilibrio estable. Si recordamos que para una fuerza que derive de un potencial

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow F = -k x = -\frac{d\left(\frac{1}{2}k x^2\right)}{dx}$$

mas aun, un punto de equilibrio estable se define aquel en el cual no existen fuerzas externas, vale decir

$$F|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow -\frac{dV}{dx}\bigg|_{x=x_0} = 0$$

por lo cual, dado un potencial de una fuerza arbitraria siempre podemos expandirlo en series de Taylor alrededor de un punto de equilibrio  $x = x_0$

$$V(x) = v(x_0) + \underbrace{(x - x_0) \frac{dV}{dx}\bigg|_{x=x_0}}_{=0} + \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \frac{d^2V}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} + \frac{1}{3!} (x - x_0)^3 \frac{d^3V}{dx^3}\bigg|_{x=x_0} \dots$$

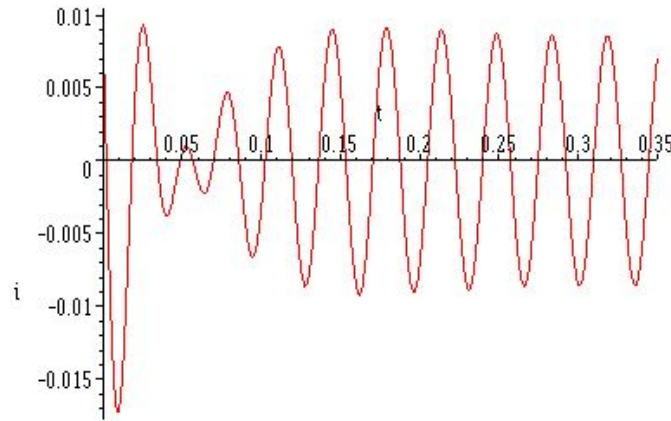


Figura 17: Intensidad de corriente en un circuito RLC sometido a un voltaje sinusoidal  $V(t) = \frac{1}{2} \cos(180t)$

Así, en general, alrededor de un punto de equilibrio  $x = x_0$  la primera aproximación de una función potencial sera  $V(x) \approx \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2 V}{dx^2} \right|_{x=x_0} \approx \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$ . Así, un potencial de la forma

$$V(x) = \frac{1}{6}x^6 - 2x^5 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + 12x^2$$

Solución:  $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x$  Solución: que genera una fuerza

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = -(x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x)$$

tendrá dos puntos de equilibrio  $x = 0$  y  $x = 4$ . En torno a  $x = 0$  se podrá aproximar con un potencial parabólico

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2!} (x - x_0)^2 \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 12x^2$$

tal y como se observa gráficamente

## 5.7. Péndulo Simple con desplazamiento finito.

El caso típico de esta aproximación lo constituye el péndulo simple: una masa  $m$ , empotrada a una varilla, de masa despreciable y de longitud  $L$ . La varilla se desplaza un ángulo  $\theta$  de la vertical y se suelta. La Figura (20) muestra el diagrama de cuerpo libre del Péndulo Físico. Desde la ancestral física general, aún en secundaria, era proverbial resolver este problema suponiendo ángulos pequeños. En esas tempranas épocas de nuestro conocimiento de Física era limitado y más limitado aún era nuestra capacidad para resolver ecuaciones diferenciales. A este “problema” se le conoce con el péndulo físico. Como siempre, aproximar es un arte y exploremos este arte. Como norma general tendremos que se debe aproximar al final. Pero no siempre. Si suponemos un cuerpo de masa constante,  $m$ , las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento no



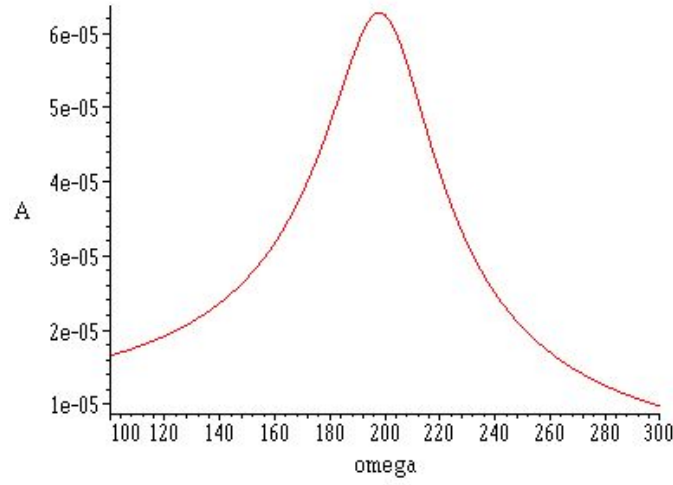


Figura 18: Amplitud como función de la frecuencia excitatriz. Nótese el máximo de la amplitud cuando el sistema entra en resonancia, i.e.  $\varpi = \omega_0$

pueden ser otras que aquellas que provengan de las ecuaciones de Newton

$$\sum_{\text{externas}} \overrightarrow{F(r(t), v(t), t)} = \frac{d \overrightarrow{mv(t)}}{dt} = m \overrightarrow{a(t)} = m (a_r \hat{\mathbf{u}}_r + a_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta), \quad (7)$$

Es bueno recordar que hay que expresar la aceleración en un sistema de coordenadas móviles  $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta)$ . Esto es

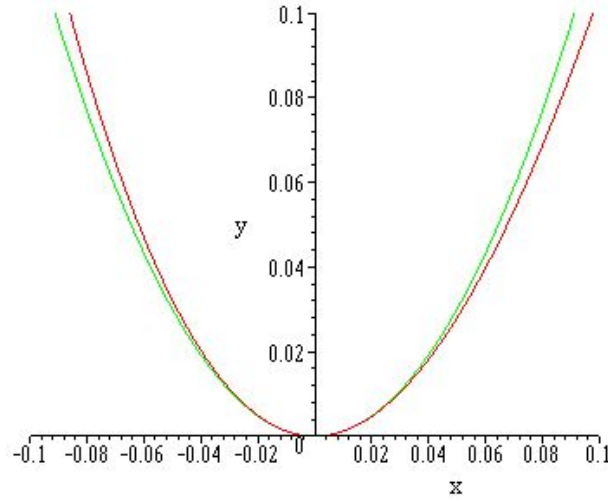
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_r &= \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = (-\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta = \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta &= -\sin(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}} \implies \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = -(\cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \hat{\mathbf{j}}) \frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r = -\dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_r \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= r(t) \hat{\mathbf{u}}_r \implies \vec{v}(t) = \frac{d(r(t) \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = \dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &\quad \text{y} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d(\dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = \left( \ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2(t) \right) \hat{\mathbf{u}}_r + \left( 2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

es claro que si  $r(t) = L = \text{cte} \implies \dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = \vec{v}(t) = \vec{a}(t) = 0$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= L \hat{\mathbf{u}}_r \implies \vec{v}(t) = \frac{d(L \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &\quad \text{y} \\ \vec{a}(t) &= \frac{d(L \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta)}{dt} = \left( -L (\dot{\theta}(t))^2 \right) \hat{\mathbf{u}}_r + \left( L \ddot{\theta}(t) \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$


 Figura 19: Aproximación por una parábola en torno a  $x = 0$ 

Así, y para este caso particular, las ecuaciones de Newton quedan como

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} m a_r \equiv -mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \cos(\theta) \\ m a_\theta = mL\ddot{\theta}(t) = -mg \sin(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

El caso que todos nos aprendimos de memoria, proviene de la suposición  $\theta \approx \sin(\theta) \ll 1$  que implica:

$$m \vec{a} = \vec{T} + m \vec{g} \implies \begin{cases} mL\dot{\theta}^2(t) = -T + mg \\ mL\ddot{\theta}(t) = -mg\theta \end{cases} \quad (9)$$

con lo cual, ahora, en este curso, sabemos que lo podemos integrar inmediatamente. Si suponemos que parte del reposo:  $\dot{\theta}(0) = 0$  y  $\theta(0) = \theta_0$

$$L\ddot{\theta}(t) = -g\theta(t) \implies \theta(t) = C1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + C2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \implies \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right)$$

y el período puede ser integrado

$$\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\theta(t)\dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \dot{\theta}(t)^2 + 2\frac{g}{L}\theta(t)^2 \implies \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \quad (10)$$

que no es otra cosa que la energía total del sistema. Por lo tanto sabemos que en el instante inicial, si soltamos la masa desde un ángulo  $\theta_0$ , la energía total es puramente potencial. Es decir

$$E_{total} = E_{potencial} = mgL(1 - \cos(\theta_0)) = 2mgL \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right) \quad (11)$$

por otro lado, de la ecuación (10) podemos obtener el período de oscilación para el Péndulo Físico linealizado:

$$\omega = \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)} \implies T = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{L}}} \arctan\left(\frac{\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}\right)$$

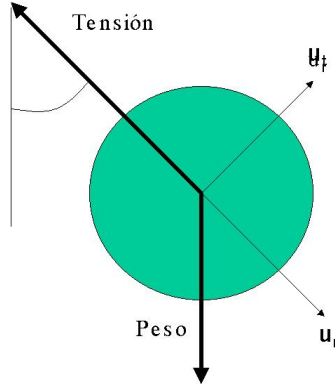


Figura 20: Diagrama de Cuerpo Libre, del Péndulo Físico

Este caso también se conoce con el nombre de oscilador armónico simple o péndulo físico linealizado. Igualmente podemos analizar el caso de general del péndulo amortiguado forzado linealizado. Vale decir, una masa,  $m$ , atada a una varilla sin masa de longitud  $L$ , y que oscila, inmersa en un fluido que la frena el movimiento de la masa con una fuerza,  $-\eta \vec{v}(t)$  y que adicionalmente está excitada por una fuerza exterior  $F(t) = F_0 \cos(\varpi t)$ . Recordamos que en este caso la ecuación en la dirección tangente ( $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ ), es

$$mL \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \eta \frac{d\theta(t)}{dt} + mg \theta(t) = F_0 \cos(\varpi t) \implies \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2 \theta(t) = \frac{F_0}{mL} \cos(\varpi t)$$

donde, por costumbre, hemos rebautizado las constantes tales que  $\mu = \frac{\eta}{2mL}$  y  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

Por lo tanto, su solución tendrá la forma

$$\theta(t) = \underbrace{C_1 e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2})t}}_{\text{solución homogénea} \equiv \text{régimen transitorio}} + \underbrace{\frac{F_0}{mL} \frac{\cos(\varpi t - \zeta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}}_{\text{solución inhomogénea} \equiv \text{régimen estacionario}}$$

donde

$$\cos(\zeta) = \frac{(\omega_0^2 - \varpi^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}} \quad \text{y} \quad \sin(\zeta) = \frac{2\mu\varpi}{\sqrt{(\omega_0^2 - \varpi^2)^2 + (2\mu\varpi)^2}}$$

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ( $F_0 = 0$ ) se derivan tres casos posibles:

- Subamortiguado:  $\mu^2 - \omega_0^2 < 0$
- Sobreamortiguado:  $\mu^2 - \omega_0^2 > 0$

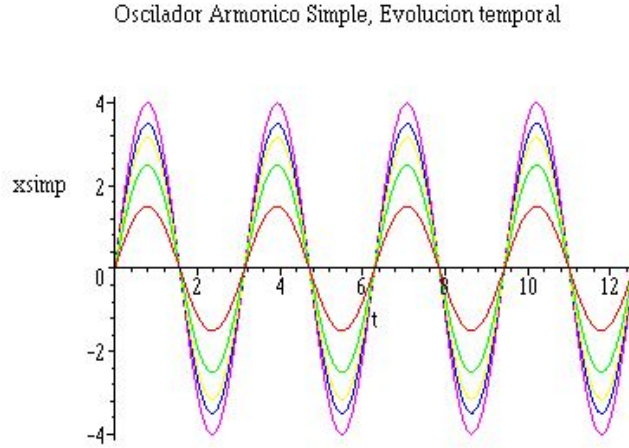


Figura 21: Evolución  $\theta(t)$  vs  $t$  del Péndulo Físico libre, para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ .

■ Crítico  $\mu^2 - \omega_0^2 = 0$

En el caso del Péndulo Físico amortiguado forzado ( $F_0 \neq 0$ ) la física se hace mucho más rica y pueden ocurrir fenómenos de resonancia cuando  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\mu\omega)^2 \rightarrow 0$ .

Es interesante considerar los gráficos tanto de la evolución del sistema en el espacio directo:  $\theta(t)$  vs  $t$ ; como la evolución del sistema en el espacio de fases  $\omega = \dot{\theta}(t)$  vs  $\theta(t)$ . Las figuras (23) y (25) muestran la primera de estas evoluciones, es decir, la evolución del ángulo en el espacio directo. Las figuras (24) y (26) muestran la evolución del sistema en el espacio de fases. Es claro de la ecuación (10), en la cual aparece  $\omega = \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$ , que las curvas en el diagrama de fase tanto para el caso libre (figura (22)) como para los de los casos amortiguados (figuras (24) y (26)) corresponden a curvas de misma energía. En el caso del Péndulo Físico linealizado libre, corresponden a curvas de energía constante. en los otros casos el sistema va disipando energía debido al coeficiente de amortiguación.

Nótese que la disipación obliga al sistema a evolucionar al punto de equilibrio siguiendo trayectorias espirales en el espacio de fases. Claramente más rápidamente en el caso sobreamortiguado que en el subamortiguado. También sabemos que para el caso crítico ( $\mu^2 - \omega_0^2 = 0$ ) el tiempo de evolución del sistema hasta llegar al punto de equilibrio será menor que en cualquiera de los casos sobreamortiguados. Dejamos al lector la comprobación de esta última afirmación.

Hemos aprendido que dependiendo del valor de los coeficientes de la ecuación característica del Péndulo Físico amortiguado libre ( $F_0 = 0$ ) se derivan tres casos posibles:

Ahora bien, la situación que nos interesa simular es la del péndulo físico para los casos en los cuales los ángulos de oscilación no necesariamente sean pequeños.

Denominaremos péndulo libre al caso en el cual no recurriremos a ninguna aproximación respecto al ángulo de oscilación. Recordemos que para este caso partimos de la ecuación (8) en la dirección tangente. Es decir

$$L\ddot{\theta}(t) = -g \sin(\theta) \implies \dot{\theta}(t) \ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L} \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \implies E_{total} \propto cte = \left( \frac{\dot{\theta}(t)^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta(t) \right)$$

Oscilador Armonico Simple, Diagrama de Fase

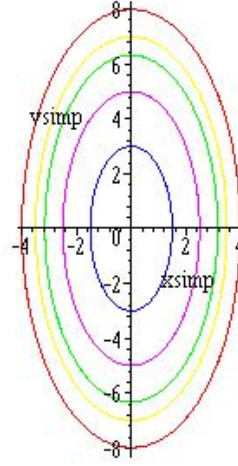


Figura 22: Digrama de Fase para el Oscilador Armónico Simple. Nótese que el punto de equilibrio es el origen de coordenadas.

Al igual que en la ecuación en la dirección tangente linealizada (10), nos encontramos con la Energía total del sistema. Con lo cual Es fácil despejar  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(\theta(t))$  y construir los diagramas de fases del sistema. Otra vez, las líneas del diagrama de fase serán líneas de la misma energía. Así podemos graficar

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{C + \frac{2g}{L} \cos(\theta(t))} \quad (12)$$

para distintos valores de la constante  $C = 4, 01; 4, 1; 6; 8; 10; 20$  y para el caso  $\frac{g}{L} = 4$ . La Figura (27) representa el diagrama de fase para estos casos. Las curvas cerradas (aquellas que tienen los valores de ángulos y velocidades acotadas) representan oscilaciones del sistema, mientras que las curvas abiertas (aquellas en las cuales las velocidades están acotadas pero no así el valor del ángulo) representan que el sistema rota. Nótese que el sistema presenta puntos de equilibrio inestable para  $\theta(t) \approx \pm n\pi$  con  $n = 0, 1, 2$ . Lo cual era de esperarse por cuanto corresponde al ángulo en el cual el sistema *varilla-masa* se encuentran verticalmente dispuestos y el peso y la tensión son colineales y se anulan momentáneamente.

Otro enfoque, quizá más intuitivo para resolver este problema, pudo haber sido el análisis energético. Para ello sabemos que, por ser un sistema conservativo, la energía total viene definida por

$$E_{total} = \underbrace{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2}_{\text{Energía Cinética}} + \underbrace{mgL(1 - \cos(\theta(t)))}_{\text{Energía Potencial}} \equiv \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}(t)^2 + 2mgL \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)$$

por consiguiente

$$\dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{\frac{2E_{total}}{mL^2} - \frac{4g}{L} \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right)} \equiv \pm 2\sqrt{\frac{g}{L} \left[ \sin^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) \right]} \quad (13)$$

donde hemos sustituido  $E_{total} = 2mL \sin^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)$  con  $\theta_{\text{máx}}$  el ángulo máximo que alcanza el Péndulo Físico, por cuanto en ese punto la energía total es puramente potencial. Nótese que ese ángulo no necesariamente es el ángulo inicial, debido a que la velocidad inicial puede ser distinta de cero.

## Oscilador Armonico Amortiguado, Evolucion temporal

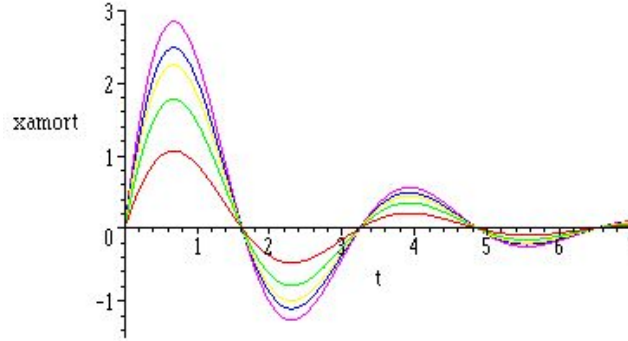


Figura 23: Evolución  $\theta(t)$  vs  $t$  del Péndulo Simple, Subamortiguado ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$ ) libre, para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ .

La ecuación (13) es claramente integrable por separación de variables y conduce a encontrar la expresión para el período:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{L} [\sin^2(\frac{\theta_{\max}}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})]}} \quad \text{con } -\pi \leq \theta(t) \leq \pi \quad \text{y } \theta_0 = \theta(0)$$

La integral anterior, puede ser transformada en otra que aparece en las tablas integrales, si hacemos  $\sin \beta = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta_{\max}}{2})}$ , con lo cual

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\theta_{\max}}{2}) \sin^2 \beta}} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \sin \beta = \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta_{\max}}{2})} \\ \zeta(t) = \arcsin \left[ \frac{\sin(\frac{\theta(t)}{2})}{\sin(\frac{\theta_{\max}}{2})} \right] \end{cases} \quad (14)$$

Es claro que el recorrido entre  $\zeta(0) = 0 \Rightarrow \theta = 0$  a  $\theta = \theta_{\max} \Rightarrow \zeta(t) = \frac{\pi}{2}$  representa un cuarto del período, por consiguiente el período total del Péndulo Físico será:

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\theta_{\max}}{2}) \sin^2 \beta}}$$

Oscilador Armonico Subamortiguado, Diagrama de Fase

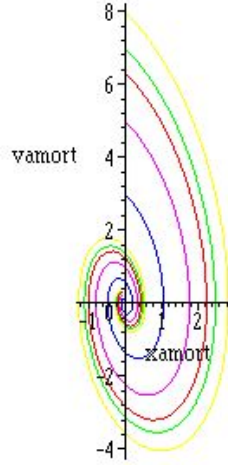


Figura 24: Evolución  $\dot{\theta}(t)$  vs  $\theta(t)$  del Péndulo Físico Subamortiguado libre ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 0,5$ ) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ . Nótese que la disipación lleva irremediabilmente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

### 5.8. Disgresión Elíptica

En este punto haremos una disgresión respecto a las integrales elípticas, su clasificación y algunas de sus propiedades. En general encontrarán en la bibliografía que las integrales elípticas se dividen en

■ *Integrales Elípticas de Primera Especie*

$$F(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}} \iff F(x|m) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

las cuales, para el caso particular  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  o  $x = 1$ , se puede reacomodar como una *Integral Elíptica de Primera Especie Completa*

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} \equiv \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}} \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1 \quad (15)$$

■ *Integrales Elípticas de Segunda Especie*

$$E(\varphi|\alpha) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} d\beta \iff E(x|m) = \int_0^x \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

y si  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  o  $x = 1$ , entonces se obtiene una *Integral Elíptica de Segunda Especie Completa*

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta} d\beta \equiv \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-mt^2)}{(1-t^2)}} dt \quad \text{con } 0 \leq m \leq 1$$

## Oscilador Armonico Sobrearmortiguado, Evolucion temporal

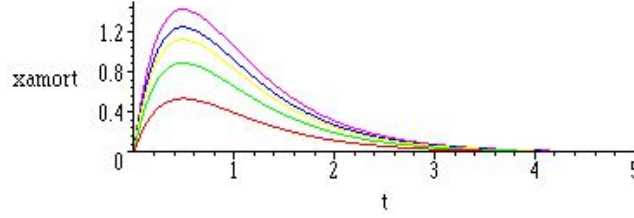


Figura 25: Evolución  $\theta(t)$  vs  $t$  del Péndulo Físico Sobrearmortiguado ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$ ) libre, para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ .

Adicionalmente, y también sin perder generalidad, dado que  $0 \leq m \leq 1$ , el denominador de la integral elíptica  $K(m)$  de la ecuación (15) y equivalentemente de la ecuación (14) puede ser expandido en series de potencias. Con lo cual

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \beta m + \left( \frac{3}{8} \sin^4 \beta \right) m^2 + \left( \frac{5}{16} \sin^6 \beta \right) m^3 + \left( \frac{35}{128} \sin^8 \beta \right) m^4 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} &= \frac{1}{2} \pi \left[ 1 + \left[ \left( \frac{1}{2} \right) \sin^2 \beta \right] m + \left[ \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \sin^4 \beta \right] m^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right) \sin^6 \beta \right] m^3 + O(m^4) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \sin^{2n} \beta$$

y siendo una serie uniformemente convergente puede ser integrada término a término como

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \beta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \sin^{2n} \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \beta d\beta$$

$$K(m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} m^n \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n$$



Oscilador Armonico Sobrearmortiguado, Diagrama de Fase

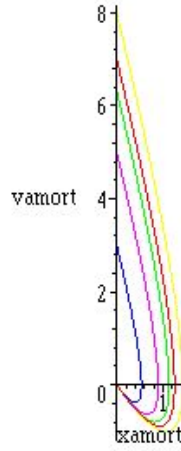


Figura 26: Físico Sobrearmortiguado libre ( $\frac{g}{L} = 4; \mu = 3, 5$ ) en el Espacio de Fases para distintos valores de la velocidad inicial  $V_0 = 3, 5, \sqrt{40}, 7, 8$ . Nótese que la disipación lleva irremediamente al sistema al punto de equilibrio, vale decir al origen de coordenadas del espacio de fases.

Del mismo modo se obtiene para las integrales elípticas completas de segunda especie que

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \sin^2 \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right]$$

Finalmente podemos mencionar la relación de “recurrencia” de Legendre para las Integrales Elípticas completas. Ella es

$$E(m) K(1-m) + E(1-m) K(m) - K(m) K(1-m) = \frac{\pi}{2}$$

Las integrales elípticas de primera y segunda especie, incompletas y completa deben resolverse numéricamente y tradicionalmente están tabuladas en algunas tablas integrales <sup>3</sup>. En nuestros días también pueden ser resueltas numéricamente utilizando comandos de manipuladores simbólicos<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Abramowitz, M. y Stegun I.A (1964) *Handbook of Mathematical Functions* Dover, New York

<sup>4</sup>En el caso de MAPLEV se puede proceder directamente evaluando numéricamente la integral (14) a través del comando `evalf(int(...))` o mediante la función de biblioteca `EllipticF(z,k)` donde  $z = \beta$  es al argumento del seno y  $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$  el parámetro (consulte la ayuda de MAPLE para más detalles).

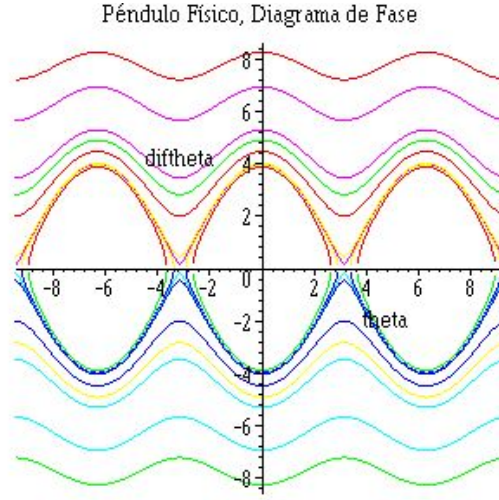


Figura 27: Diagrama de Fase para el Péndulo Físico.

### 5.9. ¿Cuán buena es la aproximación lineal ?

Utilizando la expansión en serie de la Integral Elíptica completa de primera especie (14) del péndulo físico, tendremos que se cumple

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \sin^2 \beta}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}} F\left(\frac{\pi}{2} \mid \sin^2\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left( \sin\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) \right)^{2n}$$

más aún, dado que  $\sin\left(\frac{\theta_{\text{máx}}}{2}\right) = \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O(\theta_{\text{máx}}^7)$  y que  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  tendremos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \left( \frac{1}{2}\theta_{\text{máx}} - \frac{1}{48}\theta_{\text{máx}}^3 + \frac{1}{3840}\theta_{\text{máx}}^5 + O(\theta_{\text{máx}}^7) \right)^{2n} \Rightarrow$$

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{1}{16}\theta_{\text{máx}}^2 + \frac{11}{3072}\theta_{\text{máx}}^4 \right)$$

y si realizamos un estimado de las correcciones al problema lineal que conlleva esta expansión veremos que aún para ángulos  $\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$  las correcciones son del orden de un pírro 4 %, con lo cual la aproximación lineal resulta bien razonable. Para ángulos  $\theta_{\text{máx}} \gtrsim 1$  las correcciones comienzan a ser significativas y todo este esfuerzo de integración empieza a tener sentido. La siguiente tabla da una idea más clara de este cambio en el período del péndulo y los errores relativos porcentuales respecto al período del péndulo físico linealizado  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , cuando se considerarán distintos valores del ángulo máximo,  $\theta_{\text{máx}}$

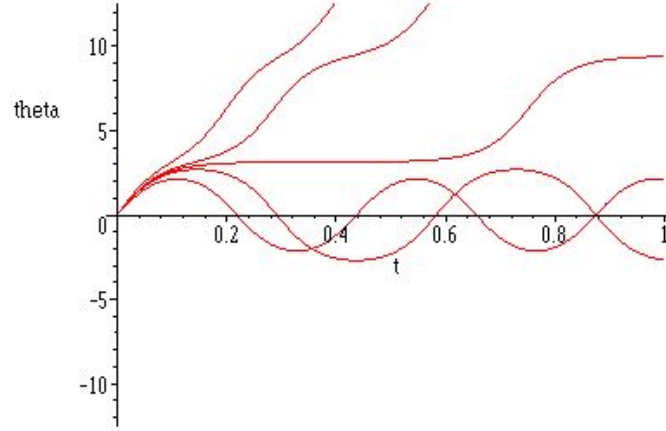


Figura 28: Integración numérica  $(\theta(\tilde{t}) \text{ vs } \tilde{t}, \text{ con } 0 \leq \tilde{t} \leq 10)$  del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial:  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$ .

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,83845$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{12}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{6}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{4}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{3}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}$	$\theta_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{3}$
$T$	2,85066	2,88786	2,95191	3,04617	3,35034	3,89685
$\epsilon = 100 \frac{ T - T_0 }{T}$	0,42821	1,71109	3,84368	6,81916	15,2786	37,1283

### 5.10. El Péndulo Físico: Integración Numérica

Tal y como indicamos en la primera sección de este proyecto, procedemos a convertir una ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Así, del mismo modo que en la ecuación (??) podremos escribir:

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega_0 \sin(\theta) \implies \begin{cases} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

con lo cual podemos adimensionalizar de dos varias formas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Si adicionalmente hemos adimensionalizado con  $\tilde{t} = \frac{t}{t_{\text{final}}}$  por lo que  $0 \leq \tilde{t} \leq 1$  y  $\frac{1}{t_{\text{final}}} \frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d(\cdot)}{d\tilde{t}}$  y, adicionalmente:  $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_0}$ , con  $\varphi_0 = \left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} \neq 0$ . De este modo el sistema queda escrito

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t) &\implies \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \varphi_0 t_{\text{final}} \tilde{\varphi}(\tilde{t}) &\implies \frac{d\theta(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \Lambda \tilde{\varphi}(\tilde{t}) \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0 \sin(\theta(t)) &\implies \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\frac{\omega_0^2 t_{\text{final}}}{\varphi_0} \sin(\theta(\tilde{t})) &\implies \frac{d\tilde{\varphi}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = -\Gamma \sin(\theta(\tilde{t})) \end{aligned}$$

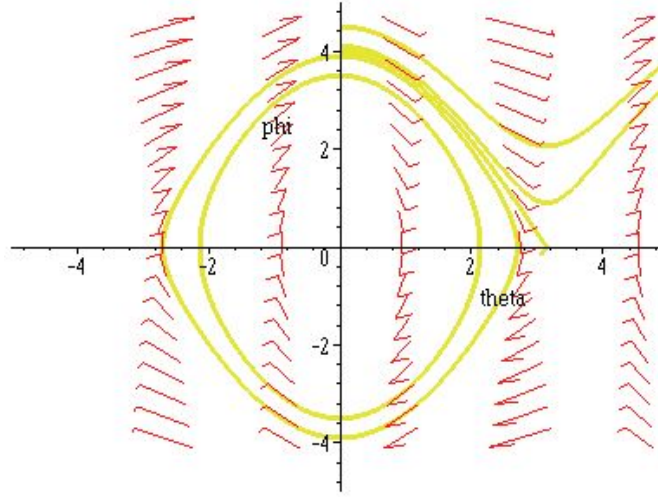


Figura 29: Digrama de Fase para el Péndulo Físico

Nótese que las cantidades  $\tilde{\varphi}(\tilde{t})$ ,  $\theta(\tilde{t})$ ,  $\tilde{t}$ ,  $\Gamma$  y  $\Lambda$  son adimensionales. Acto seguido procedemos a integrar numéricamente el sistema de ecuaciones<sup>5</sup>.

La figura (28) ilustra la evolución del ángulo  $\theta(t)$  vs  $t$ , con  $0 \leq t \leq 10$  del Péndulo Físico, para distintos valores de la velocidad angular inicial:  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \dot{\theta}(t) = \varphi(t) = 3,5, 3,9, 4, 4,1, 4,5$ . Mientras que la figura (29) (y también la figura (27)) representan la evolución del sistema en el espacio de fases.  $\theta(t)$  vs  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \varphi(t)$ . Las curvas cerradas en esta gráfica corresponden a las curvas oscilantes de la figura (28). Dado que el sistema parte de  $\theta_0 = \theta(t=0)$  y seleccionamos el nivel de energía potencial igual a cero allí, cada una de estas curvas representan un valor de la energía cinética inicial. El caso  $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$  corresponde a la separatriz, vale decir, la órbita que separa las curvas cerradas de las abiertas. Es claro que en este caso el móvil “subirá” y alcanzará un equilibrio inestable en la posición vertical. En la figura (28) este caso viene ilustrado por la curva que se convierte en horizontal  $0,25 \leq \tilde{t} \leq 0,5$ , luego a partir de  $\tilde{t} \approx 0,5$ , la inexactitud del cálculo numérico genera perturbaciones que en teoría no deberían existir.

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_0^2 = mg2L$$

## 6. Transformaciones Integrales

### 6.1. Cálculo Operacional

Toda ecuación diferencial puede ser descrita de la siguiente forma

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \implies DF(x) = f(x) \quad (16)$$

<sup>5</sup>En MAPLEV podemos integrar el sistema de dos maneras distintas. La primera haciendo uso del comando `dsolve({sysED,CI}, numeric, vars, options)` donde `sysED` es el sistema de ecuaciones diferenciales, `CI` sus condiciones iniciales. Si necesitáramos un análisis gráfico es mucho más útil el paquete `DEtools`.

donde  $D(\bullet)$  es un operador diferencial lineal

$$D(Ax^n + Bx^m) = AD(x^n) + BD(x^m) = nAx^{n-1} + mBx^{m-1} \quad (17)$$

y en muchos aspectos ese operador diferencial  $D(\bullet)$  puede ser tratado como un número más. A saber, para una ecuación diferencial genérica con coeficientes constantes se tiene

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 \implies (D^2 - 3D + 2)y = x^2 \implies (D-1)(D-2)y = x^2 \quad (18)$$

más aún

$$y = \frac{x^2}{(D-1)(D-2)} \implies y = \frac{x^2}{(D-2)} - \frac{x^2}{(D-1)} \quad (19)$$

por lo cual expandiendo

$$\frac{1}{D-1} = \frac{-1}{1-D} = -1 - D - D^2 - D^3 - D^4 - \dots \quad (20)$$

$$\frac{1}{D-2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{D}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{D}{4} - \frac{D^2}{8} - \frac{D^3}{16} - \dots \quad (21)$$

de donde

$$y = \left( -\frac{1}{2} - \frac{D}{4} - \frac{D^2}{8} - \frac{D^3}{16} - \dots \right) x^2 - (-1 - D - D^2 - D^3 - D^4 - \dots) x^2 \quad (22)$$

por lo tanto tendremos la solución particular de la ecuación  $y'' - 3y' + 2y = x^2$

$$y = \left( -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) - (-x^2 - 2x - 2) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad (23)$$

Las operaciones que se usaron arriba están relacionadas muy estrechamente con las propiedades de la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (24)$$

## 6.2. Definiciones para Comenzar

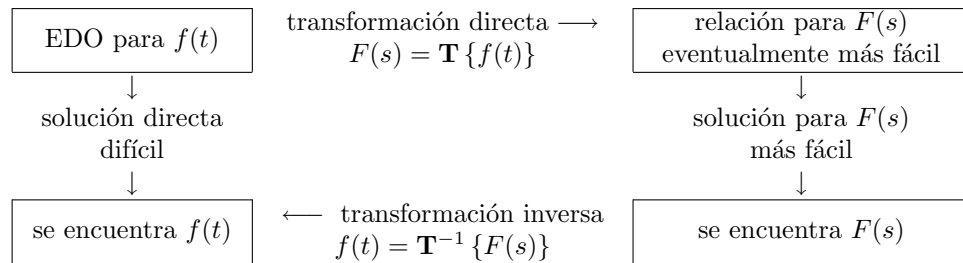
En general vamos a definir una transformación integral,  $F(s)$ , de una función,  $f(t)$  como

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t) dt = \mathbf{T}\{f(t)\} \quad (25)$$

donde  $\mathcal{K}(s, t)$  es una función conocida de  $s$  y  $t$ , denominada el *núcleo* de la transformación. Si  $a$  y  $b$  son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita. Dependiendo de la selección del núcleo y los límites tendremos distintas transformaciones integrales. En Física las más comunes son:

<b>Nombre</b>	$F(s) = \mathbf{T} \{f(t)\}$	$f(t) = \mathbf{T}^{-1} \{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^\infty \frac{\text{sen}(st)}{\cos(st)} f(t) dt$	$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(ts)}{\cos(ts)} F(s) ds$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{i st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i st} F(s) ds$
Hankel	$F(s) = \int_0^\infty t J_n(st) f(t) dt$	$f(t) = \int_0^\infty s J_n(ts) F(s) ds$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s) ds$

La idea detrás de la utilidad de las transformaciones integrales puede resumirse en el siguiente esquema



### 6.3. Transformada de Laplace

En nuestro caso ilustraremos el uso de transformaciones integrales con la transformada de Laplace, que denotaremos de manera simbólica como  $F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$ . La siguiente tabla resume las transformaciones de algunas funciones.

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
1	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$e^{a t}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s - a}, \quad s > a$
$\sin(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$t^n \quad n > 0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$t^p \quad p > -1$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \ a\ $
$\cosh at$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \ a\ $
$e^{a t} \begin{Bmatrix} \sin(bt) \\ \cos(bt) \end{Bmatrix}$	$\longleftrightarrow$	$\begin{Bmatrix} \frac{a}{(s-a)^2 + b^2} \\ \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \end{Bmatrix} \quad s > \ a\ $
$t^n e^{a t} \quad n \in \mathbb{N}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$

$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$		$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\}$
$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$	$c > 0 \longleftrightarrow$	$\frac{e^{-c} t}{s} \quad s > 0$
$u_c(t) f(t-c)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-c} F(s)$
$e^{c} f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s-c)$
$f(ct)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$
$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$\longleftrightarrow$	$F(s) G(s)$
$\delta(t-c)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-c} s$
$f^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$(-t)^n f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F^{(n)}(s)$

#### 6.4. Ejemplos Sencillos

Como un ejemplo de lo anterior, encontraremos la solución a las siguientes ecuaciones diferenciales

1. Ecuación diferencial inhomogénea, continua, con valores iniciales

$$y'' + y = \sin 2t \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (26)$$

$$\mathbf{L}\{y'' + y\} = \mathbf{L}\{\sin 2t\} \quad \Rightarrow \quad s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} \quad (27)$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{\frac{5}{3}}{s^2 + 1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 4} \quad (28)$$

mediante la transformada inversa en cada término

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{3}}{s^2 + 1}\right\} &= \frac{5}{3} \sin t \\ \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{2}{3}}{s^2 + 4}\right\} &= \frac{1}{3} \sin 2t \end{aligned} \right\} \Rightarrow y(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \quad (29)$$

2. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función escalón:

$$y'' + 4y = h(t) = \begin{cases} 1 & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 0 & 0 \leq t \leq \pi \quad t \geq 2\pi \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$$y'' + y = h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}\{y'' + 4y\} = \mathbf{L}\{u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)\} \quad (31)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 4) Y(s) - sy(0) - y'(0) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} \quad (32)$$



$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)} \quad (33)$$

mediante la transformada inversa

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 4} \right\} = \cos 2t \quad (34)$$

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} \right\} = u_\pi(t) g(t - \pi) \quad \text{con } g(\tau) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2 + 4)} \right\} \quad (35)$$

por lo tanto

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)} \right\} = u_\pi(t) \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right) \right\} = u_\pi(t) \left[ \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - \pi)) \right] \quad (36)$$

del mismo modo

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2 + 4)} \right\} = u_{2\pi}(t) \left[ \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - 2\pi)) \right] \quad (37)$$

recordemos que hemos definido la función escalón como

$$u_c(t) \begin{cases} 0 & t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases} \quad c > 0 \quad (38)$$

y finalmente la solución será

$$y(t) = \cos 2t + u_\pi(t) \left[ \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - \pi)) \right] - u_{2\pi}(t) \left[ \frac{1}{4} (1 - \cos 2(t - 2\pi)) \right] \quad (39)$$

3. Ecuación diferencial, con valores iniciales, inhomogénea a una función impulso (delta de Dirac)

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad \text{con } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad (40)$$

donde la función (distribución) delta de Dirac viene definida por

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{con } t \neq t_0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(\tau - \tau_0) = 1 \quad (41)$$

con la útil propiedad de

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta(\tau - \tau_0) f(\tau) = f(\tau_0) \quad (42)$$

En una de las tablas anteriores hemos mostrado la transformada de Laplace de la función (distribución) Delta de Dirac:  $\mathbf{L} \{ \delta(t - c) \} = e^{-c s}$  por lo tanto

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad \Rightarrow \mathbf{L} \{ y'' + 2y' + 2y \} = \mathbf{L} \{ \delta(t - \pi) \} \quad (43)$$

$$(s^2 + 2s + 2) Y(s) = e^{-\pi s} \quad \Rightarrow Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{(s^2 + 2s + 2)} = e^{-\pi s} \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \quad (44)$$

por lo tanto

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ e^{-\pi s} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right\} = u_{\pi}(t) \left[ e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) \right] \quad (45)$$

o también

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ e^{-(t-\pi)} \sin(t-\pi) & t \geq \pi \end{cases} \quad (46)$$

## 6.5. Integral de Convolución

Algunas veces es posible identificar la transformada de Laplace  $H(s)$  como el producto de dos transformadas de Laplace,  $F(s)$  y  $G(s)$  las cuales son las transformadas de funciones conocidas  $f(t)$  y  $g(t)$ . **Pero eso es algunas veces: en general la transformada del producto de funciones no es el producto de transformadas.** Esas veces están contenidas en el llamado Teorema de Convolución, según el cual se establece una especie de “producto generalizado” de funciones  $f$  y  $g$ .

**Teorema de Convolución** Sean

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} \quad \text{y} \quad G(s) = \mathbf{L}\{g(t)\} \quad \text{que existen en el intervalo } s > a > 0$$

Entonces

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathbf{L}\{h(t)\} \quad \text{para } s > a$$

donde

$$h(t) = \mathbf{L}^{-1}(F(s)G(s)) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = (f * g)(t)$$

y  $h(t)$  se indentifica como la convolución de  $f$  y  $g$ . Las integrales arriba expuestas se conocen con integrales de convolución y hemos denotado  $h(t) = (f * g)(t)$  para insistir que se trata de un “producto generalizado” de funciones  $f$  y  $g$ . que comparte, con el producto ordinario de funciones, las siguientes propiedades

$$f * g = g * f \quad (\text{conmutatividad})$$

$$f * [g + k] = f * g + f * k \quad (\text{distributividad})$$

$$f * [g * k] = [f * g] * k \quad (\text{asociatividad})$$

$$f * 0 = 0 * f = 0$$

sin embargo  $f * 1 \neq f$  tal y como se puede apreciar de

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau) 1 d\tau = \int_0^t f(t-\tau) d\tau \neq f(t)$$

en el caso particular de que  $f(t) = \cos(t)$  tendremos

$$(\cos * 1)(t) = \int_0^t \cos(t-\tau) 1 d\tau = \sin(t-\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \sin(0) - \sin(t) = -\sin(t)$$

y por la misma razón, no hay garantía que  $(f * f)(t) > 0 \quad \forall f \neq 0$

El ejemplo más emblemático de la aplicación del Teorema de Convolución es el estudio del oscilador amortiguado y forzado, el cual viene descrito por la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \text{con } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \begin{cases} x_0 = x(0) \\ \dot{x}_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} \end{cases} \quad (47)$$

la transformada de Laplace nos lleva a

$$s^2 X(s) - sx_0 - \dot{x}_0 + 2\lambda X(s) - 2\lambda x_0 + \omega_0^2 X(s) = F(s) \quad (48)$$

resolviendo

$$X(s) = \frac{2\lambda x_0 + \dot{x}_0 + sx_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} + \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (49)$$

el primer sumando queda como

$$X_1(s) = \frac{2\lambda x_0 + \dot{x}_0 + sx_0}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} = \frac{x_0 (s + \lambda)}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)} + \frac{\dot{x}_0 + x_0 \lambda}{(s + \lambda)^2 + (\omega_0^2 - \lambda^2)} \quad (50)$$

y por lo tanto devolviendo el cambio

$$x_1(t) = x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t \quad \text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (51)$$

$$X_2(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \quad (52)$$

y por el teorema de convolución

$$x_2(t) = \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (53)$$

y por lo tanto la solución general será

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \lambda x_0}{\omega} \sin \omega t + \int_0^t \frac{1}{\omega} e^{-\lambda(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (54)$$

## 7. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

### 7.1. Motivación

Cuando consideramos la evolución de sistemas con varios grados de libertad o con varias partículas, naturalmente arribamos al tratamiento de sistemas de ecuaciones diferenciales. En estos sistemas encontramos varias variables dependientes de una sola variable independiente. El más natural de los ejemplos es el caso

de un sistema de partículas que se mueve en el espacio bajo la acción de fuerzas externas:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{F}}_1 \left( r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \frac{dr_3(t)}{dt} \dots \frac{dr_n(t)}{dt}, t \right) &= \frac{d^2 r_1(t)}{dt^2} \\ \vec{\mathcal{F}}_2 \left( r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \frac{dr_3(t)}{dt} \dots \frac{dr_n(t)}{dt}, t \right) &= \frac{d^2 r_2(t)}{dt^2} \\ \vec{\mathcal{F}}_3 \left( r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \frac{dr_3(t)}{dt} \dots \frac{dr_n(t)}{dt}, t \right) &= \frac{d^2 r_3(t)}{dt^2} \\ &\vdots \\ \vec{\mathcal{F}}_n \left( r_1(t), r_2(t), r_3(t), \dots, r_n(t), \frac{dr_1(t)}{dt}, \frac{dr_2(t)}{dt}, \frac{dr_3(t)}{dt} \dots \frac{dr_n(t)}{dt}, t \right) &= \frac{d^2 r_n(t)}{dt^2}\end{aligned}$$

donde, la función  $\vec{\mathcal{F}}_i = \sum_j \vec{F}_{i,j}$  expresa la sumatoria de fuerzas externas sobre cada partícula, vale decir

$$\begin{aligned}\sum_j \vec{F}_{1,j} \left( r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, \frac{dr_n}{dt}, t \right) &= \vec{\mathcal{F}}_1 \left( r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, \frac{dr_n}{dt}, t \right) \\ \sum_j \vec{F}_{2,j} \left( r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, \frac{dr_n}{dt}, t \right) &= \vec{\mathcal{F}}_2 \left( r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, \frac{dr_n}{dt}, t \right) \\ &\vdots \\ \sum_j \vec{F}_{n,j} \left( r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, \frac{dr_n}{dt}, t \right) &= \vec{\mathcal{F}}_n \left( r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \frac{dr_1}{dt}, \frac{dr_2}{dt}, \dots, \frac{dr_n}{dt}, t \right)\end{aligned}$$

Pero igual de importante es la posibilidad de convertir una ecuación diferencial ordinaria de orden superior

$$x^{(n)}(t) = F \left( x^{(n-1)}(t), x^{(n-2)}(t), \dots, \ddot{x}(t), \ddot{x}(t), \dot{x}(t), x(t), t \right)$$

haciendo el siguiente cambio variable

$$u_n = x^{(n-1)}(t); \quad u_{n-1} = x^{(n-2)}(t); \quad \dots u_4 = \ddot{x}(t); \quad u_3 = \ddot{x}(t); \quad u_2 = \dot{x}(t); \quad u_1 = x(t)$$

en un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{u}_n &= F_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, t) \\ \dot{u}_{n-1} &= x^{(n-1)}(t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_3 &= \ddot{x}(t) \\ \dot{u}_2 &= \ddot{x}(t) \\ \dot{u}_1 &= \dot{x}(t)\end{aligned}$$

que puede ser generalizado a:

$$\begin{aligned}\dot{u}_n &= F_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, t) \\ \dot{u}_{n-1} &= F_{n-1}(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_3 &= F_3(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, t) \\ \dot{u}_2 &= F_2(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, t) \\ \dot{u}_1 &= F_1(u_n, u_{n-1}, \dots, u_4, u_3, u_2, u_1, t)\end{aligned}$$

Para garantizar que existe solución al problema de valores iniciales se debe imponer algunas restricciones sobre las funciones  $F_i(u_n, \dots, u_3, u_2, u_1, t)$  para ello existen un par de teoremas que garantice esa solución

**Teorema 1:** Sean las funciones  $F_1, F_2, \dots, F_n$  y sus derivadas

$$\partial_1 F_1, \partial_1 F_2, \dots, \partial_1 F_n, \dots, \partial_i F_1, \partial_i F_2, \dots, \partial_j F_n \dots \partial_n F_1, \partial_n F_2, \dots, \partial_n F_n$$

continua en una región  $R$  del espacio  $(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$  que contiene al punto  $(t_0, u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$  que caracteriza las condiciones iniciales. Entonces existe un intervalo  $\|t - t_0\| < h$  en el cual existe una única solución  $u_1 = \phi_1(t), u_2 = \phi_2(t), \dots, u_n = \phi_n(t)$ ,

Hemos denotado  $\partial_j F_i = \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$  como la derivada parcial y  $u_m^0 = u_m(t_0)$  como las condiciones iniciales.

**Teorema 2** Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= p_{11}(t) u_1 + p_{12}(t) u_2 + \dots p_{1n}(t) u_n + g_1(t) \\ \dot{u}_2 &= p_{21}(t) u_1 + p_{22}(t) u_2 + \dots p_{2n}(t) u_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n &= p_{n1}(t) u_1 + p_{n2}(t) u_2 + \dots p_{nn}(t) u_n + g_n(t)\end{aligned}$$

Si  $p_{11}(t), p_{12}(t), \dots, p_{1n}(t) \dots p_{ij}(t) \dots p_{nn}(t)$  y  $g_1(t) \dots g_n(t)$  son funciones continua en el intervalo  $\alpha < t < \beta$  que contiene al punto  $t = t_0$  entonces existe una única solución que satisface las condiciones iniciales  $u_m^0 = u_m(t_0)$

## 7.2. Notación Vectorial

El sistema lineal antes mencionado

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= p_{11}(t) u_1 + p_{12}(t) u_2 + \dots p_{1n}(t) u_n + g_1(t) \\ \dot{u}_2 &= p_{21}(t) u_1 + p_{22}(t) u_2 + \dots p_{2n}(t) u_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{u}_n &= p_{n1}(t) u_1 + p_{n2}(t) u_2 + \dots p_{nn}(t) u_n + g_n(t)\end{aligned}$$

puede condensarse en la siguiente ecuación matricial

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}(t) \mathbf{u} + \mathbf{g}(t)$$

en la cual estamos representando

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

con el vector solución de la forma

$$\mathbf{u} = \Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix}$$

### 7.3. Sistemas Lineales Homogéneos

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  procedemos de manera análoga al caso de una sola ecuación con coeficientes constantes

$$y' = ay \iff \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = e^{r t} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

con  $a, a_{ij}, \xi_m$  constantes. Al sustituir la solución  $\mathbf{x} = \xi e^{r t}$  en la ecuación  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$  obtenemos  $\xi r e^{r t} = \xi e^{r t}$  por lo cual, el problema se reduce a la búsqueda de los autovalores y autovectores del sistema  $\mathbf{A} \mathbf{x} = r \xi$

$$(\mathbf{A} - r \mathbf{I}) \xi = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraico. Como un ejemplo, para el caso

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \text{si} \quad \mathbf{x} = \xi e^{r t} \implies \begin{pmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo cual

$$\begin{vmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{vmatrix} = (1 - r)^2 - 4 = r^2 - 2r - 3 = 0 \implies \begin{cases} r_1 = 3 \\ r_2 = -1 \end{cases}$$

de donde

$$r_1 = 3 \implies -2\xi_1^{(1)} + \xi_2^{(1)} = 0 \implies \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ 2\xi_1^{(1)} \end{pmatrix}$$

similarmente

$$r_2 = -1 \implies \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(2)} \\ -2\xi_1^{(2)} \end{pmatrix}$$

por lo tanto la solución general del sistema será

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Obviamente el Wronskiano de esta solución

$$W[\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{-2t} \neq 0$$

garantiza que las dos soluciones son linealmente independientes.

Para el caso de matrices hermíticas,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{H}}$  vale decir, que la matriz  $\mathbf{A}$  coincide con su conjugada y traspuesta,  $\mathbf{A} = \overline{(\mathbf{A}^T)}$ , todos los autovalores son reales y la solución general para un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}$$

Para el caso particular de matrices simétricas (hermíticas reales) los autovalores  $r_1, r_2 \dots r_n$  y los autovectores  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \dots \xi^{(n)}$  ambos son reales.

Para el caso de matrices  $\mathbf{A}$  no hermíticas, consideremos primero que  $\mathbf{A}$  sea real. Entonces

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \implies \mathbf{x} = \xi e^{r t} \implies (\mathbf{A} - r \mathbf{I}) \xi = \mathbf{0} \implies \begin{cases} r_1 = \lambda + i\mu \\ r_2 = \lambda - i\mu \end{cases} \implies \begin{cases} r_1 = \bar{r}_2 \\ \xi^{(1)} = \bar{\xi}^{(2)} \end{cases}$$

por lo cual  $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  con  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  vectores reales, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{(\lambda + i\mu)t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \sin \mu t) \\ \mathbf{x}^{(1)}(t) &= e^{\lambda t} (\underbrace{\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t}_{\mathbf{u}(t)} + i e^{\lambda t} (\underbrace{\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t}_{\mathbf{v}(t)})) \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$$

Así, para el caso que los autovalores de la matriz real,  $\mathbf{A}$ , sean complejos,  $r_1 = \lambda + i\mu$ ;  $r_2 = \lambda - i\mu$  complejos y  $r_3, r_4 \dots r_n$  reales, y los autovectores  $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ ;  $\xi^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ ;  $\xi^{(3)}, \xi^{(4)} \dots \xi^{(n)}$  la solución general será

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + i c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + c_4 \xi^{(4)} e^{r_4 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}$$

como ejemplo

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad \text{si} \quad \mathbf{x} = \xi e^{r t} \implies \begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo cual

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 5 & -3-r \end{vmatrix} = r^2 + 2r + 2 = 0 \implies \begin{cases} r_1 = -1 + i \\ r_2 = -1 - i \end{cases} \implies \begin{cases} \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} \\ \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \end{cases}$$

finalmente la solución general sera

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

Para el caso que los autovalores de la matriz real,  $\mathbf{A}$ , estén repetidos  $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_m = \rho$  y  $r_{m+1}, \dots, r_n$  distintos, la solución general sera

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ t^{m-1} \zeta^{(m-1)} + t^{m-2} \zeta^{(m-2)} + \dots + \zeta^{(0)} \right\} e^{\rho t} + c_{m+1} \xi^{(m+1)} e^{r_{m+1} t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}$$

#### 7.4. Sistemas Lineales Inhomogéneos

Todo operador lineal hermítico  $\mathbf{A} : V \longrightarrow V$ , con  $n$  autovectores distintos, definidos por  $\mathbf{A} |u_j\rangle = \lambda_j |u_j\rangle$ , tiene una representación matricial diagonal  $\hat{A}_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$  mediante una transformación de similaridad  $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$  con  $\mathbf{T}$  una matriz unitaria  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\dagger$  que trasforma la base de  $\mathbf{A}$  a la base donde  $\hat{\mathbf{A}}$  es diagonal  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_i\rangle \dots |v_n\rangle\} \xrightarrow{\mathbf{T}} \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_i\rangle \dots |u_n\rangle\}$ . Este teorema es claro a partir de que si  $\mathbf{A}$  tiene  $n$  autovalores distintos, tiene  $n$  autovectores linealmente independientes los cuales forman base de  $V$  y en la cual la representación matricial del  $\mathbf{A}$  es diagonal. Pero como siempre es posible pasar de  $\mathbf{A}$  no diagonal a  $\hat{\mathbf{A}}$  a diagonal con los mismos autovalores mediante una transformación de similaridad  $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$  queda demostrado. Esto puede formalizarse de la siguiente manera

$$\langle v_i | \underbrace{\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}}_1 \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{T}^\dagger \mathbf{T}}_1 | v_j \rangle = \underbrace{\langle v_i | \mathbf{T}^\dagger}_{\langle u_i |} \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^\dagger}_{\hat{\mathbf{A}}} \underbrace{\mathbf{T} | v_j \rangle}_{| u_j \rangle} = \langle u_i | \hat{\mathbf{A}} | u_j \rangle = \lambda_j \langle u_i | u_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$$

Nos queda determinar la forma de la matriz unitaria de transformación  $\mathbf{T}$ . Para ello seleccionamos la base canónica  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_i\rangle \dots |e_n\rangle\}$  como base de partida de  $\mathbf{A}$  con

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots |e_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

y  $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_i\rangle \dots |u_n\rangle\}$  la base de autovectores en la cual  $\hat{\mathbf{A}}$  es diagonal. Por lo tanto  $\mathbf{T}$  es la matriz de transformación de una base a la otra, identificando columna a columna nos damos cuenta que las columnas de la matriz  $\mathbf{T}$  son los autovectores de  $\mathbf{A}$

$$|u_i\rangle = \sum_{j=1}^n T_{ij} |e_j\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle e_j | u_i \rangle = \langle e_j | \left( \sum_{j=1}^n T_{ij} |e_j\rangle \right) \quad \Rightarrow$$

$$\langle e_j | u_i \rangle = T_{ij} = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & & u_n^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}^\dagger = \begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \dots & u_1^{(n)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & & u_2^{(n)} \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & & u_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}$$



donde hemos denotado  $u_i^{(m)}$  la componente  $m$  del vector  $j$ -ésimo en la base  $|e_i\rangle$  (con  $i = 1, \dots, n$ ). Por lo tanto, si los  $n$  autovalores y autovectores de  $\mathbf{A}$  son distintos y conocidos,  $\mathbf{A}$  se dice diagonalizable. Si  $\mathbf{A}$  es hermitica,  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$  y es muy fácil construir la inversa de la matriz de transformación  $\mathbf{T}$ . Si los autovalores de  $\mathbf{A}$  son degenerados, vale decir si el número de autovectores linealmente independientes es menor que  $n$ , entonces  $\mathbf{A}$  no es diagonalizable y no existe una matriz de transformación  $\mathbf{T}$  ( $\mathbf{T}$  no tiene inversa) tal que  $\mathbf{TAT}^{-1} = \hat{\mathbf{A}}$ .

Lo que nos ocupa ahora es la solución del sistema de ecuaciones diferenciales inhomogéneo de la forma

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{g}(t) \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad a_{ij} = \text{const} \\ \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(t) \\ g^{(2)}(t) \\ \vdots \\ g^{(n)}(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

donde  $\mathbf{A}$  una matriz constante y diagonalizable,  $\mathbf{g}(t)$  continúa en el intervalo  $\alpha \leq t \leq \beta$ . La solución de este problema pasa por encontrar los autovalores y autovectores de  $\mathbf{A} \Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n; |u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_i\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$  construir a partir de ellos la matriz  $\mathbf{T}$  y su hermitica conjugada  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$  y a partir de ella hacer un cambio de variable

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \mathbf{y}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{AT} \mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'(t) = \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{AT}}_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{y}(t) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{g}(t)$$

por lo tanto

$$\mathbf{y}'(t) = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{g}(t) \end{array} \right.$$

Entonces, por componente quedan

$$y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) + h_i(t) = \lambda_i y_i(t) + T_{ji}^* g_j(t) = y_i(t) = e^{\lambda_i t} \int_{t_0}^t d\tau e^{\lambda_i \tau} u_j^{*(i)} g_j(\tau) + c_i e^{\lambda_i t}$$